

Modélisation par éléments finis

Jean-Charles Craveur

Modélisation par éléments finis

4^e ÉDITION

DUNOD

Graphisme de couverture : Élisabeth Riba
Illustration de couverture : forest095/shutterstock.com

<p>Le pictogramme qui figure ci-contre mérite une explication. Son objet est d'alerter le lecteur sur la menace que représente pour l'avenir de l'écrit, particulièrement dans le domaine de l'édition technique et universitaire, le développement massif du photocopillage.</p> <p>Le Code de la propriété intellectuelle du 1^{er} juillet 1992 interdit en effet expressément la photocopie à usage collectif sans autorisation des ayants droit. Or, cette pratique s'est généralisée dans les établissements</p>	 <p>DANGER LE PHOTOCOPIAGE TUE LE LIVRE</p>	<p>d'enseignement supérieur, provoquant une baisse brutale des achats de livres et de revues, au point que la possibilité même pour les auteurs de créer des œuvres nouvelles et de les faire éditer correctement est aujourd'hui menacée.</p> <p>Nous rappelons donc que toute reproduction, partielle ou totale, de la présente publication est interdite sans autorisation de l'auteur, de son éditeur ou du Centre français d'exploitation du droit de copie (CFC, 20, rue des Grands-Augustins, 75006 Paris).</p>
--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------	-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------	------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------

© Dunod, 2022
11, rue Paul Bert, 92240 Malakoff
www.dunod.com
ISBN 978-2-10-084088-5

Le Code de la propriété intellectuelle n'autorisant, aux termes de l'article L. 122-5, 2° et 3° a), d'une part, que les « copies ou reproductions strictement réservées à l'usage privé du copiste et non destinées à une utilisation collective » et, d'autre part, que les analyses et les courtes citations dans un but d'exemple et d'illustration, « toute représentation ou reproduction intégrale ou partielle faite sans le consentement de l'auteur ou de ses ayants droit ou ayants cause est illicite » (art. L. 122-4).

Cette représentation ou reproduction, par quelque procédé que ce soit, constituerait donc une contrefaçon sanctionnée par les articles L. 335-2 et suivants du Code de la propriété intellectuelle.

Table des matières

Avant-propos	XI
1 Rappels de mécanique	1
1.1 Vecteur des contraintes	1
1.2 Matrice des contraintes	3
1.3 Équations d'équilibre	4
1.4 Tenseur des déformations	9
1.5 Relations Contraintes-Déformations	10
1.6 Limite élastique, contrainte équivalente	12
2 Méthode des déplacements	15
2.1 Treillis	15
2.2 Résolution RDM classique	16
2.3 Résolution RDM matricielle	16
2.4 Matrice de raideur d'une barre	18
2.5 Assemblage des matrices élémentaires	22
2.6 Traitement des conditions aux limites	23
2.7 Inversion du système linéaire	28
2.8 Staticité des structures	31
2.9 Calcul des contraintes	32
2.10 RDM matricielle et éléments finis	33
3 Méthodes d'approximation	35
3.1 Résidus pondérés	35
3.2 Méthodes variationnelles	39
3.3 Exemple	40
3.4 Principe des travaux virtuels	43
4 Formulation d'un élément	45
4.1 Fonctions d'interpolation	45
4.2 Propriétés des fonctions d'interpolation	46
4.3 Exemple simple de détermination	47
4.4 Famille de Lagrange	48
4.5 Famille de Serendip	50
4.6 Éléments isoparamétriques	52

4.7	Intégration numérique	54
4.8	Modes cinématiques parasites	58
4.9	Nœuds et points d'intégration	59
5	Analyse statique linéaire	61
5.1	Mécanique linéaire	61
5.2	Linéarité matérielle	62
5.3	Linéarité géométrique	62
5.4	Conditions aux limites bilatérales	66
5.5	Calcul statique linéaire et validation	67
5.6	Pivots nuls et pivots négatifs	70
6	Contraintes	73
6.1	Discrétisation et charges réparties	73
6.2	Contraintes	74
6.3	Contraintes moyennes	74
6.4	Contraintes extrapolées	75
6.5	Exemples	77
6.6	Compléments	79
7	Éléments de barre	85
7.1	Comportement de barre	85
7.2	Élément fini de barre	86
7.3	Barre du premier degré, non isoparamétrique	87
7.4	Barre du premier degré, isoparamétrique	88
7.5	Barre du second degré, isoparamétrique	89
7.6	Treillis de barres	91
7.7	Compléments	94
8	Éléments de membrane	97
8.1	EPC et comportement membranaire	97
8.2	Éléments finis de membrane	99
8.3	Construction d'éléments de membrane	100
8.4	Membranes du second degré	104
8.5	Premier exemple	104
8.6	Deuxième exemple	105
8.7	Triangle, quadrangle	110
8.8	Formulation état plan de déformation (EPD)	112
9	Éléments de volume	115
9.1	Généralités	115
9.2	Éléments finis de volume	115
9.3	Élancement	118
9.4	Contraintes de peau	119

9.5 Contact et hexaèdres	120
9.6 Premier exemple	121
9.7 Second exemple	124
10 Éléments de poutre	129
10.1 Comportement de poutre	129
10.2 Élément fini de poutre	130
10.3 Élément fini de poutre de Bernoulli	132
10.4 Élément fini de poutre de Timoshenko	134
10.5 Élément fini de poutre universelle	135
10.6 Modélisation	136
10.7 Post-traitement	138
11 Éléments de plaque et de coque	141
11.1 Introduction	141
11.2 Hypothèses de la théorie des plaques	141
11.3 Relations cinématiques	145
11.4 Relations moments-courbures	146
11.5 Éléments finis de plaque	148
11.6 Coques	151
11.7 Connexion des coques	153
11.8 Coques gauches	154
11.9 Triangle, quadrangle, contraintes	154
11.10 Compléments	159
12 Éléments axisymétriques	163
12.1 Modélisation axisymétrique	163
12.2 Éléments finis axisymétriques	164
12.3 Élément triangulaire du premier degré	166
12.4 Chargement d'un élément axisymétrique	167
12.5 Premier exemple	168
12.6 Deuxième exemple	169
12.7 Compléments	171
13 Outils de maillage	173
13.1 Introduction	173
13.2 Mailleur 1D	173
13.3 Mailleurs 2D	174
13.4 Mailleurs surfaciques en 3D	178
13.5 Mailleurs 3D	180
13.6 Lissage, recombinaison	183
13.7 Vérifications	184
13.8 Compléments	185

