

# **Méthodes mathématiques pour la physique**

**2<sup>e</sup> édition**



# Méthodes mathématiques pour la physique

2<sup>e</sup> édition

**Vladimir Dotsenko**

Professeur à Sorbonne Université - Faculté des Sciences  
et de l'ingénierie (Paris)

**Axel Courtat**

Diplômé en Physique de Sorbonne Université - Faculté des  
Sciences et de l'ingénierie (Paris)

**Gaëtan Gauthier**

Doctorant et chargé d'enseignement à Sorbonne  
Université - Faculté des Sciences et de l'ingénierie (Paris)

**DUNOD**

Couverture : ©Julio-Adobe Stock.com

Le pictogramme qui figure ci-contre mérite une explication. Son objet est d'alerter le lecteur sur la menace que représente pour l'avenir de l'écrit, particulièrement dans le domaine de l'édition technique et universitaire, le développement massif du photocopillage.

Le Code de la propriété intellectuelle du 1<sup>er</sup> juillet 1992 interdit en effet expressément la photocopie à usage collectif sans autorisation des ayants droit. Or, cette pratique s'est généralisée dans les établissements

d'enseignement supérieur, provoquant une baisse brutale des achats de livres et de revues, au point que la possibilité même pour

les auteurs de créer des œuvres nouvelles et de les faire éditer correctement est aujourd'hui menacée.

Nous rappelons donc que toute reproduction, partielle ou totale, de la présente publication est interdite sans autorisation de l'auteur, de son éditeur ou du

Centre français d'exploitation du droit de copie (CFC, 20, rue des Grands-Augustins, 75006 Paris).



© Dunod, 2018, 2021

11, rue Paul Bert, 92240 Malakoff

[www.dunod.com](http://www.dunod.com)

ISBN 978-2-10-081578-4

Le Code de la propriété intellectuelle n'autorisant, aux termes de l'article L. 122-5, 2<sup>e</sup> et 3<sup>e</sup> a), d'une part, que les « copies ou reproductions strictement réservées à l'usage privé du copiste et non destinées à une utilisation collective » et, d'autre part, que les analyses et les courtes citations dans un but d'exemple et d'illustration, « toute représentation ou reproduction intégrale ou partielle faite sans le consentement de l'auteur ou de ses ayants droit ou ayants cause est illicite » (art. L. 122-4).

Cette représentation ou reproduction, par quelque procédé que ce soit, constituerait donc une contrefaçon sanctionnée par les articles L. 335-2 et suivants du Code de la propriété intellectuelle.

# Table des matières

<b>1</b>	<b>ANALYSE VECTORIELLE</b>	<b>9</b>
1.1	Rappel, définitions	9
1.1.1	Systèmes de coordonnées	9
1.1.2	Fonctions scalaires et fonctions vectorielles	11
1.2	Bases mobiles dans les coordonnées curvilignes	13
1.2.1	Rappel sur la base des coordonnées cartésiennes	13
1.2.2	Bases mobiles des coordonnées curvilignes	14
1.2.3	Les relations entre les vecteurs des bases de coordonnées cartésiennes, cylindriques et sphériques	19
1.2.4	Exemples de projections des champs de vecteurs sur des bases mobiles	21
1.3	Intégrales dans $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}^3$ , théorème de Fubini et exemples de calculs	27
1.3.1	Intégrales dans $\mathbb{R}^2$	27
1.3.2	Intégrales dans $\mathbb{R}^3$	35
1.4	Gradient d'une fonction scalaire	44
1.5	Complément sur les fonctions de plusieurs variables	52
1.5.1	Développements en série des fonctions de plusieurs variables	52
1.5.2	Différentielles des fonctions	57
1.5.3	Extrema d'une fonction de deux variables	59
1.6	Divergence d'une fonction vectorielle et théorème d'Ostrogradski	65
1.6.1	Divergence d'un champ de vecteurs $\vec{A}(\vec{r})$ dans les coordonnées cartésiennes	65
1.6.2	Divergence d'un champ de vecteurs $\vec{A}(\vec{r})$ dans les coordonnées curvilignes	69
1.6.3	Premier théorème intégral : théorème d'Ostrogradski	72
1.6.4	Complément : exemples de calculs de flux des champs de vecteurs	74
1.7	Rotationnel d'une fonction vectorielle, circulation et théorème de Stokes	88
1.7.1	Rotationnel d'un champ de vecteurs $\vec{A}(\vec{r})$ dans les coordonnées cartésiennes	88
1.7.2	Rotationnel d'un champ de vecteurs $\vec{A}(\vec{r})$ dans les coordonnées curvilignes	92
1.7.3	Deuxième théorème intégral : théorème de Stokes	94
1.7.4	Complément : exemples de calculs de circulations en coordonnées cartésiennes et en coordonnées cylindriques	96
1.8	Laplacien	112
1.8.1	L'opérateur laplacien dans les coordonnées cartésiennes	112
1.8.2	L'opérateur laplacien dans les coordonnées curvilignes	115

