

TABLE DES MATIÈRES

Avant-Propos	7
Table des matières	9
Principales notations	19
I Modèles des systèmes monovariables	21
I-1 Linéarisation des systèmes à temps continu	22
I-1.1 Modèle d'état général non linéaire	22
I-1.2 Modèle linéaire	22
I-2 Modèles des systèmes linéaires à temps continu	25
I-3 Équation différentielle et fonction de transfert	26
I-3.1 Expression générale de l'équation différentielle	26
I-3.2 Obtention de la fonction de transfert	26
I-3.3 Relation équation différentielle - fonction de transfert	27
I-3.4 Différentes formes de la fonction de transfert	27
I-4 Passage Fonction de transfert → Équations d'état	28
I-4.1 Système strictement propre	28
I-4.2 Obtention de formes modales	28
I-4.3 Obtention de formes compagnes	29
I-4.4 Cas d'une fonction de transfert non strictement propre ($m = n$)	30
I-5 Passage Équations d'état → Fonction de transfert	31
I-6 Non-unicité de la représentation d'état	32
I-7 Modélisation de systèmes physiques	33
I-7.1 Éléments de systèmes électriques	33
a Résistance électrique	33
b Capacité électrique	33
I-7.2 Éléments de systèmes mécaniques	34
a Masse M en translation	34
b Inertie J en rotation	34

	c	Frottements	35
	d	Ressorts	35
I-7.3		Température d'un corps chauffé	35
I-7.4		Remplissage d'un réservoir	36
I-7.5		Remplissage et vidange d'un réservoir	36
I-7.6		Enroulement électrique	37
I-7.7		Modélisation d'un haut-parleur	37
I-7.8		Moteur à courant continu à commande d'induit	38
I-7.9		Moteur à courant continu à excitation séparée	40
I-7.10		Suspension automobile	41
I-7.11		Mouvement du chariot d'une grue	41
I-8		Exercices	42

II Réponses des systèmes linéaires 51

II-1		Forme générale de la réponse	52
II-1.1		Réponses à partir de l'équation différentielle	52
II-1.2		Réponses à partir des équations d'état	52
	a	Expression générale	52
	b	Vérification	53
II-1.3		Réponses à partir de la fonction de transfert	54
II-2		Réponse fréquentielle	55
II-2.1		Calcul général de la réponse	55
II-2.2		Régime permanent. Lien avec la fonction de transfert	56
II-2.3		Représentations graphiques	56
	a	Lieu de Nyquist	56
	b	Diagramme de Bode	57
II-2.4		Diagramme de Black (diagramme de Nichols)	58
II-3		Réponse d'un système du premier ordre	58
II-3.1		Réponse indicielle d'un système du premier ordre	59
II-3.2		Réponse fréquentielle d'un système du premier ordre	60
II-3.3		Influence de la constante de temps d'un système du premier ordre	61
II-4		Réponse d'un système du second ordre	63
II-4.1		Réponse indicielle d'un système du second ordre	63
II-4.2		Réponse fréquentielle d'un système du second ordre	65
II-4.3		Ajout d'un zéro à un système du second ordre	68
II-4.4		Ajout d'un pôle supplémentaire à un système du second ordre	70
II-5		Modes dominants	72
II-6		Exercices	74

III	Stabilité	77
III-1	Stabilité des systèmes linéaires à temps continu	78
III-1.1	États d'équilibre	78
III-1.2	Stabilité : définitions	79
III-1.3	Régime libre (évolution depuis l'état initial x_0)	80
a	Cas de valeurs propres de A distinctes	80
b	Cas de valeurs propres de A multiples	81
III-1.4	Stabilité des états d'équilibre	81
III-2	Critère de Routh	82
III-2.1	Règle générale	83
III-2.2	Règles particulières	84
a	Racines à partie réelle positive	84
b	Élément nul dans la première colonne	85
c	Existence d'une ligne nulle	85
d	Existence de paramètres variables	86
III-3	Lieu d'Evans	87
III-3.1	Construction du lieu d'Evans	87
a	Équation caractéristique :	87
b	Interprétation géométrique :	88
c	Règles de construction :	88
III-3.2	Résumé des règles	90
III-3.3	Exemples de lieux d'Evans	91
III-4	Stabilité des systèmes non linéaires	96
III-4.1	Définition et théorèmes	97
III-4.2	Fonctions de Lyapunov	97
a	Fonctions scalaires définies dans une région Ω incluant l'origine	98
b	Condition suffisante de stabilité (théorèmes)	100
c	Cas des systèmes linéaires : condition nécessaire et suffisante de stabilité	100
III-4.3	Stabilité d'un système commandé	101
III-5	Exercices	102

IV Performances des systèmes bouclés 107

IV-1	Caractéristiques principales de la réponse à un échelon de position	108
IV-2	Caractéristiques principales de la réponse fréquentielle	109
IV-3	Stabilité des systèmes bouclés	110
IV-3.1	Définitions	110
IV-3.2	Condition mathématique de stabilité asymptotique	110

