Benoît Clément

# Mécanique quantique relativiste

## Diffusion et diagrammes de Feynman

DUNOD

11, rue Paul Bert, 92240 Malakoff
www.dunod.com
ISBN 978-2-10-084649-8

# Table des matières


**Avant-propos** VII

**Dimensions et unités** IX

**Chapitre 1 Relativité restreinte et cinématique** 1

1. Transformation de Lorentz et principe de relativité 1
2. Composition des vitesses 4
3. Quadrivecteurs 5
4. Cinématique 9

L'essentiel 13

**Chapitre 2 Équations relativistes** 15

1. Mécanique quantique non relativiste 15
2. Champ scalaire 17
3. Champ spinoriel 20
4. Champ vectoriel 30
5. Couplage aux champs fermioniques 35

L'essentiel 37

**Chapitre 3 Diffusion et propagateurs** 39

1. Processus de diffusion 39
2. Propagateur non relativiste 40
3. Propagateurs relativistes 50
4. Matrice de diffusion 57
5. Règles et diagrammes de Feynman 67

L'essentiel 72

**Chapitre 4 Calcul de sections efficaces** 73

1. Observables 73
2. Espace de phase 78
3. Calcul de $|\mathcal{M}_{fi}|^2$ 85

L'essentiel 88

**Chapitre 5 Théories de jauge et modèle standard** 89

1. Physique des particules et interactions fondamentales 89
2. Théorie de Yang-Mills 91
3. Interaction forte 94

**4.** Interaction faible 96
L'essentiel 105

**Chapitre 6 Exercices : calculs de processus** 107

**1.** Effet Compton 108
**2.** Effet Compton en QCD 115
**3.** Création de paires de muons 118
**4.** Création de paires de muons massifs 121
**5.** Production du boson de Higgs dans un collisionneur leptonique 123
**6.** Désintégration du boson de Higgs en deux fermions 127
**7.** Désintégration du boson de Higgs en deux bosons $W$ 129
**8.** Largeur de désintégration du quark top 131
**9.** Désintégration du muon 134
**10.** Largeur de désintégration des bosons électrofaibles 139
**11.** Production associée d'un boson de Higgs chargé et d'un quark top 141

**Annexes** 145

**Annexe A Groupes de Lie** 147

**1.** Groupes et représentations 147
**2.** Groupes unitaires 149

**Annexe B Formulaire pour le calcul de section efficace** 151

**1.** Méthode générale du calcul d'observable 151
**2.** Relations de fermetures 152
**3.** Calcul du carré de l'amplitude de Feynman 152
**4.** Largeur et section efficace 152

**Annexe C Règles de Feynman du modèle standard** 154

**1.** Règles pour les lignes externes 154
**2.** Règles pour les propagateurs 155
**3.** Règles pour les vertex 155

**Annexe D Matrices de Dirac** 159

**1.** Propriétés de base 159
**2.** Matrice $\gamma^5$ 160

**3.** Contractions de matrices 160
**4.** Traces de matrices 161
**Bibliographie sélective** 163
**Index** 165

# Avant-propos

Le point de départ de cet ouvrage est un résultat expérimental qui peut être observé en salle de travaux pratique de physique nucléaire. Les photons gamma issus d'une source mono-énergétique d'énergie $\omega$ (de l'ordre de quelques centaines de $keV$) sont détectés via leur interaction par diffusion élastique ou effet Compton dans un détecteur. Plus exactement on mesure l'énergie déposée par le photon dans le détecteur. On observe un continuum de valeurs allant de zéro à une valeur seuil inférieure à l'énergie des photons incidents. Cela indique d'une part que tous les photons ne déposent pas la même quantité d'énergie, et d'autre part, que le photon n'est pas absorbé lors du processus mais repart avec une énergie moindre. La conservation de l'énergie et de l'impulsion totale impose que cette diffusion est caractérisée par un unique paramètre, l'angle de diffusion $\theta$ tel que défini sur la figure A.

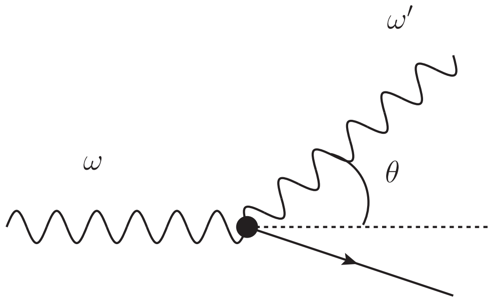


**Figure A** – Diffusion Compton dans le référentiel du laboratoire : un photon d'énergie $\omega$ cède une partie de son énergie à un électron initialement au repos et repart avec une énergie $\omega'$ dans une nouvelle direction faisant une angle $\theta$ avec la direction d'incidence.

Tous les angles de diffusion sont possibles et sont effectivement observés. On constate cependant que ni toutes les directions ni toutes les énergies sont équiprobables, pas plus que n'importe quelle quantité simple. De fait le nombre de photons diffusé dans une certaine direction $\cos\theta = c$ est donné par la loi de probabilité suivante :

$$f(c) \propto \xi(c)^2 \left(\xi(c) + \frac{1}{\xi(c)} - 1 + c^2\right), \xi = \frac{1}{1 + \frac{\omega}{m}(1-c)}, \tag{1}$$

qui est proportionnelle à la section efficace de diffusion. Comment peut-on dériver cette formule à partir des principes de bases de la physique ?