1.9	Formules différentielles et identités de Green . . . . .	116
1.10	Complément : formulaires . . . . .	120
1.10.1	Formulaire 1 - Opérateurs différentiels exprimés en coordonnées sphériques et cylindriques . . . . .	120
1.10.2	Formulaire 2 - Développement en séries entières des fonctions classiques . . . . .	121
<b>2</b>	<b>ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES</b>	<b>123</b>
2.1	Équations différentielles d'ordre 1 . . . . .	123
2.1.1	Équations différentielles d'ordre 1 solubles par la séparation de variables . . . . .	123
2.1.2	Équations différentielles linéaires d'ordre 1 à coefficients et second membre variables . . . . .	126
2.2	Équations différentielles linéaires d'ordre 2 à coefficients constants et second membre variable . . . . .	138
<b>3</b>	<b>ALGÈBRE LINÉAIRE</b>	<b>155</b>
3.1	Matrices . . . . .	155
3.2	Opérations algébriques avec des matrices . . . . .	156
3.2.1	Opérations matricielles . . . . .	156
3.2.2	Matrices $n \times n$ comme des opérations (applications) linéaires . . . . .	157
3.3	Trace, déterminant et mineurs d'une matrice . . . . .	165
3.4	Matrice inverse, propriétés de la trace et du déterminant d'une matrice . . . . .	173
3.4.1	Propriétés de la trace . . . . .	173
3.4.2	Propriétés du déterminant . . . . .	174
3.4.3	Matrice inverse $M^{-1}$ . . . . .	177
3.5	Spectre d'une matrice : ses valeurs et ses vecteurs propres . . . . .	186
3.6	Changement de base . . . . .	190
3.6.1	Transformations des vecteurs . . . . .	190
3.6.2	Transformations des matrices . . . . .	192
3.7	Diagonalisation des matrices et premières applications . . . . .	193
3.7.1	Diagonalisation des matrices . . . . .	193
3.7.2	Puissance m-ième d'une matrice diagonalisable . . . . .	196
3.7.3	Exponentielle d'une matrice $M$ diagonalisable . . . . .	198
3.7.4	Exponentielles des matrices de Pauli . . . . .	200
3.7.5	Solution de systèmes d'équations différentielles linéaires du 1er ordre . . . . .	201
3.7.6	Solution de systèmes linéaires . . . . .	203
3.8	Dégénérescence, matrices diagonalisables et non diagonalisables . . . . .	208
3.9	Matrices hermitiennes, matrices unitaires et leurs propriétés . . . . .	219
3.9.1	Conventions et définitions . . . . .	219
3.9.2	Matrices hermitiennes . . . . .	221
3.9.3	Matrices unitaires . . . . .	224
3.10	Applications aux systèmes des oscillateurs couplés . . . . .	232
3.10.1	Oscillateurs couplés avec des oscillations longitudinales . . . . .	232
3.10.2	$N$ oscillateurs couplés. Relation de dispersion . . . . .	239
3.11	Supplément : triangularisation des matrices qui ne sont pas diagonalisables . . . . .	244

<b>4</b>	<b>ANALYSE RÉELLE : SUITES ET SÉRIES</b>	<b>249</b>
4.1	Suites convergentes et non convergentes . . . . .	249
4.2	Séries convergentes et non convergentes. Critères de convergence . . . . .	257
4.2.1	Séries numériques . . . . .	257
4.2.2	Critères de convergence des séries numériques . . . . .	262
4.3	Séries entières . . . . .	274
4.3.1	Théorème d'Abel et ses conséquences . . . . .	274
4.3.2	Détermination du rayon de convergence de la série entière . . . . .	275
4.3.3	Dérivation des séries entières . . . . .	277
4.3.4	Séries de puissances de $x - a$ . . . . .	278
4.4	Séries de Taylor et développement en série entière de fonction classique . . . . .	279
4.5	Notion de prolongement analytique . . . . .	289
4.5.1	Exemples particuliers de prolongement analytiques des séries . . . . .	289
4.5.2	Exemple physique : l'effet de Casimir . . . . .	290
4.5.3	Deux exemples mathématiques . . . . .	292
4.6	Exercices sur les calculs des séries . . . . .	293
<b>5</b>	<b>ANALYSE RÉELLE : INTÉGRALES</b>	<b>303</b>
5.1	Intégrale : définition et propriétés . . . . .	303
5.1.1	Propriétés de l'intégrale . . . . .	304
5.1.2	Formule de Newton-Leibniz . . . . .	307
5.1.3	Table des primitives des fonctions classiques . . . . .	307
5.2	Calcul des intégrales par la primitive . . . . .	309
5.3	Intégrales impropres . . . . .	314
5.3.1	Intégrales impropres du type 1 . . . . .	314
5.3.2	Intégrales impropres du type 2 . . . . .	324
5.4	Autres méthodes de calculs des intégrales . . . . .	339
5.4.1	Dérivation par rapport au paramètre . . . . .	339
5.4.2	Intégrales d'une fonction gaussienne . . . . .	342
5.4.3	Intégration par un développement en série . . . . .	345
5.5	Compléments . . . . .	351
5.5.1	Séries de Fourier . . . . .	351
5.5.2	Applications de la série de Fourier . . . . .	353
<b>6</b>	<b>NOTIONS DE THÉORIE DES PROBABILITÉS</b>	<b>355</b>
6.1	Événements et leur probabilité . . . . .	355
6.1.1	Définitions et exemples . . . . .	355
6.1.2	Probabilités conditionnelles, probabilités totales, indépendance . . . . .	357
6.1.3	Dénombrements . . . . .	359
6.2	Variables aléatoires . . . . .	371
6.2.1	Définitions et exemples . . . . .	371
6.2.2	Distributions des variables aléatoires . . . . .	372
6.2.3	Moyenne, variance, écart-type d'une variable aléatoire . . . . .	374
6.3	Exemples de distributions classiques . . . . .	378
6.3.1	Distribution normale . . . . .	378
6.3.2	Distribution binomiale . . . . .	379
6.3.3	Fréquence d'événements rares. Distribution de Poisson . . . . .	381
6.4	Appendices . . . . .	396
6.4.1	Appendice A : liste des distributions classiques . . . . .	396