14 Analyse modale	189
14.1 Présentation	189
14.2 Modes propres et fréquences propres	190
14.3 Orthogonalité des modes propres	191
14.4 Modes rigides	193
14.5 Masse effective	194
14.6 Matrices de masse	195
14.7 Poutres et coques	198
14.8 Assemblage de la matrice de masse	199
14.9 Résolution du problème aux valeurs propres	199
14.10 Pivots en analyse modale	205
14.11 Influence de la température	205
14.12 Compléments	206
15 Réponse dynamique	211
15.1 Généralités	211
15.2 Amortissement structural	212
15.3 Transitoire par superposition modale	212
15.4 Transitoire par intégration directe	220
15.5 Réponse harmonique	227
15.6 Excitation d'ensemble, excitation locale	231
16 Précontrainte	235
16.1 Aspect Physique	235
16.2 Précontrainte de charge	235
16.3 Précontrainte d'assemblage	239
16.4 Effet de précontrainte	242
17 Flambage	245
17.1 Flambage des poutres	245
17.2 Flambage d'Euler des structures	250
17.3 Tube sous vide	257
17.4 Cuve remplie d'eau	259
17.5 Poutre en flexion	263
17.6 Flambage des barres	265
18 Jeux et contacts	267
18.1 Contact et analyse linéaire	267
18.2 Contact nœud sur nœud	268
18.3 Contact nœud sur surface	269
18.4 Gestion du contact	271
18.5 Contact et modes rigides	273

Table des matières

18.6 Flexion 3 points	275
18.7 Frettage	277
18.8 Bielle	283
19 Super-éléments	291
19.1 Introduction	291
19.2 Statique linéaire	291
19.3 Analyse modale	294
19.4 Premier exemple	296
19.5 Deuxième exemple	299
19.6 Troisième exemple	300
19.7 Quatrième exemple	300
20 Divers	303
20.1 Effets thermiques	303
20.2 Conditions aux frontières	309
20.3 Collage	313
Index	315

Avant-propos

Le calcul de structures par éléments finis est une discipline née il y a environ 60 ans, où se mêlent étroitement les mathématiques, la mécanique et l'analyse numérique, d'où sa complexité et les différentes approches que l'on peut en avoir. Les progrès réalisés en informatique sur cette période, tant par la puissance de calcul que par une interactivité toujours plus grande et des interfaces homme/machine sans cesse améliorées, ont contribué dès le milieu des années 80 à une diffusion toujours plus large de la conception assistée par ordinateur (CAO) dans les bureaux d'études. Les passerelles devenant de plus en plus « transparentes » entre la CAO et le maillage puis le calcul, cela a naturellement conduit à une utilisation sans cesse croissante des programmes de calcul par éléments finis : la simulation numérique est devenue incontournable dans les bureaux d'études. Par manque de formation scientifique, beaucoup d'utilisateurs de ces outils de simulation confondent cependant maillage et modélisation, planches de résultats en couleur et comportement réel de la structure. La plupart des cours et des ouvrages consacrés aux éléments finis abordent cette méthode sous l'aspect mathématique (principes variationnels, formulation des éléments, construction des matrices de raideur...), ce qui est indispensable pour les futurs développeurs de codes, dont le nombre est cependant très limité par rapport à celui des utilisateurs de ces codes. Cet ouvrage n'est ni un cours sur la méthode des éléments finis, ni un guide d'utilisation d'un logiciel particulier, mais une aide pour l'utilisateur de ces outils de simulation qui y trouvera des éléments théoriques puis pratiques dans les exemples illustrant les différents chapitres.

La première édition de cet ouvrage a été publiée en 1995, après 12 ans de pratique quotidienne du calcul de structures, à l'ONERA puis chez SAMTECH. Enseignant-chercheur à l'ISMANS et formateur au CNRS depuis 1996, j'ai assisté à l'évolution des outils de calcul de structures et du travail réalisé en bureau de calcul. Il en a résulté quatre autres ouvrages écrits en collaboration, publiés par les éditions DUNOD, traitant de sujets plus spécialisés. À quelques mois de prendre ma retraite et à la demande des éditions DUNOD, j'ai entrepris d'actualiser et de remanier la troisième édition de ce livre, focalisée sur les problèmes de mécanique linéaire pour les structures constituées de matériaux isotropes. En effet, sur les vingt dernières années, certains éléments finis ont été supplantés par d'autres, plus performants, ayant un spectre d'utilisation plus large. Certaines méthodes sont devenues obsolètes, des procédures automatisées et transparentes ont remplacé des enchaînements de calculs et des gestions de fichiers pour le moins délicates. Par rapport à la version précédente, divers points ont été supprimés, d'autres détaillés car certaines notions de base sont toujours indispensables pour modéliser une structure, comprendre les étapes de calcul et la gestion des données de manière à valider le résultat obtenu par la simulation.

Même si les intitulés n'ont pas changé, les contenus et la manière de présenter le calcul de structures ont beaucoup évolué ces dernières années. Le contenu de cette nouvelle édition couvre une partie de l'enseignement dispensé à l'ISMANS en deuxième année

du cycle ingénieur, dans l'option MCOP spécialisée en calcul de structures. Tous les exemples de cet ouvrage font partie des exercices traités en cours et ont été réalisés avec SAMCEF.

Je ne saurais terminer cette présentation sans remercier Michael Bruyneel, ami de longue date avec lequel j'ai publié deux autres ouvrages, pour sa relecture attentive et ses encouragements. Je remercie également tous les étudiants qui ont intégré l'option MCOP de l'ISMANS depuis 1996, les collègues du CNRS et les industriels pour tous les projets de recherche qui nous ont permis de progresser dans l'art de la modélisation, et ont contribué à faire évoluer les cours. Je remercie également l'équipe de SAMTECH à Liège avec laquelle j'ai eu la chance et le privilège de travailler depuis bientôt 40 ans, et qui m'a tant apporté. J'adresse enfin un grand merci à ma femme pour sa patience et ses encouragements.

Coulaines, mai 2022

Chapitre 1

Rappels de mécanique

1.1 Vecteur des contraintes

On ne s'intéresse qu'aux **milieux continus** qui sont des domaines de l'espace à trois dimensions. Ce sont des corps purement fictifs où la matière est uniformément distribuée dans le volume, de sorte que tout élément infinitésimal a les mêmes propriétés que le corps lui-même. On suppose de plus qu'au voisinage d'un point quelconque du milieu, ces propriétés sont des fonctions continues et différentiables par rapport à toutes les variables définissant le point (coordonnées, temps...). Ces milieux continus ne subissent que des **transformations continues**. En particulier, deux points initialement voisins le restent à tout instant, tout en ayant des déplacements quelconques (finis ou infinitésimaux).