Le phénomène est quantique : chaque photon est diffusé dans une direction différente avec une certaine probabilité. Le phénomène est relativiste car il implique des photons (particules de masse nulle) d'énergie comparable à l'énergie de masse des électrons ($m_e \approx 511$ keV). Pour répondre à cette question, il faut construire un cadre théorique qui contient à la fois la mécanique quantique et la relativité restreinte, soit une mécanique quantique relativiste. Dans ce cadre, il faudra décrire l'interaction entre une particule chargée (l'électron) et le champ électromagnétique pour obtenir ainsi une théorie de l'électrodynamique quantique (QED). Enfin il faudra construire plus spécifiquement dans ce formalisme un modèle de la diffusion entre deux particules, ce qui nous conduira au calcul de sections efficaces dans le formalisme des diagrammes de Feynman.

En partant de principes de bases de la relativité et de la mécanique quantique, nous allons monter étapes par étapes cette structure. Une fois ce formalisme construit, nous l'appliquerons au calcul de la diffusion Compton pour démontrer la formule 1. Mais nous verrons également que ces méthodes s'appliquent à de nombreux autres processus tant électromagnétiques qu'impliquant les interactions nucléaires faible et forte.

Avertissement au lecteur : construite naïvement, la mécanique quantique relativiste est fondamentalement une théorie défectueuse. Les outils développés dans les années 1940 et 1950 permettent de contourner certaines de ces limitations pour aboutir à un ensemble des résultats corrects sous certaines hypothèses. Ces mêmes résultats se dérivent de manière plus rigoureuse dans le contexte de la théorie quantique des champs qui est la vraie mécanique quantique relativiste moderne. La théorie présentée dans cet ouvrage n'en est pas moins d'un grand intérêt. D'une part, cette théorie contient également beaucoup d'élément parfaitement valides qui réapparaissent de manière identique en théorie quantique des champs. D'autre part, c'est une théorie prédictive qui permet de faire des calculs que l'on peut confronter aux résultats expérimentaux, avec dans certains cas une très grande précision. Cet ouvrage constitue donc une première étape indispensable (et parfois suffisante) pour une étude approfondie de la physique des particules et du modèle standard.

# Dimensions et unités

La mécanique quantique et la relativité restreinte font chacune intervenir une constante fondamentale qui intervient dans la plupart des équations : la constante de Planck $\hbar$ et la célérité de la lumière $c$. Dans les unités du système international :

$$\hbar = \frac{h}{2\pi} = 1,05457148 \times 10^{-34} \text{ J.s et } c = 2,99792458 \times 10^{8} \text{ m.s}^{-1}.$$

Ces constantes relient entre elles des grandeurs ayant des dimensions différentes : temps, espace, énergie et quantité de mouvement. La relativité montre que temps et espace ont la même dimension ; la mécanique quantique conduit à la même conclusion pour l'énergie et la fréquence (inverse d'un temps). Du point de vue dimensionnel $T = L = E^{-1}$ et toute grandeur physique est homogène à une puissance de l'énergie. Les constantes $\hbar$ et $c$ n'ont pas de raison d'être. Ce ne sont que des facteurs de conversion dont dimension et valeur ne résultent que d'un choix peu judicieux, du point de vue de la physique fondamentale, d'un système d'unité. Le système d'unités naturelles est celui où ces deux constantes valent 1 et n'ont pas de dimension. Dans ce système d'unités les équations sont simplifiées puisque les facteurs $c$ ou $\hbar$ disparaissent. À partir d'une analyse dimensionnelle on montre que :

$$[\hbar] = E.T = 1 \Rightarrow T = E^{-1},$$
$$[c] = LT^{-1} \Rightarrow L = T.$$

Le temps et l'espace ont la même dimension, ce qui semble naturel puisque la relativité va traiter le temps comme une quatrième coordonnée. De plus, toutes les dimensions s'expriment en unités naturelles comme des puissances de l'énergie. Ainsi temps et espace ont la dimension inverse de l'énergie. À partir des valeurs de $\hbar$ et $c$ dans les deux systèmes d'unités, on détermine les facteurs de conversion pour le mètre et la seconde :

$$1 \text{ m} = 5,07 \times 10^{6} \text{ eV}^{-1} \text{ et } 1 \text{ s} = 1,52 \times 10^{15} \text{ eV}^{-1}.$$

Une autre grandeur utile pour les conversions entre systèmes d'unités est $\hbar c \approx$ 197 MeV.fm.

Dans cet ouvrage, ces constantes seront maintenues dans les introductions à la relativité (chapitre 1) et à la mécanique quantique (chapitre 2). Par la suite ces constantes disparaîtront pour ne réapparaître qu'à la toute fin dans les applications numériques.

Chapitre 1

# Relativité restreinte et cinématique

## Introduction

Avant de pouvoir prétendre construire une théorie quantique relativiste, il est nécessaire de poser les bases de ces deux cadres de la physique théorique. Ce chapitre se focalisera sur la relativité restreinte et servira, entre autre, à introduire une grande part du formalisme quadrivectoriel qui sera utilisé tout au long de l'ouvrage. En utilisant la conservation de la quadri-impulsion, il sera appliqué aux calculs de cinématique relativiste. Les aspects propres à la mécanique quantique non relativiste seront abordés aux débuts des chapitres suivants pour mettre en perspective les différences entre les cas relativistes et non relativistes.

## Objectifs

- **Connaître** le principe de relativité et l'invariance de Lorentz.
- **Définir** la notation covariante.
- **Expliquer** la manipulation des quadrivecteurs dans les calculs de cinématique.
- **Introduire** la théorie classique des champs.

## Plan


1. Transformation de Lorentz et principe de relativité
2. Composition des vitesses
3. Quadrivecteurs
4. Cinématique


## 1 Transformation de Lorentz et principe de relativité

Un événement se réalise en un point de l'espace $\vec{x} = (x, y, z)$ et à un instant $t$ donnés. Le principe de relativité, énoncé à l'origine par Galilée, affirme que les lois de la physique sont les mêmes dans tous les référentiels inertiels, c'est-à-dire qu'il est impossible de distinguer deux référentiels en translation rectiligne uniforme l'un par rapport à l'autre.