6.4.2	Appendice B : distribution de la somme de deux variables aléatoires, intégrale de convolution . . . . .	397
6.4.3	Appendice C : théorème central limite . . . . .	400
6.4.4	Appendice D : la forme limite de la distribution binomiale pour $n$ et $k$ grands . . . . .	403
6.4.5	Appendice E : formule de Stirling pour la factorielle . . . . .	405
6.4.6	Appendice F : quelques formules utiles pour les intégrales avec une fonction gaussienne . . . . .	406
6.4.7	Appendice G : table des valeurs numériques de la fonction de répartition pour la distribution normale, centrée ( $x_0 = 0$ ) et réduite ( $c \equiv \sigma = 1$ ) : $F(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^t dt' \exp(-\frac{t'^2}{2})$ . . . . .	408
<b>7</b>	<b>ANALYSE COMPLEXE</b>	<b>409</b>
7.1	Fonctions holomorphes . . . . .	409
7.1.1	Rappels . . . . .	409
7.1.2	Dérivée, fonctions holomorphes et Conditions de Cauchy-Riemann . . . . .	410
7.1.3	Fonction holomorphe dans un domaine, singularités et classements . . . . .	413
7.1.4	Fonction réciproque d'une fonction holomorphe . . . . .	417
7.1.5	Fonctions harmoniques de deux variables. Application physique . . . . .	421
7.1.6	Fonctions avec des points de branchement, une suite d'exemples. Transformation de monodromie . . . . .	426
7.2	Intégration des fonctions holomorphes . . . . .	442
7.2.1	Intégrale sur une courbe dans $\mathbb{C}$ . . . . .	442
7.2.2	Intégrale d'une fonction holomorphe et théorème de Cauchy . . . . .	444
7.2.3	Primitive d'une fonction holomorphe . . . . .	450
7.2.4	Formule intégrale de Cauchy . . . . .	451
7.2.5	Théorèmes sur des fonctions holomorphes . . . . .	452
7.2.6	Complément : théorème de Stokes . . . . .	456
7.3	Dérivabilité et développements en série des fonctions holomorphes et prolongement analytique . . . . .	463
7.3.1	Dérivées successives d'une fonction holomorphe . . . . .	463
7.3.2	Développement en série de Taylor . . . . .	464
7.3.3	Zéros des fonctions holomorphes . . . . .	469
7.3.4	Prolongement analytique . . . . .	470
7.3.5	Prolongement analytique d'une fonction multiforme autour d'un point de branchement . . . . .	474
7.3.6	Application : calcul d'une intégrale . . . . .	477
7.4	Série de Laurent et théorème des résidus . . . . .	482
7.4.1	Série de Laurent . . . . .	482
7.4.2	Points singuliers isolés . . . . .	485
7.4.3	Résidu en un point singulier . . . . .	490
7.4.4	Théorème des résidus . . . . .	492
7.4.5	Application 1 . . . . .	496
7.4.6	Application 2 . . . . .	498
7.4.7	Application 3 . . . . .	501
7.4.8	Application physique : l'effet Landau . . . . .	503