Une structure physique ne peut être sollicitée que sur son enveloppe externe, ou dans son volume. Les sollicitations agissant sur l'enveloppe sont dues soit à une autre structure (forces de contact), soit à un fluide (pression, pression hydrostatique). En résistance des matériaux, si la surface dS sur laquelle s'exerce l'effort est suffisamment petite devant la surface S de l'enveloppe du corps, on admet que la force est ponctuelle. En mécanique des milieux continus ou élasticité (MMC), ce modèle mathématique n'est pas utilisable. Les efforts volumiques sont des actions à distance, réparties dans le volume de la structure. Il n'y a pas d'agent extérieur qui transmet ces efforts. Les forces d'inertie, les forces centrifuges, les forces thermiques ou les forces électromagnétiques en sont des exemples.

On conçoit bien qu'un corps soumis à l'action d'un ensemble de forces extérieures doit être capable d'« encaisser » les efforts. La contribution à l'effort ne sera pas la même en tout point intérieur au corps : des zones seront plus sollicitées que d'autres, les efforts internes sont variables en direction et en intensité d'un point à un autre. Il est donc très important de décrire précisément la répartition des contributions de la matière. Tous les principes de la mécanique font appel à la notion d'action extérieure. Pour étudier la répartition des efforts et moments en un point M situé à l'intérieur de la matière, que l'on appelle « forces intérieures » par abus de langage, il faut effectuer une **coupe fictive** par un plan contenant ce point. On remplace virtuellement la structure par ses deux parties, notées I et II.

On isole la partie I, la section est définie par un point de passage M , et la normale à la section, dirigée conventionnellement vers l'extérieur de la partie I considérée. On appelle **facette** un élément de surface infinitésimal dS appartenant au plan de coupe. Soit F_1 et F_2 les deux systèmes partiels de forces extérieures respectivement appliqués aux parties I et II. Pour qu'en isolant virtuellement la partie I, elle garde la même position d'équilibre que quand elle est liée à la partie II, il faut lui appliquer les efforts extérieurs F_1 et les actions de la partie II sur la partie I dans la section (Figure 1.1). $\Delta\vec{F}$ est la force qui représente l'action exercée au voisinage du point M par la partie II sur la partie I,

ce voisinage étant la facette dS . On appelle **vecteur contrainte** au voisinage du point M suivant la normale \vec{n} le vecteur défini par :

$$\vec{T}(M, \vec{n}) = \lim_{dS \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{F}}{dS}$$

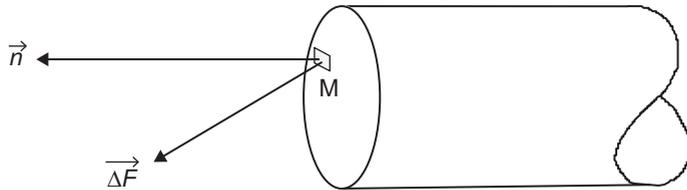


Figure 1.1 – Efforts en M dans la section orientée

Par abus de langage, on parle de **contrainte** au point M. La notion de contrainte et sa formalisation sont dues au mathématicien français Cauchy. Une contrainte est homogène à une pression, qui est une force par unité de surface. Elle s'exprime en pascal dans le système international ($1 \text{ Pa} = 1 \text{ N/m}^2$), mais on utilise souvent en mécanique le mégapascal ($1 \text{ MPa} = 10^6 \text{ N/m}^2 = 1 \text{ N/mm}^2$). Le vecteur contrainte peut être projeté sur la normale et selon deux directions contenues dans le plan de la facette, l'ensemble de ces trois vecteurs formant un repère orthonormé, ou dans tout autre système d'axes. Les composantes du vecteur contrainte \vec{T} dans le repère attaché à la section en M sont définies par les relations suivantes et ont une limite finie lorsque dS tend vers 0 :

$$\frac{\Delta F_n}{dS}, \frac{\Delta F_{t1}}{dS}, \frac{\Delta F_{t2}}{dS}$$

$\lim_{dS \rightarrow 0} \frac{\Delta F_n}{dS}$ est la **contrainte normale**, c'est la composante du vecteur contrainte au point M dans la direction de la normale sortante. On la note généralement σ . C'est une traction si elle est dirigée dans le sens de la normale sortante, auquel cas elle a une valeur positive. C'est une compression si elle est dirigée dans le sens de la normale rentrante, auquel cas elle a une valeur négative.

$\lim_{dS \rightarrow 0} \frac{\Delta F_{t1}}{dS}$ et $\lim_{dS \rightarrow 0} \frac{\Delta F_{t2}}{dS}$ sont les **contraintes tangentielles** ou **contraintes de cisaillement**, notées respectivement σ_{nt1} et σ_{nt2} ou τ_{nt1} et τ_{nt2}

$$\vec{T}(M, \vec{n}) = \sigma \vec{n} + \tau \vec{t} = \sigma \vec{n} + \tau_{nt1} \vec{t}_1 + \tau_{nt2} \vec{t}_2$$

Dans la notation σ_{ij} ou τ_{ij} , le premier indice indique que la normale au point considéré est le vecteur i . Le second indice indique quelle est la composante du vecteur contrainte qui est examinée. On a défini le vecteur contrainte et ses composantes pour la partie I dans la section orientée passant par le point M. Par application du principe d'action/réaction, le vecteur contrainte représentant l'action en M de la partie I sur la partie II est l'opposé de celui représentant l'action de la partie II sur la partie I.

1.2 Matrice des contraintes

$$\vec{T}(M, \vec{n}) + \vec{T}(M, -\vec{n}) = 0 \quad \rightarrow \quad \vec{T}(M, -\vec{n}) = -\vec{T}(M, \vec{n})$$

Mais la normale sortante pour la partie II est l'opposée de la normale sortante pour la partie I, de sorte que les projections de ces vecteurs contraintes opposés sur des directions opposées sont les mêmes. La contrainte en un point de la section caractérise intrinsèquement ce qui s'y passe et ne dépend pas du fait que l'on examine l'action de II sur I ou de I sur II.