Soit un référentiel $\mathcal{R}$ et un second référentiel $\mathcal{R}'$ en translation à la vitesse $\vec{V}_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}} = V\vec{u}_x$, comme illustré sur la figure 1.1. Cette expression de la vitesse indique simplement que l'on a choisi un système d'axes tel que $\vec{u}_x$ soit aligné avec la vitesse de déplacement.

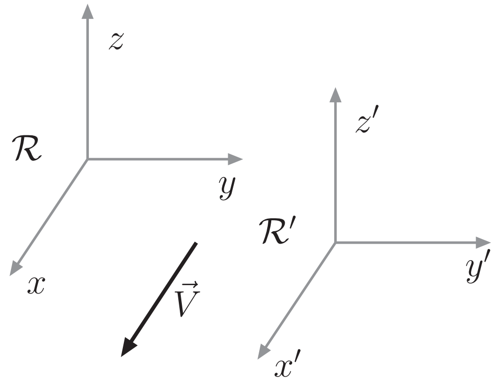


**Figure 1.1** – Deux référentiels inertiels en translation rectiligne uniforme l'un par rapport à l'autre.

Ainsi les coordonnées $y$ et $z$ ne sont pas modifiées dans un changement de référentiel entre $\mathcal{R}$ et $\mathcal{R}'$. Afin de déterminer le relation entre les coordonnées dans $\mathcal{R}$ et $\mathcal{R}'$, commençons par étudier la transformation linéaire des coordonnées la plus générale :

$$\begin{aligned} t' &= \lambda(v)t + \mu(v)x \\ x' &= \xi(v)t + \gamma(v)x. \end{aligned} \tag{1.1}$$

Par définition, le centre $(x', y') = (0, 0)$ de $\mathcal{R}'$ se déplace à la vitesse $V$ dans le référentiel $\mathcal{R}$ et le centre $(x, y) = (0, 0)$ de $\mathcal{R}$ se déplace à la vitesse $-V$ dans $\mathcal{R}'$, soit :

$$x = Vt, x' = 0 \Rightarrow \xi + \gamma V = 0, \tag{1.2}$$

$$x = 0, x' = -Vt' \Rightarrow \lambda = \gamma. \tag{1.3}$$

On peut alors considérer deux hypothèses :

- Le temps est absolu, c'est-à-dire que $t = t'$. On a alors $\lambda = 1$, $\mu = 0$ et la transformation des coordonnées est la transformation de Galilée :

$$T_{g(\mathcal{R}\to\mathcal{R}')} = \left\{ \begin{array}{lcl} t' & = & t \\ x' & = & x - Vt \end{array} \right. \tag{1.4}$$

et

$$T_{l(\mathcal{R}'\to\mathcal{R})} = \left\{ \begin{array}{lcl} t & = & t' \\ x & = & x' + Vt'. \end{array} \right. \tag{1.5}$$

  Dans ce cas, les vitesses sont additives et il n'y a pas de vitesse limite.

- Soit on postule l'existence d'une vitesse limite $c$, ce qui est suggéré tant par la théorie que par l'étude expérimentale des ondes électromagnétiques. Ces ondes se propagent à une vitesse finie et cette vitesse doit être la même dans tous les référentiels inertiels.

La transformation des coordonnées d'espace-temps est alors la transformation de Lorentz :

$$T_{l(\mathcal{R}\to\mathcal{R}')} = \begin{cases} ct' &= \gamma(ct - \beta x) \\ x' &= \gamma(x - \beta ct) \end{cases} \tag{1.6}$$

et

$$T_{l(\mathcal{R}'\to\mathcal{R})} = \begin{cases} ct &= \gamma(ct' + \beta x') \\ x &= \gamma(x' + \beta ct') \end{cases}, \tag{1.7}$$

avec :

$$\beta = \frac{V}{c} \text{ et } \gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}. \tag{1.8}$$

Pour que le facteur de Lorentz, $\gamma$, reste réel, la vitesse réduite $\beta$ ne peut pas excéder 1. La vitesse $c$ est donc la vitesse maximale que peut atteindre un système. C'est pourquoi un objet se déplaçant à cette vitesse limite possède la même vitesse dans tous les référentiels. La transformation de Lorentz couple l'espace et le temps. L'une des conséquences les plus connues est que le temps s'écoule plus vite dans le référentiel propre d'un observateur que dans n'importe quel référentiel en mouvement : le temps n'est plus absolu.

Matriciellement, en rajoutant les dimensions spatiales non affectées par la translation entre les référentiels, la transformation de Lorentz s'écrit :

$$\begin{pmatrix} ct' \\ x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \Lambda \begin{pmatrix} ct \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} \text{ avec } \Lambda = \begin{pmatrix} \gamma & -\gamma\beta & 0 & 0 \\ -\gamma\beta & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \tag{1.9}$$

Comme $\gamma^2 - (\gamma\beta)^2 = 1$ on peut définir la rapidité $\eta$ par :

$$\cosh\eta = \gamma \text{ et } \sinh\eta = \gamma\beta \Rightarrow \tanh\eta = \beta, \tag{1.10}$$

et ainsi :

$$\eta = \tanh^{-1}\beta = \frac{1}{2}\ln\frac{1+\beta}{1-\beta}. \tag{1.11}$$

La rapidité jouera un rôle important d'un point de vue expérimental car elle peut s'approximer par un critère géométrique.