<b>8</b>	<b>TRANSFORMATIONS DE FOURIER ET DE LAPLACE</b>	<b>529</b>
8.1	La transformée de Fourier : définitions et propriétés . . . . .	529
8.1.1	Définitions . . . . .	529
8.1.2	Propriétés générales de la transformation de Fourier . . . . .	530
8.1.3	Propriétés par rapport au changement de la variable . . . . .	530
8.1.4	Calcul de la transformée de Fourier de la fonction $1/x^\gamma$ . . . . .	536
8.1.5	Continuité de $\hat{f}(p)$ , pour $f(x) \in L^1(\mathbb{R})$ . . . . .	537
8.2	Dérivabilité et décroissance à l'infini . . . . .	542
8.2.1	Transformation de Fourier des dérivées d'une fonction . . . . .	542
8.2.2	Dérivées de la transformée de Fourier d'une fonction . . . . .	549
8.2.3	Transformée de Fourier d'une fonction gaussienne . . . . .	550
8.3	Réciprocité . . . . .	554
8.4	Convolution et transformation de Fourier . . . . .	559
8.4.1	Le produit de convolution . . . . .	559
8.4.2	Transformée de Fourier d'un produit de convolution . . . . .	560
8.4.3	Formule de Parseval-Plancherel . . . . .	561
8.4.4	Applications, exercices et remarques . . . . .	562
8.5	Transformation de Fourier dans $L^1(\mathbb{R}^n)$ . . . . .	566
8.5.1	Définitions . . . . .	566
8.5.2	Transformation de Fourier d'une fonction radiale dans $\mathbb{R}^3$ . . . . .	566
8.5.3	Transformation de Fourier d'une fonction radiale dans $\mathbb{R}^2$ . . . . .	567
8.6	Transformation de Laplace . . . . .	571
8.6.1	Définition, propriétés et exemples . . . . .	571
8.6.2	Transformation de Laplace et convolution . . . . .	573
8.6.3	Transformation de Laplace inverse . . . . .	573
8.6.4	Application de la transformation de Laplace aux solutions des équations différentielles . . . . .	578
8.7	Exercices sur l'ensemble du chapitre . . . . .	581
8.8	Supplément 1 : listes de base des transformées . . . . .	593
8.8.1	Liste de base des transformées de Fourier . . . . .	593
8.8.2	Liste de base des transformées de Laplace . . . . .	595
8.9	Supplément 2 : la fonction $\delta$ de Dirac . . . . .	596
<b>9</b>	<b>ESPACE DE HILBERT</b>	<b>599</b>
9.1	Espace $L^2$ , espace de Hilbert . . . . .	599
9.1.1	Produit scalaire hermitien dans $L^2$ . . . . .	599
9.1.2	Inégalité de Cauchy-Schwarz . . . . .	600
9.1.3	La norme $\ \cdot\ _2$ . . . . .	601
9.1.4	Relations métriques . . . . .	602
9.1.5	Projection orthogonale . . . . .	602
9.2	Séries de Fourier . . . . .	606
9.2.1	Séries de Fourier dans $L^2([0, 1])$ et complétude des bases . . . . .	606
9.2.2	Démonstration de la complétude de la base $\{\phi_n(x)\}$ . . . . .	612
9.3	Bases hilbertiennes et polynômes orthogonaux . . . . .	615
9.3.1	Exemples de bases hilbertiennes . . . . .	615
9.3.2	Polynômes orthogonaux . . . . .	617
9.3.3	Séries de Fourier, application 1 : l'équation de propagation de la chaleur . . . . .	627
9.3.4	Séries de Fourier, application 2 : l'équation d'une corde vibrante . . . . .	631

9.4	Opérateurs dans un espace de Hilbert . . . . .	635
9.4.1	Opérateurs . . . . .	635
9.4.2	Opérateur adjoint . . . . .	636
9.4.3	Opérateur hermitien . . . . .	638
9.4.4	Opérateurs unitaires . . . . .	640
9.5	Application : réponse linéaire, fonction de Green . . . . .	650
9.5.1	Dynamique de relaxation . . . . .	650
9.5.2	Oscillateur harmonique . . . . .	654
9.5.3	Le cas général . . . . .	656
<b>10</b>	<b>ÉLÉMENTS D'ANALYSE DES DISTRIBUTIONS</b>	<b>663</b>
10.1	Fonctions généralisées et distributions : définitions, opérations, formes limites	663
10.1.1	Introduction . . . . .	663
10.1.2	Définitions et opérations sur les distributions . . . . .	666
10.1.3	Distributions singulières comme limites de distributions régulières . . . . .	668
10.1.4	Dérivée d'une fonction avec une discontinuité . . . . .	670
10.1.5	Autres formes limites de $\delta(x)$ . . . . .	671
10.2	Une suite d'exemples de distributions singulières . . . . .	674
10.2.1	Les fonctions $\text{sgn}(x)$ , $1_{a,b}(x)$ , $ x $ , etc. vues comme des distributions singulières . . . . .	674
10.2.2	Les distributions $\delta_+(x)$ , $\delta_-(x)$ , $\text{vp}\frac{1}{x}$ . . . . .	675
10.3	Étude approfondie de la fonction $\delta(x)$ . . . . .	683
10.3.1	Dérivées de $\delta(x)$ . . . . .	683
10.3.2	Application : équation de Schrödinger avec un potentiel $U(x) = \lambda \delta(x)$	686
10.4	Transformation de Fourier des distributions. Convolution des distributions . . . . .	692
10.4.1	Introduction . . . . .	692
10.4.2	Exemples sur les transformations de Fourier des distributions singulières . . . . .	692
10.4.3	Convolution des distributions . . . . .	694
10.5	Fonction $\delta(\vec{r})$ de Dirac dans l'espace tridimensionnel . . . . .	696
10.5.1	Définitions et propriétés . . . . .	696
10.5.2	Remarque mathématique justifiant l'introduction de la fonction $\delta(\vec{r})$ . . . . .	697
10.5.3	Application en l'électrostatique . . . . .	699
<b>11</b>	<b>SUJETS D'EXAMENS CORRIGÉS</b>	<b>701</b>
11.1	Analyse vectorielle . . . . .	701
11.2	Équations différentielles . . . . .	717
11.3	Algèbre linéaire . . . . .	718
11.4	Analyse réelle : suites et séries . . . . .	722
11.5	Analyse réelle : intégrales . . . . .	727
11.6	Notions de théorie de probabilités . . . . .	731
11.7	Analyse complexe . . . . .	735
11.8	Transformations de Fourier et de Laplace . . . . .	743
11.9	Espace de Hilbert . . . . .	751
11.10	Éléments d'analyse des distributions . . . . .	756

## AVANT-PROPOS

Ce livre est fondé, en grande partie, sur les notes des différents cours que j'ai donné progressivement, période par période, à l'Université Pierre et Marie Curie (UPMC) entre 1996 et 2017.

À l'origine du projet se trouvent mes anciens étudiants ; Axel Courtat et Gaëtan Gauthier qui ont fortement apprécié les cours et ont beaucoup insisté sur l'idée de transformer les notes de mes cours en un livre. Finalement, ils m'ont convaincu de l'utilité d'un tel ouvrage pour les futurs étudiants et nous avons réalisé ce projet ensemble.