1.2 Matrice des contraintes

Il y a en un point d'une structure en équilibre un état de contrainte. Une infinité de facettes passe par ce point donc une infinité de vecteurs à trois composantes caractérise cet état de contrainte. Ces vecteurs contraintes forment le **faisceau des contraintes** en M, l'extrémité du vecteur contrainte en M décrivant dans l'espace une surface quand la normale à la section balaie tout l'espace. La valeur de la contrainte normale et des contraintes tangentielles changent avec l'orientation de la normale sortante, mais l'état de contrainte ne change pas puisque l'on coupe virtuellement en passant par le point. La connaissance au point M d'une matrice 3×3 appelée **matrice des contraintes** est suffisante pour déterminer l'**état de contrainte** en ce point.

Soit trois axes de référence formant un repère orthonormé, par exemple les axes Mx , My et Mz . On suppose connus les vecteurs contraintes en M sur les trois facettes dont les normales sont ces axes. Le tétraèdre de la Figure 1.2 étant en équilibre, la somme des efforts qui y est appliquée est nulle.

$$\vec{T}(M, \vec{n}) \cdot dS + \vec{T}(M, -\vec{x}) \cdot dS_x + \vec{T}(M, -\vec{y}) \cdot dS_y + \vec{T}(M, -\vec{z}) \cdot dS_z = \vec{0}$$

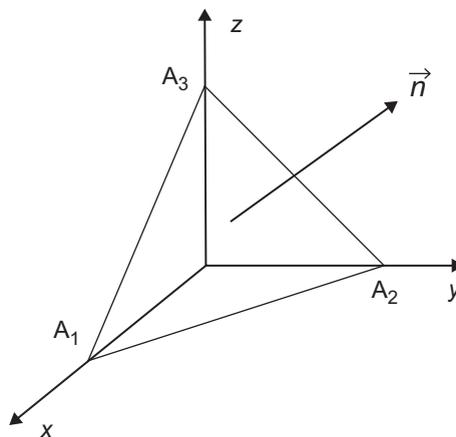


Figure 1.2 – Équilibre du tétraèdre

On projette cette équation vectorielle sur les trois axes de référence, n_x , n_y et n_z étant les trois composantes du vecteur normal exprimé dans ce repère de référence. On obtient :

$$\vec{T}(M, \vec{n}) \cdot dS = \begin{pmatrix} \sigma_{xx} n_x dS + \tau_{yx} n_y dS + \tau_{zx} n_z dS \\ \tau_{xy} n_x dS + \sigma_{yy} n_y dS + \tau_{zy} n_z dS \\ \tau_{xz} n_x dS + \tau_{yz} n_y dS + \sigma_{zz} n_z dS \end{pmatrix}$$

$$\vec{T}(M, \vec{n}) = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \tau_{yx} & \tau_{zx} \\ \tau_{xy} & \sigma_{yy} & \tau_{zy} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_{zz} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} n_x \\ n_y \\ n_z \end{pmatrix} = [\sigma] \vec{n}$$

La matrice $[\sigma]$ est la matrice des contraintes au point M exprimée dans le repère de référence. Elle est définie par neuf termes qui sont les trois composantes des trois vecteurs contraintes dans un repère orthonormé direct arbitraire de référence. Donc, si on connaît les vecteurs contraintes sur trois facettes deux à deux perpendiculaires formant le repère de référence, on peut calculer le vecteur contrainte sur une facette d'orientation quelconque, il suffit de connaître les composantes du vecteur normal dans ce repère de référence. Les composantes normales et tangentielles du vecteur contrainte sont les composantes de ce vecteur dans le repère lié à la facette (Figure 1.3). La matrice des contraintes est représentative d'un tenseur du second ordre appelé **tenseur des contraintes**.

1.3 Équations d'équilibre

On isole autour du point M un volume élémentaire de côtés dx et dy , d'épaisseur uniforme dz , et on s'intéresse aux contraintes tangentielles agissant dans le plan xy (Figure 1.4). Le volume élémentaire étant arbitraire et infinitésimal, il est toujours possible de choisir des dimensions arbitraires telles que les contraintes évoluent peu entre deux faces parallèles, auquel cas un développement limité au premier ordre s'avère suffisant pour donner l'évolution des contraintes. Les forces de volume éventuelles ont une résultante qui passe par le centre de gravité du volume, à savoir le point M, leur moment par rapport au point M est nul. On suppose, au vu des dimensions arbitraires des côtés du volume, qu'il en est de même pour les contraintes normales : elles n'engendrent aucun moment.

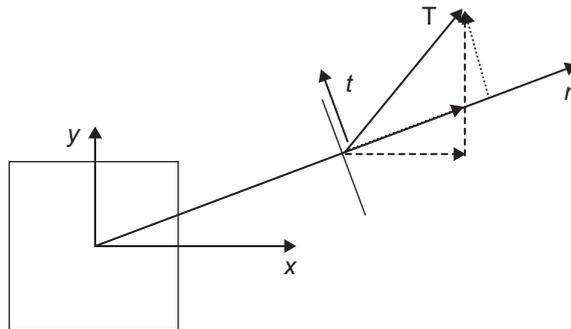


Figure 1.3 – Décomposition du vecteur contrainte dans le repère lié à la facette ou dans le repère de référence

1.3 Équations d'équilibre

Pour les contraintes tangentielles, la convention est que, ayant choisi une facette de référence, le cisaillement y est compté positif dans le sens trigonométrique ; sur la facette suivante, le cisaillement est compté positif dans le sens opposé.

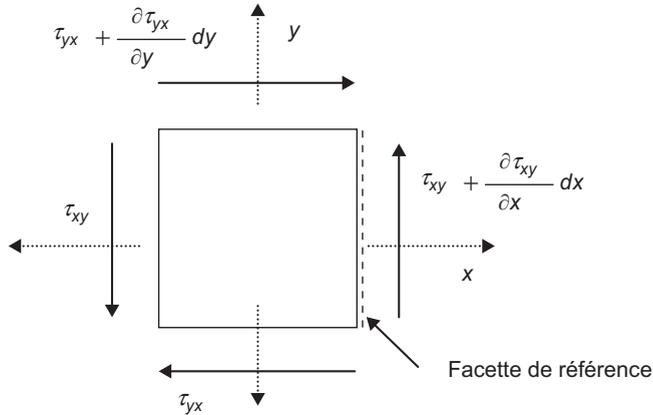


Figure 1.4 – Équilibre en rotation (contraintes de cisaillement)