IV-3.3	Critères algébriques de stabilité	110
a	Critère de Routh (cf. paragraphe III-2)	110
b	Lieu d'Evans (cf. paragraphe III-3)	110
IV-3.4	Critère géométrique : critère du revers	111
a	Critère du revers	111
b	Marges de stabilité	111
IV-4	Réponse harmonique en boucle fermée	113
IV-4.1	Utilisation d'abaques	113
a	Abaque de Hall	113
b	Abaque de Black	114
IV-4.2	Exemple 1	114
IV-4.3	Exemple 2	115
IV-5	Précision des systèmes bouclés	118
IV-5.1	Définition	118
IV-5.2	Expression générale de l'erreur en régime permanent	118
IV-5.3	Expression de l'erreur selon le type de système (à partir de la fonction de transfert en boucle ouverte)	118
a	Erreur en régime permanent pour un système de type α :	119
b	Tableau récapitulatif	119
IV-5.4	Exemples	119
a	Système de type 0 : $G(s) = \frac{9}{s^2 + s + 1}$	119
b	Système de type 1 : $G(s) = \frac{1}{s(s+1)}$	120
IV-5.5	Rejet de perturbation	120
IV-5.6	Précision en boucle fermée (à partir de la fonction de transfert en boucle fermée)	121
IV-6	Régime transitoire	122
IV-6.1	Dans le domaine temporel (en termes de pôles)	122
a	Mode dominant du premier ordre	122
b	Mode dominant du second ordre	122
IV-6.2	Dans le domaine fréquentiel (résonance, bande passante)	124
IV-7	Conclusion	125
IV-8	Exercices	125

V Commandabilité et observabilité **129**

V-1	Commandabilité et observabilité	130
V-1.1	Commandabilité	130
V-1.2	Observabilité	130

V-2	Critères applicables aux formes de Jordan	131
	a Cas de valeurs propres simples	131
	b Cas d'une valeur propre multiple	132
V-3	Commandabilité et observabilité : Modèles et structure	133
	V-3.1 Exemple de système composite	133
	a Modèle d'état	133
	b Fonction de transfert	134
	c Équation différentielle	134
	V-3.2 Propriétés structurelles des modèles	134
	V-3.3 Composition de systèmes	135
	V-3.4 Décomposition canonique de Kalman	135
V-4	Dualité commandabilité - observabilité	138
V-5	Stabilisabilité, détectabilité	139
V-6	Autres critères de commandabilité et d'observabilité	139
	V-6.1 Critères de Popov-Belevitch-Hautus	139
	a Critère de commandabilité	139
	b Critère de stabilisabilité	139
	c Critère d'observabilité	140
	d Critère de détectabilité	140
	V-6.2 Critères pour les systèmes stables asymptotiquement	140
	a Critère de commandabilité	140
	b Critère d'observabilité	141
	c Critère de stabilisabilité	141
	d Critère de détectabilité	142
V-7	Exercices	142

VI Commande des systèmes linéaires : Approche entrée-sortie 145

VI-1	Régulateur Proportionnel - Intégral - Dérivé (P.I.D.)	146
	VI-1.1 Formulation générale du régulateur P.I.D.	146
	VI-1.2 Effets des différentes actions du P.I.D.	146
	a Action proportionnelle : $p(t) = k_p \varepsilon(t)$	146
	b Action intégrale : $i(t) = \frac{k_p}{\tau_i} \int_0^t \varepsilon(t) dt$	147
	c Action dérivée : $d(t) = k_p \tau_d \frac{d\varepsilon(t)}{dt}$	147
	VI-1.3 Adaptations du P.I.D.	148
	a Partie proportionnelle	148
	b Partie dérivée	148
	c Partie intégrale (système anti-windup)	148

VI-1.4	Réglage du P.I.D.	149
a	Méthode de la réponse indicielle	149
b	Méthode de l'oscillation limite en boucle fermée	150
VI-2	Réseau correcteur à avance de phase	150
VI-2.1	Principe de correction	150
VI-2.2	Modèle du correcteur	151
VI-2.3	Effets principaux du correcteur	152
VI-2.4	Exemple de calcul d'un correcteur	153
a	Procédure de calcul du correcteur	153
b	Remarque	153
VI-3	Réseau correcteur à retard de phase	155
VI-3.1	Principe de correction	155
VI-3.2	Modèle du correcteur	156
VI-3.3	Effets principaux du correcteur	157
VI-3.4	Exemple de calcul d'un correcteur	157
VI-4	Placement de pôles	158
VI-4.1	Correcteur à un degré de liberté	159
VI-4.2	Correcteur à deux degrés de liberté	161
VI-5	Commande optimale	164
VI-5.1	Principe général	164
VI-5.2	Une approche possible	164
VI-5.3	Procédure de calcul d'un compensateur optimal	166
VI-5.4	Cas où la consigne est un échelon de position	170
VI-6	Exercices	172