Pendant mes années d'enseignements, j'ai beaucoup bénéficié des compétences de mes collègues. Ils sont trop nombreux pour tous les évoquer.

Je suis particulièrement reconnaissant envers Jérôme Sirven, pour le travail que nous avons effectués ensemble durant 12 ans. Avec lui ainsi qu'avec d'autres collègues, nous avons enseigné les quatre parties de ces cours, qui correspondent aux chapitres 1, 2, 3 et 6. Nous avons développé, Jérôme et moi, une grande majorité des exercices des chapitres 1 à 3 et une partie des cours sur les équations différentielles (chapitre 2).

Une autre contribution importante dans ces enseignements est dûe à Paul Ravary et Richard Wilson qui ont développé des exercices de la partie probabilité (chapitre 6). J'ai beaucoup appris à leur contact.

L'ambiance dans mon laboratoire (LPTHE), à Jussieu, a été également très positive, encourageante. Tout particulièrement, je suis reconnaissant envers mon collègue Marco Picco pour son soutien permanent, dans nos collaborations de recherche, dans les enseignements et pour le soutien de tout genre pendant mon travail sur le livre.

Finalement, toutes mes notes d'enseignement, anciennes et actuelles, pendant le travail sur le livre, ont été tapées et préparées à partir de mes notes manuscrites en format "brouillon", par ma femme Valentina Dotsenko. En plus des notes d'enseignements, elle avait préparé tous les articles de recherche, au cours de ma carrière, ceci en trois langues (plus  $\LaTeX$ ), tout en corrigeant les fautes dans les équations. Grand merci à elle.

Vladimir Dotsenko

Au cours de notre formation universitaire, nous avons suivi et appliqué, de manière régulière et approfondie, l'ensemble des méthodes proposées dans cet ouvrage. L'intérêt de ces méthodes mathématiques est qu'elles furent développées en premier lieu pour la résolution pratique des équations rencontrées lors d'études concrètes en physique, tant théoriques qu'expérimentales. Il est impossible de comprendre les bases des théories physiques (électromagnétisme, physique statistique, physique quantique, etc.) sans une bonne compréhension des mathématiques sur lesquelles elles reposent. Ces méthodes mathématiques pour la physique ont la volonté de rendre accessible aux étudiants le langage de la physique actuelle. Cela se fait autour de notions, d'exemples d'illustration et d'exercices d'application de difficulté croissante, dont certains sont directement appliqués à des phénomènes physiques. C'est cette construction qui fait la grande force de ces méthodes.

Pour ma part (Axel Courtat), ces méthodes m'ont été et me sont encore d'une utilité primordiale lors de ma formation en physique théorique. Je travaille avec ces méthodes depuis quatre ans, dans l'ordre qui est présenté dans ce livre. Elles m'ont d'abord servi de manière cruciale tout au long de mes études, pour la résolution mathématique des nombreuses équations que l'on trouve dans tous les enseignements d'une formation en physique. Mais elles m'ont été tout aussi utiles lors des différents stages de recherche que j'ai effectué, sur des sujets théoriques d'un niveau bien plus élevé que celui requis pour les apprendre. Ces méthodes ne se limitent pas à cet ouvrage et m'ont apporté une aisance calculatoire indispensable.

Pour ma part (Gaëtan Gauthier), j'ai été confronté l'ensemble à des méthodes présentées dans ce livre, de nombreuses fois, depuis que je les ai découvertes, depuis quatre ans pendant mes études en physique. Elle jouent un rôle crucial dans le développement et la traduction de l'Univers en équations. Mon parcours est plus expérimental mais ces méthodes m'ont été et me sont encore extrêmement utiles. Pour comprendre et appliquer les méthodes mathématiques, la répétition est un principe clé (surtout lorsque le problème se complexifie).

Bonne lecture,  
A. Courtat & G. Gauthier

**Cette seconde édition du livre a fait l'objet de plusieurs ajouts :**

1. Remarque sur le d'alembertien, (section 1.8.1)
2. Identités de Green (section 1.9)
3. Application physique de l'analyse complexe (sous-section 7.4.8)
4. Et surtout, le 11<sup>e</sup> chapitre qui contient des sujets d'examens corrigés relatifs à tous les chapitres du livre.

Ces sujets d'examens corrigés constituent un vaste terrain supplémentaire pour s'entraîner sur les méthodes présentes dans le livre.

# Chapitre 1

## ANALYSE VECTORIELLE

### 1.1 Rappel, définitions

#### 1.1.1 Systèmes de coordonnées

Un point  $P$  dans l'espace réel à trois dimensions spatiales  $\mathbb{R}^3$ , sera représenté par un vecteur  $\vec{r} = \vec{OP}$ , avec des composantes  $(x, y, z)$  qui sont les **coordonnées cartésiennes** de ce point, (Figure 1.1) :

$$\vec{OP} \equiv \vec{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad (1.1.1.1)$$

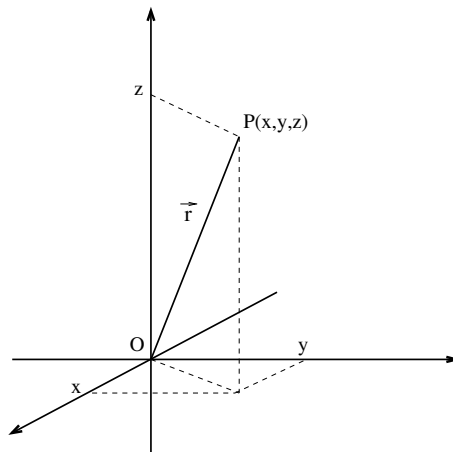


FIGURE 1.1 – Coordonnées cartésiennes dans l'espace  $\mathbb{R}^3$ .