Lorsqu'un effort fait basculer la structure de x vers y dans le sens trigonométrique, le moment associé est compté positivement. Il est négatif dans le cas contraire. Du fait de l'équilibre en rotation, la somme des quatre moments dus aux contraintes tangentielles appliquées sur le volume élémentaire autour de l'axe Oz est nulle :

$$\tau_{xy} dy dz \frac{dx}{2} - \tau_{yx} dx dz \frac{dy}{2} + \left(\tau_{xy} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} dx \right) dy dz \frac{dx}{2} - \left(\tau_{yx} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} dy \right) dx dz \frac{dy}{2} = 0$$

L'équation ci-dessus est vraie quel que soit l'élément de volume. Les longueurs dx et dy étant arbitraires et infinitésimales, il est légitime de supposer que les variations des contraintes sur dx et dy sont négligeables par rapport aux contraintes elles-mêmes. Il reste après simplification l'égalité entre les deux contraintes de cisaillement agissant sur deux facettes perpendiculaires :

$$\tau_{xy} = \tau_{yx}$$

Par un raisonnement similaire sur les autres faces du volume élémentaire, on montre que le tenseur des contraintes est symétrique. Ceci implique qu'avec la convention de signe utilisée, les contraintes de cisaillement agissant sur deux faces adjacentes sont toutes les deux orientées vers l'arête commune ou en sens inverse. La matrice des contraintes est symétrique, entièrement déterminée par la connaissance de six de ses neuf termes : les trois contraintes normales et trois des six contraintes de cisaillement.

$$\sigma_{ij} = \sigma_{ji} \quad \text{ou} \quad \tau_{ij} = \tau_{ji}$$

Soit maintenant un petit volume élémentaire autour de M, en équilibre dans la structure soumise à des forces de volume de densité F_x , F_y et F_z . Sur chaque facette du volume s'exercent une contrainte normale et deux contraintes tangentielles. On écrit l'équilibre en translation sur x de ce volume. Si la contrainte a pour valeur σ_{xx} sur la face 1, la force qui s'y exerce est $-\sigma_{xx} dydz$ car la normale sortante de la face 1 est dirigée selon les x négatifs. La contrainte est susceptible de varier d'une face à celle qui lui est parallèle. Mais les dimensions de l'élément de volume sont infinitésimales de sorte qu'il est possible de supposer qu'un développement au premier ordre traduit cette évolution. En respectant ces conventions, on représente sur la Figure 1.5 les forces appliquées sur les 6 facettes selon l'axe x . À l'équilibre, la somme de toutes les forces est nulle dans chaque direction et après simplification, il reste :

$$F_x dx dy dz + \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} dx dy dz + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} dz dx dy + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} dy dx dz = 0$$

$$\Rightarrow \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} + F_x = 0$$

Par un raisonnement analogue, on obtient des formules équivalentes à la précédente en permutant les indices, qui se regroupent en une seule en adoptant les conventions classiques pour les indices muets et les dérivées partielles :

$$\sigma_{ij,i} + F_j = 0$$

Cette équation doit être vérifiée en tout point du solide et est considérée comme l'équation de base de la mécanique des milieux continus. On peut aussi partir de l'équation vectorielle globale, en appelant V le domaine et S sa frontière :

$$\iint_S \vec{T} dS + \iiint_V \vec{F} dv = \vec{0}$$

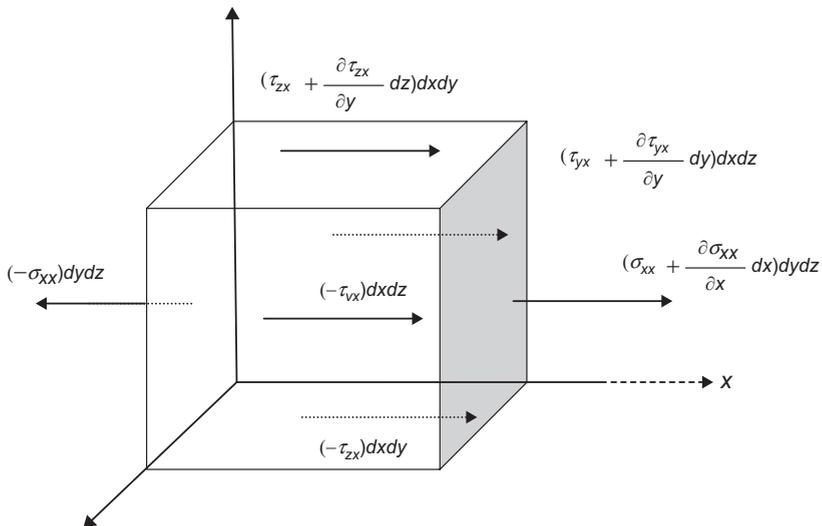


Figure 1.5 – Équilibre en translation selon l'axe x

1.3 Équations d'équilibre

Le premier terme représente l'action de toutes les forces de surface, le second l'action de toutes les forces de volume. En utilisant le théorème de la divergence et le fait que cette relation soit vraie quel que soit le volume choisi, on écrit :

$$\overline{\text{div}}\sigma + \overline{F} = \overline{0}$$

Cette écriture vectorielle est encore plus compacte que la précédente.

Les plans de coupe utilisés jusqu'à présent étaient des plans parallèles aux plans de coordonnées xOy , xOz et yOz . Quand, dans un plan de coupe d'orientation donnée, on fait une rotation d'angle θ autour de l'axe normal à ce plan de coupe, les nouvelles composantes du vecteur contrainte sont reliées aux anciennes par des relations faisant intervenir l'angle. En supposant par exemple que le plan de coupe soit xOy , donc de normale Oz , les relations entre composantes sont :

$$\left\{ \begin{array}{l} \sigma'_{xx} = \frac{\sigma_{xx} + \sigma_{yy}}{2} + \frac{\sigma_{xx} - \sigma_{yy}}{2} \cos(2\theta) + \tau_{xy} \sin(2\theta) \\ \sigma'_{yy} = \frac{\sigma_{xx} + \sigma_{yy}}{2} - \frac{\sigma_{xx} - \sigma_{yy}}{2} \cos(2\theta) + \tau_{xy} \sin(2\theta) \\ \tau'_{xy} = -\frac{\sigma_{xx} - \sigma_{yy}}{2} \sin(2\theta) + \tau_{xy} \cos(2\theta) \end{array} \right.$$

Les composantes du vecteur contrainte en un point pour diverses orientations des facettes sont représentées sur la Figure 1.6. Dans le premier cas (a), on a sur chaque facette une contrainte normale et la contrainte de cisaillement. En changeant d'orientation (b), on a généralement une contrainte normale et une contrainte de cisaillement dont les valeurs ont changé du fait de la rotation. Il existe dans le plan deux orientations particulières notées ici α_1 et $(\alpha_1 + \pi/2)$, orthogonales entre elles, pour lesquelles le cisaillement est nul, solutions de l'équation ci-dessous. Les contraintes normales sont alors maximale et minimale (c) :

$$\tan(2\alpha) = \frac{2\tau_{xy}}{\sigma_{xx} - \sigma_{yy}}$$

Ces deux orientations forment le **repère principal pour les contraintes**. Elles y sont notées traditionnellement σ_I et σ_{II} et sont appelées **contraintes principales**. Il existe dans le plan deux autres orientations particulières, à ± 45 degrés des précédentes, pour lesquelles la contrainte de cisaillement est extrême, les contraintes normales étant alors égales (d).