VII Commande des systèmes linéaires : Approche espace d'état **185**

VII-1	Placement de pôles	186
VII-1.1	Principe	186
VII-1.2	Placement de pôles à partir de la forme canonique de commande	186
a	Calcul du gain de retour d'état L :	187
b	Calcul du gain de précommande l_c :	187
VII-1.3	Placement de pôles à partir d'un modèle d'état quelconque	188
VII-2	Placement des pôles, autres approches	190
VII-2.1	Calcul de L par identification polynomiale	190
VII-3	Commande optimale (commande linéaire quadratique)	192
VII-3.1	Régulation	192
a	Définition du problème	192
b	Calcul du gain de retour d'état optimal	193

	c	Comportements asymptotiques	195
	d	Marge de phase - Marge de gain	196
VII-3.2		Poursuite	199
	a	Position du problème	199
	b	Formulation d'un problème linéaire quadratique	199
	c	Solution du problème	200
VII-4		Reconstruction d'état	202
	VII-4.1	Principe d'un observateur dynamique	202
	VII-4.2	Justification de l'observateur dynamique	203
	VII-4.3	Calcul d'un observateur à partir de la forme canonique d'observation	203
	VII-4.4	Calcul d'un observateur à partir d'un modèle d'état quelconque	204
VII-5		Observateur optimal	207
	VII-5.1	Synthèse d'un observateur optimal	207
	VII-5.2	Une tentative d'interprétation physique	209
VII-6		Généralisation	211
	VII-6.1	Structure générale	211
	VII-6.2	Observateur d'ordre plein (identité)	212
	VII-6.3	Observateur d'ordre réduit	212
VII-7		Commande retour d'état-observateur	215
	VII-7.1	Observateur identité	215
	VII-7.2	Observateur d'ordre réduit	217
	VII-7.3	Commande optimale	217
	a	Position du problème	218
	b	Solution	219
VII-8		Extensions	222
	VII-8.1	Commande par retour de sortie statique	223
	VII-8.2	Commande par compensation dynamique	224
	a	Retour d'état-observateur identité	225
	b	Retour d'état-observateur d'ordre réduit	225
	VII-8.3	Commande d'un système décrit par un modèle entrée-sortie	225
VII-9		Exercices	231

A Schéma-blocs 241

A-1		Éléments des schéma-blocs	241
	A-1.1	Bloc	241
	A-1.2	Sommeur algébrique	241
	A-1.3	Capteur	242
A-2		Règles de transformation des schéma-blocs	242

A-2.1	Permutation de sommateur et de capteur	242
A-2.2	Permutation de bloc et de sommateur ou capteur	243
A-2.3	Agrégation de blocs	244
A-2.4	Réduction d'une boucle	244
A-3	Systèmes bouclés élémentaires	244
A-3.1	Système à retour non unitaire	244
A-3.2	Système à retour unitaire	245
A-3.3	Réduction d'un système à retour non unitaire à un système à retour unitaire	246
A-4	Exemple de schéma-bloc	246
B	Transformation de Laplace	249
B-1	Définition	249
B-2	Propriétés	249
B-3	Transformées de Laplace des principaux signaux	251
C	Éléments de calcul matriciel	253
C-1	Définitions	253
C-1.1	Matrice :	253
C-1.2	Déterminant	253
C-1.3	Rang d'une matrice	254
C-1.4	Transposition d'une matrice	255
C-1.5	Multiplication matricielle	255
C-1.6	Inversion d'une matrice	256
C-1.7	Opérations multiples	257
C-1.8	Trace d'une matrice	257
C-1.9	Matrices partitionnées	258
C-2	Analyse spectrale d'une matrice	259
C-2.1	Calcul des valeurs propres et des vecteurs propres	260
C-2.2	Matrice modale	261
C-2.3	Diagonalisation d'une matrice	261
C-2.4	Cas de valeurs propres multiples	262
a	Cas $q = p$	262
b	Cas $q = 1$	264
c	Cas $1 < q < p$	265
C-2.5	Théorème de Cayley-Hamilton	267
C-3	Matrices spéciales	267
C-3.1	Matrices compagnes	267
C-3.2	Matrice de Vandermonde	268
C-3.3	Matrice de Toeplitz	269

C-4	Fonctions de matrices	269
C-4.1	Exponentielle de matrice	270
C-4.2	Calcul par la transformation de Laplace	270
C-4.3	Calcul par la méthode des modes	270

D Correction des exercices 273

D-1	Correction des exercices du chapitre I	273
D-2	Correction des exercices du chapitre II	289
D-3	Correction des exercices du chapitre III	298
D-4	Correction des exercices du chapitre IV	310
D-5	Correction des exercices du chapitre V	316
D-6	Correction des exercices du chapitre VI	325
D-7	Correction des exercices du chapitre VII	345

Bibliographie 363

Index 367