Dans les **coordonnées sphériques**, ce même point sera représenté par les paramètres  $(r, \theta, \phi)$ , (Figure 1.2), tels que :

$$\begin{aligned} r &= \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \\ \theta &= \arctan \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{z} = \arcsin \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \\ \phi &= \arctan \frac{y}{x} = \arcsin \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} \end{aligned} \quad (1.1.1.2)$$

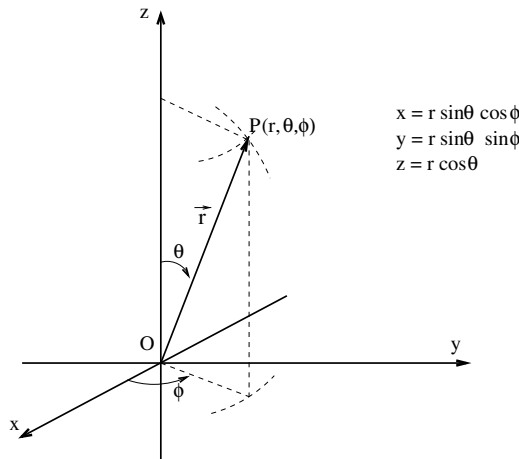


FIGURE 1.2 – Coordonnées sphériques.

Dans les **coordonnées cylindriques** le vecteur  $\vec{r}$  représentant ce même point  $P$ , aura comme paramètres  $(\rho, \phi, z)$ , (Figure 1.3), définis tels que :

$$\begin{aligned} \rho &= \sqrt{x^2 + y^2} \\ \phi &= \arctan \frac{x}{y} = \arcsin \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} \\ z &= z \end{aligned} \quad (1.1.1.3)$$

Dans le cas de l'espace réel à deux dimensions spatiales  $\mathbb{R}^2$ , le point  $P$  sera représenté par un vecteur  $\vec{p}$ , avec des composantes  $(x, y)$  qui sont les **coordonnées cartésiennes** de ce point, (Figure 1.4) :

$$\vec{OP} = \vec{p} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad (1.1.1.4)$$

Dans les **coordonnées polaires** (dans  $\mathbb{R}^2$ ), ce même point sera représenté par les paramètres  $(\rho, \phi)$ , (Figure 1.5), tels que :

$$\begin{aligned} \rho &= \sqrt{x^2 + y^2} \\ \phi &= \arctan \frac{x}{y} = \arcsin \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} \end{aligned} \quad (1.1.1.5)$$

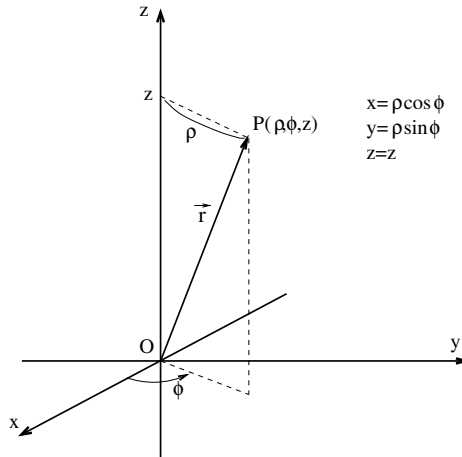
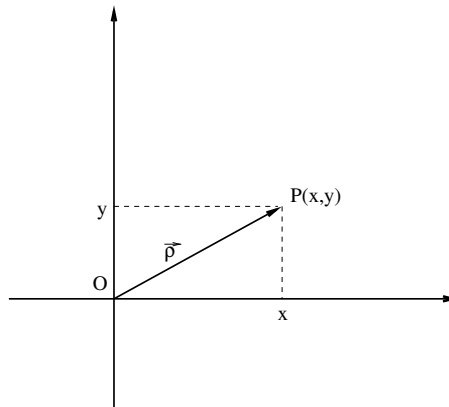


FIGURE 1.3 – Coordonnées cylindriques.

FIGURE 1.4 – Coordonnées cartésiennes dans l'espace  $\mathbb{R}^2$ .

### 1.1.2 Fonctions scalaires et fonctions vectorielles

Une **fonction**  $f(\vec{r}) \equiv f(x, y, z)$  définie dans  $\mathbb{R}^3$ , est une règle particulière qui fait correspondre les points de  $\mathbb{R}^3$  et les nombres réels (ou complexes). Symboliquement :

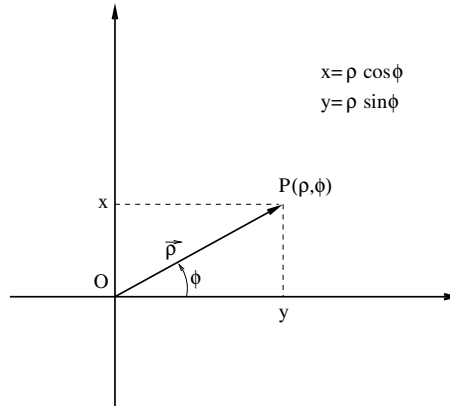
$$f(\vec{r}) \equiv f(x, y, z) : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R} \text{ (ou } \mathbb{C}) \quad (1.1.2.1)$$

*Exemples*

1.

$$f(\vec{r}) = \frac{1}{r} \equiv \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \quad (1.1.2.2)$$

représente le potentiel de Coulomb, en électrostatique ( $U(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r}$ ), produit par la charge électrique ponctuelle placée à l'origine (nous avons posé  $q/4\pi\epsilon_0 \rightarrow 1$ , pour simplifier les formules).