Les **contraintes principales** sont les valeurs propres de la matrice des contraintes et donc les trois racines du polynôme caractéristique associé au tenseur des contraintes. Les **directions principales** sont les vecteurs propres associés. La matrice des contraintes

étant symétrique à coefficients réels, il existe toujours 3 valeurs propres réelles éventuellement confondues et les 3 directions principales sont 2 à 2 orthogonales. Par convention, les contraintes principales sont rangées dans l'ordre décroissant de leur valeur algébrique, ce qui n'implique pas obligatoirement l'ordre décroissant de leur valeur absolue :

$$\sigma_I \geq \sigma_{II} \geq \sigma_{III}$$

Dans le repère principal des contraintes, la matrice principale est diagonale et s'écrit :

$$[\sigma_{ij}] = \begin{bmatrix} \sigma_I & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_{II} & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{III} \end{bmatrix}$$

Les trois invariants de base du tenseur des contraintes sont :

$$\left\{ \begin{array}{l} I_1 = \text{Tr}([\sigma]) = \sum \sigma_{ii} = \sigma_I + \sigma_{II} + \sigma_{III} \\ I_2 = \frac{1}{2} \sum (\sigma_{ii} \sigma_{jj} - \tau_{ij}^2) = \sigma_I \sigma_{II} + \sigma_{II} \sigma_{III} + \sigma_{III} \sigma_I \\ I_3 = \det([\sigma]) = \prod \sigma_{ii} = \sigma_I \sigma_{II} \sigma_{III} \end{array} \right.$$

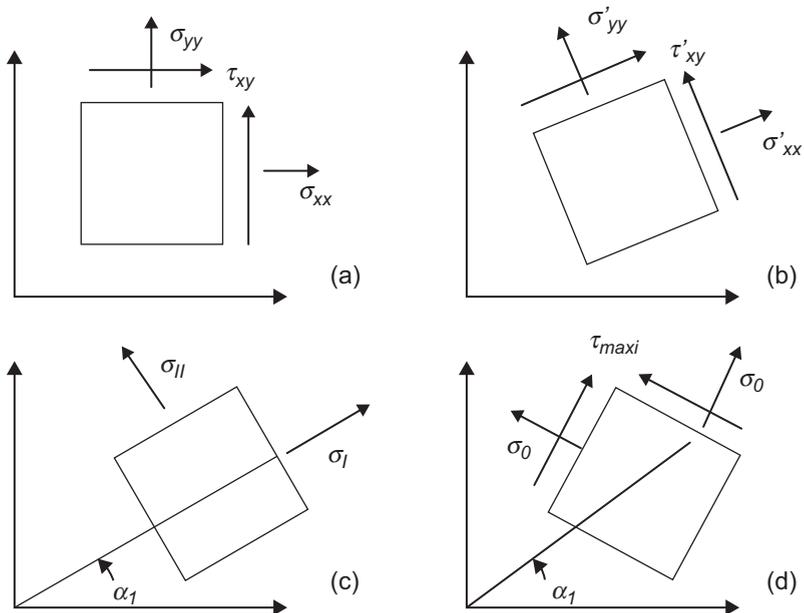


Figure 1.6 – Contraintes en un point pour différentes orientations de la normale

1.4 Tenseur des déformations

Beaucoup d'autres invariants peuvent être obtenus par combinaison de ces trois invariants qui peuvent être écrits en fonction des composantes du tenseur ou des composantes principales. La **contrainte hydrostatique** et le **tenseur sphérique** dit aussi **tenseur isotrope** sont définis par la relation suivante :

$$[\sigma_0] = \begin{bmatrix} \sigma_0 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_0 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_0 \end{bmatrix} \text{ avec } \sigma_0 = \frac{1}{3} \text{Tr}([\sigma]) = \frac{I_1}{3}$$

Il n'y a pas besoin d'avoir une charge de pression hydrostatique pour avoir une contrainte hydrostatique : c'est le nom qui est donné au tiers de la trace de la matrice des contraintes. On peut toujours décomposer le tenseur des contraintes en deux : la partie sphérique et la **partie déviatorique** définie par :

$$[s_{ij}] = [\sigma_{ij}] - [\sigma_0] = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} - \sigma_0 & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{xy} & \sigma_{yy} - \sigma_0 & \tau_{yz} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_{zz} - \sigma_0 \end{bmatrix}$$

Ce déviateur est lui aussi diagonalisable, a trois valeurs propres et trois vecteurs propres colinéaires aux vecteurs propres du tenseur des contraintes lui-même. Son premier invariant est nul, le deuxième joue un rôle très important en mécanique, il est à la base du critère de Von Mises et a pour expression :

$$J_2 = \frac{1}{6} [(\sigma_I - \sigma_{II})^2 + (\sigma_{II} - \sigma_{III})^2 + (\sigma_{III} - \sigma_I)^2]$$

1.4 Tenseur des déformations

Si l'on fait l'hypothèse de linéarité géométrique, c'est-à-dire de petites rotations et de petites déformations, on définit les **déformations** ε_{ij} par la formule classique de la mécanique linéaire, u_k étant le déplacement dans la direction k :

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right)$$

En mécanique linéaire, ε_{ii} est la **déformation axiale** : elle mesure la variation relative de distance dans la direction de l'axe i , entre deux points très proches avant déformation. ε_{ii} est comptée positivement lorsqu'il y a allongement (ou étirement) et négativement dans le cas contraire. Les déformations sont symétriques du fait de la commutativité de l'addition des nombres réels.