L'intervalle $s$ entre les deux événements $(\vec{x}_1, t_1)$ et $(\vec{x}_2, t_2)$ généralise la distance euclidienne à l'espace-temps :

$$s^2 = c^2(t_2 - t_1)^2 - |(\vec{x}_2 - \vec{x}_1)|^2. \tag{1.12}$$

L'intervalle est une grandeur indépendante du référentiel :

$$\begin{aligned}
s'^2 &= c^2\left(t'_1 - t'_2\right)^2 - \left(x'_1 - x'_2\right)^2 - \left(y'_1 - y'_2\right)^2 - \left(z'_1 - z'_2\right)^2 \\
&= \left(\gamma\left(ct_1 - \beta x_1\right) - \gamma\left(ct_2 - \beta x_2\right)\right)^2 - \left(\gamma\left(x_1 - \beta ct_1\right) - \gamma\left(x_2 - \beta ct_2\right)\right)^2 \\
&\quad - \left(y_1 - y_2\right)^2 - \left(z_1 - z_2\right)^2 \\
&= c^2\left(t_1 - t_2\right)^2 - \left(x_1 - x_2\right)^2 - \left(y_1 - y_2\right)^2 - \left(z_1 - z_2\right)^2 \\
s'^2 &= s^2. \qquad (1.13)
\end{aligned}$$

Si $s^2 > 0$, l'intervalle est dit du genre « temps » : les deux événements sont en causalité car une information peut passer du point 1 au point 2 avec une vitesse inférieure à $c$. à l'inverse, si $s^2 < 0$, l'intervalle est dit du genre « espace » et les deux événements sont non causaux car incapables d'échanger une information du fait de la vitesse limite $c$.

Pour tout objet en mouvement à une vitesse $v < c$, on peut définir un référentiel où l'objet est au repos. Les grandeurs $\beta$, $\gamma$ et $\eta$ sont ainsi définies dans un repère $\mathcal{R}$ en considérant le mouvement de ce dernier par rapport au référentiel au repos, soit $\beta = \frac{v}{c}$. On pourra donc parler, par exemple, de la rapidité d'une particule relativiste.

Les seules transformations qui conservent l'intervalle sont, outre les transformations de Lorentz (ou boosts), les rotations d'espace, les translations et réflexions d'espace et les translations et réflexions temporelles. L'ensemble de ces symétries forme le groupe de Lorentz-Poincaré. Dans une théorie relativiste, le principe de relativité et la constance de la vitesse de la lumière se traduisent par l'invariance des lois de la physique sur tout changement des coordonnées suivant une transformation de ce groupe. De même, une grandeur qui n'est pas modifiée par une telle transformation est un invariant de Lorentz ou scalaire de Lorentz. L'intervalle entre deux événements est un invariant de Lorentz.

## 2 Composition des vitesses

Le vecteur vitesse n'est pas un invariant de Lorentz. La loi de transformation du vecteur vitesse $\vec{v} = \frac{d\vec{x}}{dt}$ dans un référentiel fixe $\mathcal{R}$ en $\vec{v}' = \frac{d\vec{x}'}{dt'}$ dans un référentiel $\mathcal{R}'$ en mouvement rectiligne uniforme à la vitesse $\vec{V} = V\vec{u}_x$ se détermine en différenciant la transformation des coordonnées :

$$\left\{\begin{array}{lcl}
dx & = & \cosh\eta\, dx' + \sinh\eta\, cdt' \\
dy & = & dy' \\
dz & = & dz' \\
dt & = & \sinh\eta\, dx' + \cosh\eta\, cdt'
\end{array}\right. \qquad (1.14)$$

d'où :

$$v_x = \frac{dx}{dt} = \frac{\cosh\eta\, dx' + \sinh\eta\, cdt'}{\frac{1}{c}\sinh\eta\, dx' + \cosh\eta\, dt'} = \frac{v'_x + c\tanh\eta}{1 + \frac{v'_x}{c}\tanh\eta}. \qquad (1.15)$$

En raisonnant de même pour $v_y$ et $v_z$, on trouve la loi de composition des vitesses :

$$v_x = \frac{v'_x + c\beta}{1 + v'_x \frac{\beta}{c}} = \frac{v'_x + V}{1 + \frac{Vv'_x}{c^2}}, \tag{1.16}$$

$$v_{y/z} = \frac{v'_{y/z}}{\gamma\left(1 + \frac{Vv'_x}{c^2}\right)}. \tag{1.17}$$

Pour une particule de vitesse $\vec{v}$ dans $\mathcal{R}$ et $\vec{v}'$ dans $\mathcal{R}'$ en mouvement avec la vitesse $\vec{V}$, on peut définir la rapidité dans le référentiel $\mathcal{R}$, $\tanh\chi = \frac{v}{c}$, celle dans $\mathcal{R}'$, $\tanh\chi' = v'/c$ ainsi que la rapidité de $\mathcal{R}'$ par rapport à $\mathcal{R}$, $\tanh\eta = V/c$. Si les trois vitesses sont orientées dans la même direction, on a :

$$\frac{v_x}{c} = \frac{\frac{v'_x}{c} + \frac{V}{c}}{1 + \frac{v'_x}{c}\frac{V}{c}} \Rightarrow \tanh\chi = \frac{\tanh\chi' + \tanh\eta}{1 + \tanh\chi'\tanh\eta} = \tanh(\chi' + \eta). \tag{1.18}$$

et finalement $\chi = \chi' + \eta$. La rapidité est une grandeur additive.