FIGURE 1.5 – Coordonnées polaires dans l'espace  $\mathbb{R}^2$ .

2.

$$g(\vec{r}) = \frac{1}{a^2 + r^2} \equiv \frac{1}{a^2 + x^2 + y^2 + z^2} \quad (1.1.2.3)$$

$a$  est un paramètre réel constant.

3.

$$h(\vec{r}) = \frac{\vec{p} \cdot \vec{r}}{r^3} \equiv \frac{p_x x + p_y y + p_z z}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} \quad (1.1.2.4)$$

où  $\vec{p} = (p_x, p_y, p_z)$  est un paramètre vectoriel (l'ensemble de trois paramètres réels que nous notons  $p_x, p_y, p_z$ ),  $h(\vec{r})$  est un potentiel électrique créé par un petit dipôle placé à l'origine et  $\vec{p} \cdot \vec{r}$  est un produit scalaire usuel.

Dans la suite, nous allons appeler  $f(\vec{r})$  **fonction scalaire** pour la différencier des fonctions vectorielles que l'on peut également définir dans l'espace  $\mathbb{R}^3$ . Une **fonction vectorielle** (ou un **champ de vecteurs**, dans la terminologie des physiciens)  $\vec{A}(\vec{r}) \equiv \vec{A}(x, y, z)$  définie dans  $\mathbb{R}^3$ , est une règle particulière qui fait correspondre les points de  $\mathbb{R}^3$  et les points d'un autre espace  $\mathbb{R}^3$ , ou du même espace.

$$\vec{A}(\vec{r}) \equiv \vec{A}(x, y, z) = \begin{pmatrix} A_x(x, y, z) \\ A_y(x, y, z) \\ A_z(x, y, z) \end{pmatrix} \quad (1.1.2.5)$$

En d'autres termes, une fonction vectorielle est un ensemble de trois fonctions scalaires, notées  $A_x(x, y, z)$ ,  $A_y(x, y, z)$  et  $A_z(x, y, z)$ .

*Exemples*

1.

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{\vec{r}}{r^3} \quad (1.1.2.6)$$

Détaillons :

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{r^3} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{x}{r^3} \\ \frac{y}{r^3} \\ \frac{z}{r^3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{x}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} \\ \frac{y}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} \\ \frac{z}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} \end{pmatrix} \quad (1.1.2.7)$$



Dans cet exemple  $E_x(x, y, z) = x/(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}$ , etc.  $\vec{E}(\vec{r})$  est un champ électrique créé par une charge ponctuelle placée à l'origine (toujours en admettant que  $q/4\pi\epsilon_0 \rightarrow 1$ ).

2.

$$\vec{G}(\vec{r}) = \frac{2\vec{r}}{(a^2 + r^2)^2} \quad (1.1.2.8)$$

Il est évident que dans le cas de l'espace bidimensionnel  $\mathbb{R}^2$ , une fonction vectorielle sera de la forme :

$$\vec{B}(\vec{\rho}) \equiv \vec{B}(x, y) = \begin{pmatrix} B_x(x, y) \\ B_y(x, y) \end{pmatrix} \quad (1.1.2.9)$$

qui correspond à un ensemble de deux fonctions scalaires dans  $\mathbb{R}^2$ .

*Exemple*

$$\vec{B}(\vec{\rho}) = \frac{\vec{\rho}}{\rho^2} = \frac{1}{\rho^2} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{x}{\rho^2} \\ \frac{y}{\rho^2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{x}{x^2+y^2} \\ \frac{y}{x^2+y^2} \end{pmatrix} \quad (1.1.2.10)$$

## 1.2 Bases mobiles dans les coordonnées curvilignes

### 1.2.1 Rappel sur la base des coordonnées cartésiennes

Dans les coordonnées cartésiennes, un vecteur quelconque  $\vec{p}$  de composantes  $(p_x, p_y, p_z)$  peut être représenté soit sous la forme présentée dans la section précédente, c'est-à-dire par une colonne :

$$\vec{p} = \begin{pmatrix} p_x \\ p_y \\ p_z \end{pmatrix} \quad (1.2.1.1)$$

soit sous la forme d'une décomposition dans les vecteurs de la base :

$$\vec{p} = p_x \vec{e}_x + p_y \vec{e}_y + p_z \vec{e}_z \quad (1.2.1.2)$$

Les vecteurs  $\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z$ , montrés dans la Figure 1.6, forment une **base orthonormée de coordonnées cartésiennes**, à savoir :

$$\begin{aligned} \|\vec{e}_x\| &= \|\vec{e}_y\| = \|\vec{e}_z\| = 1 \\ \vec{e}_x \cdot \vec{e}_y &= \vec{e}_y \cdot \vec{e}_z = \vec{e}_z \cdot \vec{e}_x = 0 \end{aligned} \quad (1.2.1.3)$$