$$\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ji}$$

En mécanique linéaire, la quantité $\gamma_{ij} = 2\varepsilon_{ij}$ est la **distorsion angulaire**. Elle représente la variation d'angle entre les directions i et j initialement orthogonales. C'est le double de la **déformation angulaire** ε_{ij} . Les déformations dépendent des dérivées des déplacements et non pas des déplacements eux-mêmes. Les déformations sont adimensionnelles, souvent exprimées en pourcents. On définit le tenseur des déformations en un point, la valeur de ses composantes dépendant du choix du repère dans lequel il est exprimé. Ce tenseur peut toujours être diagonalisé.

$$[\varepsilon] = \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} & \varepsilon_{xy} & \varepsilon_{xz} \\ \varepsilon_{xy} & \varepsilon_{yy} & \varepsilon_{yz} \\ \varepsilon_{xz} & \varepsilon_{yz} & \varepsilon_{zz} \end{bmatrix}_{x,y,z} \quad [\varepsilon] = \begin{bmatrix} \varepsilon_I & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_{II} & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_{III} \end{bmatrix}_{\text{repère principal}}$$

1.5 Relations Contraintes-Déformations

On ne considère ici que les **matériaux homogènes** : les caractéristiques du matériau ne dépendent pas du point étudié. On se limite également au **domaine élastique linéaire**, les contraintes varient proportionnellement à la déformation. Les déformations doivent être suffisamment petites de manière à rester dans la partie linéaire de la loi constitutive et présenter le même comportement en traction et en compression. La loi reliant les déplacements aux déformations est également linéaire : on se place donc dans le cadre de la mécanique linéaire. Le tenseur des contraintes, symétrique, est entièrement déterminé en tout point par la connaissance de six composantes sur les neuf, que l'on place dans une colonne, les composantes étant conventionnellement rangées dans un ordre particulier :

$$\{\sigma\}^T = \left(\sigma_{xx} \quad \sigma_{yy} \quad \sigma_{zz} \quad \tau_{yz} \quad \tau_{zx} \quad \tau_{xy} \right)$$

Le tenseur des déformations est lui aussi entièrement déterminé en tout point par la connaissance de six composantes sur les neuf, que l'on classe dans une colonne, et dans le même ordre que les contraintes.

$$\{\varepsilon\}^T = \left(\varepsilon_{xx} \quad \varepsilon_{yy} \quad \varepsilon_{zz} \quad \varepsilon_{yz} \quad \varepsilon_{zx} \quad \varepsilon_{xy} \right)$$

La relation qui relie ces deux « vecteurs » se note sous la forme d'une matrice carrée de dimension 6 : c'est la **matrice de Hooke** dite aussi **loi constitutive**.

$$\{\sigma\} = H\{\varepsilon\}$$

Cette matrice 6×6 n'est pas symétrique à moins de l'exprimer en utilisant les distorsions angulaires γ_{ij} au lieu des déformations angulaires ε_{ij} . Pour un **matériau isotrope**, c'est-à-dire un matériau pour lequel les caractéristiques mécaniques sont les mêmes

1.5 Relations Contraintes-Déformations

dans toutes les directions de l'espace, deux coefficients élastiques sont suffisants pour la relation précédente. E est le **module de Young**, encore appelé **module d'élasticité**, ν est le **coefficient de Poisson**. Le coefficient qui relie les contraintes tangentielles aux déformations angulaires est le **module d'élasticité en cisaillement** ou le **module de glissement** ou le **module de Coulomb**, noté G .

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)}$$

$$\begin{pmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{zz} \\ \tau_{yz} \\ \tau_{xz} \\ \tau_{xy} \end{pmatrix} = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} 1-\nu & \nu & \nu & 0 & 0 & 0 \\ \nu & 1-\nu & \nu & 0 & 0 & 0 \\ \nu & \nu & 1-\nu & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \epsilon_{xx} \\ \epsilon_{yy} \\ \epsilon_{zz} \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{xz} \\ \gamma_{xy} \end{pmatrix}$$

Sous l'action de contraintes normales, il ne se produit aucune déformation en cisaillement, donc pas de changement de forme. Sous l'action de contraintes tangentielles, il ne se produit aucune déformation axiale, donc pas de changement de dimension. Quand on exerce une contrainte normale, les dimensions changent selon les trois axes, quand on exerce une contrainte de cisaillement, la variation de forme ne se produit que dans le plan du cisaillement. Le module de Young et le module de glissement sont homogènes à des contraintes et s'expriment en N/m^2 dans le système international, le **coefficient de Poisson** est adimensionnel. Il relie la déformation obtenue dans la direction j quand on impose une déformation dans la direction i , il traduit le couplage entre les différentes directions de l'espace :

$$\nu_{ij} = -\frac{\epsilon_{jj}}{\epsilon_{ii}}$$

Un matériau isotrope est caractérisé par un coefficient de Poisson dont la valeur est de l'ordre de 0,3 pour la plupart des matériaux métalliques utilisés en construction. Pour certains matériaux, il n'y a pas de couplage, le coefficient de Poisson est pratiquement nul (liège, pierres précieuses). Pour d'autres, le couplage est total (**matériaux incompressibles**) : quand on exerce une traction uniaxiale sur une éprouvette, son volume ne change pas en première approximation, le coefficient de Poisson est alors égal à $\frac{1}{2}$ (caoutchouc, silicone). La formule ci-dessous donne la variation relative de volume lorsqu'une déformation axiale ϵ est imposée dans une direction.

$$\frac{V-V_0}{V_0} = \epsilon(1-2\nu)$$

1.6 Limite élastique, contrainte équivalente

1.6.1 Limite élastique

Quand on réalise un essai de traction uniaxiale qui est l'essai mécanique le plus simple à mettre en place (Figure 1.7), et qu'on passe des grandeurs Force-Allongement à la courbe Contrainte-Déformation, pour les matériaux dont le comportement est élasto-plastique, il est aisé de déterminer la **limite élastique**. C'est la valeur de la contrainte associée à une déformation permanente de 0,2 %. Si une contrainte calculée est inférieure à cette limite, le matériau est encore dans son domaine linéaire. Si une contrainte calculée est supérieure à cette limite, le matériau est dans son domaine plastique.

L'état de contrainte en un point est généralement tri-axial, caractérisé par les trois contraintes principales en ce point σ_I , σ_{II} et σ_{III} . La question est donc de prévoir le comportement de la structure pour un état de contrainte qui n'est pas uniaxial. Expérimentalement, on réalise des essais mono-, bi- ou tri-axiaux et pour chaque état de contrainte, on regarde pour l'échantillon sollicité si l'on est ou non dans le domaine élastique. Par exemple, se fixant les deux premières contraintes principales, on cherche la limite que peut atteindre la troisième. En représentant l'ensemble des points limites dans un espace tridimensionnel où les axes sont les trois directions principales des contraintes, on construit une surface dans l'espace, appelée **surface de plasticité**.