# 3 Quadrivecteurs

## 3.1 Coordonnées covariantes et contravariantes

L'unification entre espace et temps introduite par la relativité restreinte oblige à remplacer l'espace euclidien à trois dimensions par un nouvel espace à quatre dimensions, l'espace-temps de Minkowski. Dans cet espace, la position devient un objet à quatre coordonnées appelé quadrivecteur position :

$$x = (x^0, x^1, x^2, x^3) = (ct, x, y, z). \tag{1.19}$$

Les coordonnées avec l'indice en haut sont appelées coordonnées contravariantes. L'intervalle entre l'origine $O = (0, 0, 0, 0)$ et un quadrivecteur position $x$ vaut :

$$s^2 = (x^0)^2 - (x^1)^2 - (x^2)^2 - (x^3)^2 = x^0x_0 + x^1x_1 + x^2x_2 + x^3x_3. \tag{1.20}$$

où les coordonnées covariantes, notées avec l'indice en bas, sont données par :

$$x_0 = x^0\ , x_1 = -x^1\ , x_2 = -x^2\ , x_3 = -x^3. \tag{1.21}$$

Le passage des coordonnées contravariantes à covariantes se fait à l'aide du tenseur métrique :

$$x_\mu = \sum_\nu g_{\mu\nu} x^\nu, \tag{1.22}$$

où $g$ est le tenseur d'ordre 2 (matrice) :

$$g = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}. \tag{1.23}$$

[1]Inversement on note :

$$x^{\mu} = \sum_{\nu} g^{\mu\nu} x_{\nu}, \tag{1.24}$$

où il apparaît naturellement que $g^{\mu\nu} = g_{\mu\nu}$ L'intervalle correspond à la norme du quadrivecteur, qui sera souvent notée $x^2$ ou $x^{\mu}x_{\mu}$. Dans cette dernière notation, dite notation d'Einstein, l'opérateur de sommation est sous-entendu :

$$s^2 = x^2 = \sum_{\mu=0}^{3} g_{\mu\nu} x^{\mu} x^{\nu} = g_{\mu\nu} x^{\mu} x^{\nu} = x^{\mu} x_{\mu}. \tag{1.25}$$

De manière générale, toute notation faisant apparaître un même indice en haut et en bas implique une somme sur cet indice. On parle alors de contraction de Lorentz. L'habitude veut qu'un indice *grec* corresponde à une somme sur les quatre coordonnées d'espace-temps (somme de 0 à 3), alors qu'un indice *latin* indique une somme restreinte aux composantes spatiales (somme de 1 à 3). La transformation de Lorentz des coordonnées est notée :

$$x'^{\mu} = \Lambda^{\mu}{}_{\nu} x^{\nu}, \tag{1.26}$$

où $\Lambda^{\mu}{}_{\nu}$ est la matrice de Lorentz décrite précédemment. De même pour les coordonnées covariantes :

$$x'_{\mu} = \Lambda_{\mu}{}^{\nu} x_{\nu}, \tag{1.27}$$

avec :

$$\Lambda_{\mu}{}^{\nu} = g_{\mu\rho} g^{\nu\sigma} \Lambda^{\rho}{}_{\sigma}. \tag{1.28}$$

Le tenseur métrique peut se voir comme un outil qui permet de monter ou descendre un indice de Lorentz sur n'importe quel tenseur (le quadrivecteur position et la matrice de Lorentz n'étant que des cas particuliers).

Comme l'intervalle est invariant de Lorentz, on a :

$$x'^{\mu} x'_{\mu} = \Lambda^{\mu}{}_{\rho} \Lambda_{\mu}{}^{\sigma} x^{\rho} x_{\sigma} = x^{\mu} x_{\mu} \Rightarrow \Lambda^{\mu}{}_{\rho} \Lambda_{\mu}{}^{\sigma} = \delta^{\sigma}_{\rho}. \tag{1.29}$$

On en déduit la transformation de Lorentz inverse $\Lambda^{-1}$ :

$$(\Lambda^{-1})^{\sigma}{}_{\mu} x'^{\mu} = x^{\sigma} = \delta^{\sigma}_{\rho} x^{\rho} = \Lambda^{\mu}{}_{\rho} \Lambda_{\mu}{}^{\sigma} x^{\rho} = \Lambda_{\mu}{}^{\sigma} x'^{\mu}, \tag{1.30}$$

soit :

$$(\Lambda^{-1})^{\sigma}{}_{\mu} = \Lambda_{\mu}{}^{\sigma}. \tag{1.31}$$

1. Dans la littérature, le tenseur métrique de la relativité restreinte est souvent noté $\eta$, $g$ désignant la métrique en relativité générale qui peut être plus compliquée. Dans le présent exposé la notation $g$ sera utilisée.

Un quadrivecteur $A = (A^0, A^1, A^2, A^3)$ est un vecteur à quatre composantes qui suit les mêmes règles de transformation que la quadri-position dans un changement de référentiel inertiel.

$$A'^{\mu} = \Lambda^{\mu}_{\ \nu} A^{\nu}. \tag{1.32}$$

Le produit scalaire entre deux quadrivecteurs $A$ et $B$ vaut :

$$A \cdot B = A^{\mu} B_{\mu} = A_{\mu} B^{\mu} = A_0 B_0 - \vec{A} \cdot \vec{B}, \tag{1.33}$$

le dernier terme étant le produit scalaire euclidien. Les transformations du groupe de Lorentz conservent l'intervalle. Comme un quadrivecteur se transforme de la même manière que la quadri-position, on en déduit que $A^2$ et $A \cdot B$ sont également des invariants de Lorentz.

## 3.2 Quadrivecteurs usuels

Dans un référentiel fixe, la variation d'intervalle est :

$$ds^2 = dx_{\mu} dx^{\mu} = c^2 dt^2 - d\vec{x}.d\vec{x} = c^2 dt^2 - \vec{v}^2 dt^2 = c^2(1 - \beta^2) dt^2. \tag{1.34}$$

Dans le référentiel au repos de la particule, la variation spatiale est nulle et :

$$ds^2 = c^2 d\tau^2. \tag{1.35}$$

L'invariance de l'intervalle sous une transformation de Lorentz implique :

$$d\tau = \sqrt{1 - \beta^2} dt = \frac{1}{\gamma} dt, \tag{1.36}$$

ce qui définit le temps propre $\tau$ de la particule. Dans une désintégration liée au temps de vie d'une particule, c'est relativement au temps propre que l'on détermine la probabilité de désintégration.

À partir de l'intervalle élémentaire, on définit deux nouveaux quadrivecteurs : la quadri-vitesse $u$ et la quadri-impulsion $p$. La quadri-vitesse généralise la notion de vitesse de la mécanique newtonienne :

$$u^{\mu} = \frac{dx^{\mu}}{d\tau} = \gamma \frac{dx^{\mu}}{dt}, \tag{1.37}$$

soit

$$u = (\gamma c, \gamma \vec{v}) \text{ et } u^{\mu} u_{\mu} = c^2. \tag{1.38}$$

La quadri-impulsion est alors, $p = mu = (\gamma mc, \gamma m\vec{v})$.

Le principe de relativité impose que les lois de la physique sont les mêmes dans tous les référentiels inertiels. Il s'en suit que le lagrangien et l'action doivent être des invariants de Lorentz. L'action est définie comme l'intégrale sur le temps du lagrangien, or le seul invariant de Lorentz incluant $dt$ est l'intervalle infinitésimal $ds$. On a donc nécessairement pour un point matériel en mouvement libre à la vitesse $\beta$ :

$$S = \alpha \int ds, \tag{1.39}$$

où $\alpha$ est une constante à déterminer. On peut extraire $dt$ de $ds$ pour obtenir le lagrangien :

$$ds^2 = c^2dt^2 - d\vec{x}^2 \Rightarrow ds = c\sqrt{1 - \left(\frac{d\vec{x}}{dt}\right)^2} = c\sqrt{1-\beta^2} = \frac{c}{\gamma}, \tag{1.40}$$

d'où $L = \alpha c\sqrt{1-\beta^2}$. L'impulsion s'obtient alors en dérivant le lagrangien :

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} = -\alpha c \frac{\dot{x}_i}{c^2\sqrt{1-\beta^2}} = -\frac{\alpha\gamma}{c}\dot{x}_i. \tag{1.41}$$

On retrouve la partie spatiale de la quadri-impulsion $p_i = \gamma m\dot{x}_i$ en posant $\alpha = -mc$. Le hamiltonien du système est alors :

$$H = \sum_i x_i \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} - L = \gamma m\dot{x}^2 + \frac{mc^2}{\gamma} = \gamma m\left(v^2 + c^2(1-\beta^2)\right) = \gamma mc^2 = p^0 c. \tag{1.42}$$

À un facteur $c$ près la composante temporelle de la quadri-impulsion est l'énergie totale du système. La quadri-impulsion est le quadrivecteur énergie-impulsion. Cette unification était à attendre, la conservation de l'énergie étant liée à l'invariance par translation dans le temps et celle de l'impulsion à l'invariance par translation dans l'espace. Le quadrivecteur énergie-impulsion s'écrit $p = (\frac{E}{c}, \vec{p})$. Sa norme vaut :

$$p^2 = m^2(\gamma^2c^2 - \gamma^2v^2) = m^2c^2, \tag{1.43}$$

$m$ étant la masse invariante du système. Comme son nom l'indique c'est un invariant de Lorentz. Cette dernière relation se réécrit :

$$E^2 = m^2c^4 + |\vec{p}|^2\, c^2, \tag{1.44}$$

soit, en unités naturelles :

$$E^2 = m^2 + |\vec{p}|^2 \text{ ou encore } m^2 = E^2 - |\vec{p}|^2\,. \tag{1.45}$$

Les lois de conservation de l'énergie et de l'impulsion sont bien sûr toujours vérifiées lors de l'évolution d'un système et se traduisent par la conservation de la quadri-impulsion totale du système. On parlera de particule relativiste quand $p \sim m$, et de particule ultra-relativiste si $p \gg m$. Dans ce dernier cas, on pourra faire l'approximation $E^2 \approx p^2$ comme pour une particule de masse nulle.

Enfin on introduit les opérateurs :

$$\partial_\mu = \frac{\partial}{\partial x^\mu} \text{ et } \partial^\mu = \frac{\partial}{\partial x_\mu}. \tag{1.46}$$

Ce sont des opérateurs quadrivectoriels, en effet lors d'un changement de référentiel :

$$\partial'_\mu = \frac{\partial}{\partial x'^\mu} = \frac{\partial}{\partial x^\nu}\frac{\partial x^\nu}{\partial x'^\mu} = \Lambda_\mu^{\ \nu}\partial_\nu, \tag{1.47}$$

qui est bien la définition d'un quadrivecteur. Cet opérateur généralise à l'espace-temps l'opérateur $\vec{\nabla}$. On a alors :

$$\partial = (\partial_0, \partial_1, \partial_2, \partial_3) = \left(\frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right) = \left(\frac{\partial}{\partial t}, \vec{\nabla}\right). \tag{1.48}$$

En particulier, on notera que $\partial_\mu \partial^\mu = \frac{\partial^2}{c^2 \partial t^2} - \Delta = \Box$ est l'opérateur d'Alembertien qui apparaît notamment dans l'équation de propagation de l'onde électromagnétique ($\Box \varphi = 0$).