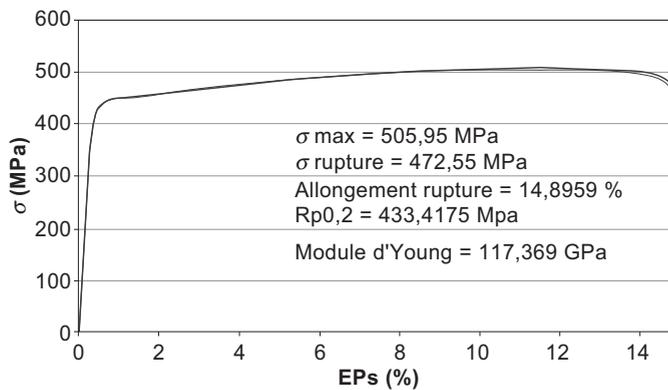


Figure 1.7 – Exemple de courbe de traction pour un matériau ductile

Un **critère de plasticité** est une relation entre les composantes du tenseur des contraintes en un point qui permet de ramener l'état de contrainte défini par une matrice des contraintes en un scalaire. Le scalaire obtenu par utilisation du critère est la **contrainte équivalente** qui reflète l'état de contrainte en un point, indépendamment du type de sollicitation que subit la structure. L'intérêt de cette contrainte équivalente est qu'il est très facile de la comparer à la limite élastique du matériau pour savoir si on est entré ou non dans le domaine plastique. Dans le cas d'un état de contrainte uniaxial,

1.6 Limite élastique, contrainte équivalente

la contrainte équivalente doit être égale à la seule composante non nulle du tenseur, ou à sa valeur absolue si cette composante est négative, ce qui est le cas pour un essai de compression.

Il existe de nombreux critères, et pour chaque matériau, après essais, on détermine quel est le critère qui se rapproche le plus des observations réalisées. En mécanique des structures, pour les matériaux isotropes traditionnels, les deux critères les plus utilisés sont ceux de Tresca et de Von Mises.

1.6.2 Critères mono-axiaux

Les critères mono-axiaux en contrainte ou en déformation ne sont en général plus ou très peu utilisés pour les matériaux métalliques, alors qu'ils le sont encore pour les matériaux composites. Une structure peut être dans le domaine linéaire pour une charge uniaxiale qui engendre la contrainte σ_1 selon un axe, pour une charge uniaxiale indépendante qui engendre la contrainte σ_2 selon un axe perpendiculaire au premier, mais sortir du domaine linéaire lorsque les deux charges sont appliquées simultanément.

1.6.3 Critères multi-axiaux

Le **critère de Tresca** définit la **contrainte équivalente au sens de Tresca**. Selon l'hypothèse de Tresca, l'écoulement de la matière se produit lorsque la contrainte de cisaillement dépasse la limite élastique notée σ_e . σ_I et σ_{III} étant la plus grande et la plus petite des contraintes principales, le comportement est élastique si :

$$\sigma_{eqT} = \sigma_I - \sigma_{III} \leq \sigma_e$$

La Figure 1.8 donne une représentation du critère de Tresca en état plan de contrainte. La limite du domaine élastique est atteinte lorsqu'on arrive sur la frontière de l'hexagone de Tresca. Dans l'espace des contraintes principales, la surface de plasticité définie par le critère de Tresca est un cylindre droit dont la section est un hexagone régulier, et dont l'axe a pour équation :

$$\sigma_I = \sigma_{II} = \sigma_{III}$$

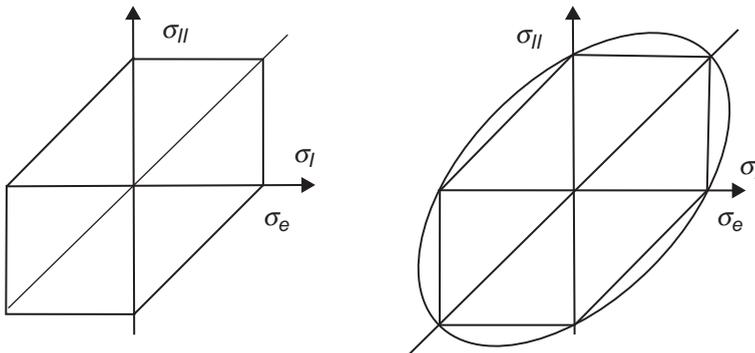


Figure 1.8 – Une représentation du critère de Tresca et du critère de Von Mises

Le **critère de Von Mises** repose sur l'hypothèse que l'écoulement de la matière se produit lorsque l'énergie de distorsion atteint une valeur critique : un volume donné de matériau ne peut absorber qu'une quantité limitée d'énergie élastique. Explicité dans le repère principal des contraintes, la **contrainte équivalente au sens de Von Mises** s'écrit :

$$\sigma_{eqVM} = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{(\sigma_I - \sigma_{II})^2 + (\sigma_{II} - \sigma_{III})^2 + (\sigma_{III} - \sigma_I)^2}$$

Le comportement est élastique si la contrainte équivalente est inférieure à la limite élastique du matériau. C'est le critère le plus utilisé dans le monde industriel pour les structures en matériaux métalliques. Une représentation graphique de ce critère pour l'état plan de contrainte est une ellipse qui englobe le critère de Tresca (Figure 1.8). L'écart maximal entre ces deux critères est d'environ 15 % pour un cisaillement pur. Dans l'espace des contraintes principales, la surface de plasticité définie par le critère de Von Mises est un cylindre droit dont la section est un disque, et dont l'axe a pour équation :

$$\sigma_I = \sigma_{II} = \sigma_{III}$$

On ne choisit pas un critère : après essais mécaniques, on détermine quel est le critère qui représente le mieux la surface de plasticité du matériau. Le critère de plasticité est donc une donnée du matériau pour les calculs. Une contrainte équivalente en un point est la représentation scalaire du tenseur des contraintes en ce point, selon le critère choisi. Une contrainte équivalente est une quantité positive ou nulle, qui ne permet donc pas de savoir si l'état de contrainte est uni, bi- ou tri-axial, si le voisinage du point est soumis à de la traction ou à de la compression. Pour comprendre la circulation des efforts dans la structure, et distinguer les zones en traction des zones en compression, il faut analyser les contraintes principales et non les contraintes équivalentes.