### 3.3 Limite non relativiste

Dans la limite des faibles vitesses $\beta \ll 1$ le temps et l'espace se découplent et la transformation de Lorentz devient la transformation de Galilée de la mécanique newtonienne :

$$\beta \ll 1 \Rightarrow \gamma \to 1, \Rightarrow \begin{cases} ct' = \gamma ct - \gamma \beta x & \to \quad ct \\ x' = -\gamma \beta ct + \gamma x & \to \quad x - vt. \end{cases} \tag{1.49}$$

L'énergie $E = p_0 c = \gamma mc^2$ devient $E = mc^2$. Si on regarde plus finement en développant $\gamma$ à l'ordre 2 en $\beta$, on a :

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} = 1 + \frac{\beta^2}{2} \Rightarrow E = \frac{1}{2} mv^2 + mc^2. \tag{1.50}$$

On reconnaît dans le premier terme l'énergie cinétique. Le second terme est l'énergie de masse. Si on applique le même développement limité au lagrangien il vient :

$$L = -mc\sqrt{1-\beta^2} = \frac{1}{2} mv^2 - mc^2. \tag{1.51}$$

En comparant hamiltonien et lagrangien, on peut identifier l'énergie de masse à une énergie potentielle intrinsèque du système. À basse énergie, ce terme est dominant mais constant. Il n'a donc aucun impact dans les différences d'énergie, on peut supprimer ce terme en redéfinissant le zéro de l'énergie potentielle.

## 4 Cinématique

Considérons un système isolé composé initialement de plusieurs particules, de quadri-impulsions $p_1^i, \dots p_n^i$. Ces particules interagissent entre elles et on obtient dans l'état final $m$ particules, qui peuvent différer des particules initiales, d'impulsion $p_1^f, \dots p_m^f$.

Dans un référentiel donné, la quadri-impulsion totale est conservée, soit :

$$\sum_k^n p_k^i = \sum_k^m p_k^f. \tag{1.52}$$

De plus, la norme $s = \left(\sum_k p_k^i\right)^2 = \left(\sum_k p_k^f\right)^2$ est un invariant de Lorentz, donc possède la même valeur dans tous les référentiels. L'énergie totale disponible lors de l'interaction, $\sqrt{s}$, est l'énergie dans le centre de masse du système. Si toutes les particules de l'état final sont produites au repos, c'est-à-dire sans énergie cinétique, dans le référentiel du centre de masse et en posant $c = 1$ (unités naturelles) :

$$p_1^f = (m_1, 0, 0, 0), \quad p_2^f = (m_2, 0, 0, 0), \; \ldots \; p_k^f = (m_k, 0, 0, 0), \tag{1.53}$$

où $m_k$ est la masse invariante de la $k$-ième particule finale. On a alors :

$$\sqrt{s} = \sum_{k=1}^{m} m_k. \tag{1.54}$$

Pour produire un ensemble de particules, il faut disposer, au minimum, d'une énergie dans le centre de masse égale à la masse des particules. Dans ce cas on parle de production au seuil. Si $\sqrt{s} > \sum m_k$, l'énergie restante devient l'énergie cinétique des particules finales. Discutons succinctement de quelques cas particuliers souvent rencontrés dans les systèmes étudiés expérimentalement :

- La désintégration d'une particule de masse $M$ : l'énergie dans le centre de masse est $\sqrt{s} = M$. Les masses des particules de l'état final doivent vérifier $\sum m_k < M$. Une particule ne peut se désintégrer qu'en particules plus légères. Les particules les plus légères sont donc stables.
- Un système à deux corps : les quadri-impulsions dans le référentiel du centre de masse sont :

$$p_1^f + p_2^f = \begin{pmatrix} \sqrt{s} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \; p_1^f = \begin{pmatrix} E_1 \\ p \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \; p_2^f = \begin{pmatrix} E_2 \\ -p \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \tag{1.55}$$

en choisissant l'axe $x$ comme direction de l'impulsion. Les deux énergies $E_1$ et $E_2$ et l'impulsion $p$ sont entièrement déterminées par $\sqrt{s}$ :

$$\begin{aligned} s &= m_1^2 + m_2^2 + 2E1E2 + 2p^2 \\ &= m_1^2 + m_2^2 + 2(E_1\sqrt{s} - E_1^2 + p^2) \\ &= m_2^2 - m_1^2 + 2E_1\sqrt{s} \end{aligned} \tag{1.56}$$

$$\Rightarrow E_1 = \frac{s + m_1^2 - m_2^2}{2\sqrt{s}}, \tag{1.57}$$

de même :

$$E_2 = \frac{s - m_1^2 + m_2^2}{2\sqrt{s}}, \tag{1.58}$$

et

$$p = \frac{\sqrt{(s - (m_1 - m_2)^2)(s - (m_1 + m_2)^2}}{2\sqrt{s}}. \tag{1.59}$$

On vérifie alors que :

$$\sqrt{s} > m_1 + m_2. \tag{1.60}$$

En accélérant des particules que l'on collisionne, c'est-à-dire en augmentant $p$, on peut obtenir des valeurs de $\sqrt{s}$ de plus en plus élevées. C'est ainsi que l'on peut produire des particules lourdes à partir de particules légères : en collisionnant, par exemple, deux protons de grande énergie on peut produire des particules beaucoup plus massives tels des bosons $W^\pm$ ou des quarks top, dès lors que $\sqrt{s}$ dépasse la somme des masses des particules filles.

## 4.1 Théorie classique des champs

Le concept de champ apparaît naturellement comme une extension de la notion de coordonnées. La mécanique classique décrit l'évolution temporelle d'un ensemble de points matériels caractérisés par des coordonnées $q_i$ et leur vitesses $\dot{q}_i$ (ou les moments conjugués $p_i$). Mais la description de l'électromagnétisme, par exemple, nécessite des objets physiques qui sont définis en tout point de l'espace, des champs. On peut interpréter le champ comme la limite continue d'une infinité de coordonnées discrètes :

$$q_i(t) \xrightarrow[i \to +\infty]{} \varphi(\vec{x}, t), \tag{1.61}$$

la dépendance spatiale des coordonnées discrètes étant implicite. Assez naturellement, les coordonnées d'espace viennent jouer un rôle similaire à la coordonnée temporelle. On tentera donc de décrire l'évolution spatio-temporelle du champ. Cette équivalence temps-espace permet également de donner une formulation relativiste de la théorie des champs. Pour un champ $\varphi(x)$, $x$ étant la quadri-position, il faut désormais considérer toutes les dérivées partielles $\partial_\mu \varphi$. Pour traiter les quatre dimensions de la même manière, le lagrangien est remplacé par une densité lagrangienne $\mathcal{L}\big(\varphi(x), \partial_\mu \varphi(x)\big)$ telle que l'action soit :

$$\mathcal{S}\left(\varphi(x), \partial_\mu \varphi(x)\right) = \int \mathcal{L}\left(\varphi(x), \partial_\mu \varphi(x)\right) d^4x. \tag{1.62}$$

L'application du principe de moindre action est similaire à celle utilisée pour des coordonnées discrètes, mais nécessite l'introduction d'outils mathématiques plus complexes. En effet, le lagrangien est désormais une fonctionnelle, puisque c'est une fonction du champ et de ses dérivées qui sont eux-mêmes des fonctions de l'espace-temps. Les mathématiques fournissent cependant le concept de dérivée fonctionnelle $\frac{\delta \mathcal{L}(\varphi)}{\delta \varphi}$ et de différentielle fonctionnelle $\delta \mathcal{L}$ définie par :

$$\delta \mathcal{L}(\varphi_1, \varphi_2) = \frac{\delta \mathcal{L}(\varphi_1)}{\delta \varphi_1} \delta \varphi_1 + \frac{\delta \mathcal{L}(\varphi_2)}{\delta \varphi_2} \delta \varphi_2. \tag{1.63}$$

Leur comportement est identique, dans les problèmes qui nous concernent, à une dérivée classique. Par exemple, pour une fonctionnelle $F(\varphi(x)) = \varphi^\dagger(x)\varphi(x)$ où $\varphi$ est un champ complexe,

$$\frac{\delta F}{\delta \varphi} = 2|\varphi|. \tag{1.64}$$

L'équation d'Euler-Lagrange décrivant l'évolution spatio-temporelle du champ $\varphi$ est alors :

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi} - \partial_\mu \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \varphi)} \right) = 0. \tag{1.65}$$

## Points clés

1. La transformation la plus générale des coordonnées entre deux référentiels inertiels qui assure l'existence d'une vitesse identique dans tous les référentiels est la transformation de Lorentz. Elle impose un couplage entre l'espace et le temps. Ce dernier n'est plus universel.

2. Le principe de relativité impose que les équations du mouvement, et par extension le lagrangien dont elles dérivent, doivent être des invariants de Lorentz. De tels invariants s'obtiennent dans les contractions de Lorentz tel que le produit scalaire de deux quadrivecteurs.

3. Le quadri-gradient $\partial_\mu$ est l'opérateur quadrivectoriel de dérivation par rapport aux coordonnées d'espace-temps. Il est la généralisation de l'opérateur $\vec{\nabla}$ à l'espace de Minkowski. Sa norme est l'opérateur d'Alembertien qui généralise le Laplacien et apparaît dans les équations de propagation du champ électromagnétique.

4. Le relativité unifie les concepts d'énergie et d'impulsion au sein d'un quadrivecteur, la quadri-impulsion. L'invariance d'un système sous des translations d'espace-temps induit la conservation usuelle de la quadri-impulsion. La norme de ce quadrivecteur définit la masse, qui est donc un invariant de Lorentz. La relation de dispersion relativiste est alors $E^2 = m^2 + p^2$.

5. Dans un processus de diffusion, la quadri-impulsion totale est conservée dans un référentiel donné. En tant qu'invariant de Lorentz, la norme de l'impulsion totale est la même dans tous les référentiels. Ce sont les deux principes de base des calculs de cinématique relativiste.

Chapitre 2

# Équations relativistes

## Introduction

En partant de l'équation de Schrödinger, nous allons construire successivement les équations quantiques relativistes décrivant des particules de spin nul, de spin $\frac{1}{2}$ tels les électrons, et de spin 1 tels les photons. En résolvant ces équations nous mettrons en évidence certains problèmes intrinsèques à la mécanique quantique relativiste qui se résoudront, en partie, en introduisant un nouveau concept : les antiparticules.

## Objectifs

**Connaître** les équations de Klein-Gordon, Dirac, Maxwell et Proca.

**Identifier** les limitations de la mécanique quantique relativiste.

**Expliquer** l'interprétation des solutions d'énergie négative en termes d'antiparticules.

**Définir** les spineurs, les matrices de Dirac et leur propriétés.

**Définir** l'électromagnétisme en formalisme covariant.

## Plan


1. Mécanique quantique non relativiste
2. Champ scalaire
3. Champ spinoriel
4. Champ vectoriel
5. Couplage aux champs fermioniques


## 1 Mécanique quantique non relativiste

### 1.1 Observables et opérateurs

L'ensemble des fonctions, satisfaisant aux propriétés mathématiques de la fonction d'onde, forme un espace vectoriel de dimension infinie : un espace de Hilbert. Une fonction d'onde $\psi(x, t)$ est associée à un vecteur de cet espace noté $|\psi\rangle$. Le produit scalaire (hermitien) dans l'espace de Hilbert est défini par :

$$\langle \varphi | \psi \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi^*(x, t)\psi(x, t)dx. \tag{2.1}$$

L'un des postulats de la mécanique quantique est qu'une observable physique $O$ (position, impulsion, énergie...) n'est plus une grandeur numérique mais un opérateur hermitien $\hat{O}$ agissant sur l'espace de Hilbert. Seuls les états propres de l'opérateur ont