$\|\vec{e}_x\|$  représente le **module** (aussi la **norme**, ou encore **longueur**) du vecteur  $\vec{e}_x$  :

$$\|\vec{e}_x\|^2 = \vec{e}_x \cdot \vec{e}_x, \quad \|\vec{e}_x\| = \sqrt{\vec{e}_x \cdot \vec{e}_x} \quad (1.2.1.4)$$

Très souvent, les vecteurs  $\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z$  de la base de coordonnées cartésiennes sont notés respectivement  $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ , c'est-à-dire :

$$\vec{e}_x \equiv \vec{i}, \quad \vec{e}_y \equiv \vec{j}, \quad \vec{e}_z \equiv \vec{k} \quad (1.2.1.5)$$

La forme (1.2.1.1) du vecteur  $\vec{p}$ , représenté sous la forme d'une colonne des composantes  $p_x, p_y, p_z$ , correspond implicitement à la décomposition (équation (1.2.1.2)) de  $\vec{p}$  dans les vecteurs de la base.

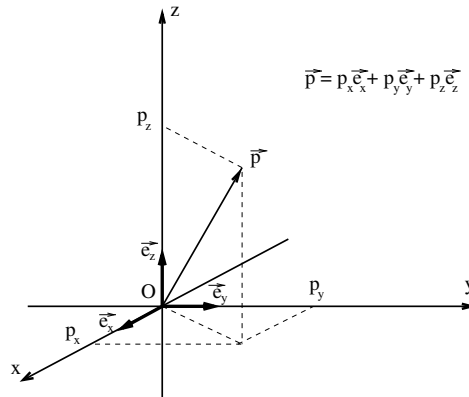


FIGURE 1.6 – Décomposition d'un vecteur  $\vec{p}$  quelconque dans l'espace  $\mathbb{R}^3$  sur la base cartésienne formée par les vecteurs  $(\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$ .

## 1.2.2 Bases mobiles des coordonnées curvilignes

Lorsque la symétrie du problème est appropriée, il est parfois plus facile de faire des calculs avec d'autres coordonnées. Par exemple les coordonnées sphériques et cylindriques sont souvent utilisées dans le cas de l'espace  $\mathbb{R}^3$ . Dans l'espace  $\mathbb{R}^2$ , les coordonnées polaires sont employées très souvent.

Par la suite nous allons définir des bases orthonormées qui permettent de décomposer les vecteurs, afin de les exprimer selon ces coordonnées. Autrement dit, nous allons définir des bases qui remplacent la suite des vecteurs  $(\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$  des coordonnées cartésiennes.

Nous nous placerons dans un premier temps dans le cadre plus général des coordonnées curvilignes quelconques de l'espace  $\mathbb{R}^3$ , mais qui sont soumises à la condition qu'elles soient localement orthogonales. Si  $(u_1, u_2, u_3)$  sont ces nouvelles coordonnées, alors l'orthogonalité locale implique que les vecteurs suivants soient orthogonaux entre eux :

$$\vec{e}_1 = \frac{\partial \vec{r}}{\partial u_1}, \quad \vec{e}_2 = \frac{\partial \vec{r}}{\partial u_2}, \quad \vec{e}_3 = \frac{\partial \vec{r}}{\partial u_3} \quad (1.2.2.1)$$

Dans l'équation (1.2.2.1),  $\vec{r}$  est censé s'exprimer en fonction des nouvelles coordonnées :  $\vec{r} = \vec{r}(u_1, u_2, u_3) = (x(u_1, u_2, u_3), y(u_1, u_2, u_3), z(u_1, u_2, u_3))$ .

Prenons un exemple simple, celui de l'espace bidimensionnel  $\mathbb{R}^2$  et des coordonnées polaires. Nous notons  $\vec{\rho}$  les vecteurs qui représentent les points d'espace  $\mathbb{R}^2$ , au lieu de  $\vec{r}$  de  $\mathbb{R}^3$ . Alors :

$$\vec{\rho} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \rho \cos \phi \\ \rho \sin \phi \end{pmatrix} \quad (1.2.2.2)$$

$\rho$  et  $\phi$  étant les coordonnées polaires, curvilignes, de l'espace  $\mathbb{R}^2$ . Les vecteurs  $\vec{e}_1$  et  $\vec{e}_2$ , analogues aux vecteurs de l'équation (1.2.2.1), sont déterminés comme suit :

$$\vec{e}_1 \equiv \vec{e}_\rho = \frac{\partial \vec{\rho}}{\partial \rho} = \frac{\partial}{\partial \rho} \begin{pmatrix} \rho \cos \phi \\ \rho \sin \phi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \phi \\ \sin \phi \end{pmatrix} \quad (1.2.2.3)$$

$$\vec{e}_2 \equiv \vec{e}_\phi = \frac{\partial \vec{\rho}}{\partial \phi} = \frac{\partial}{\partial \phi} \begin{pmatrix} \rho \cos \phi \\ \rho \sin \phi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\rho \sin \phi \\ \rho \cos \phi \end{pmatrix} \quad (1.2.2.4)$$

Ces vecteurs sont montrés dans la Figure 1.7. Ils sont orthogonaux entre eux, en tout point  $\vec{\rho}$  de l'espace  $\mathbb{R}^2$ .

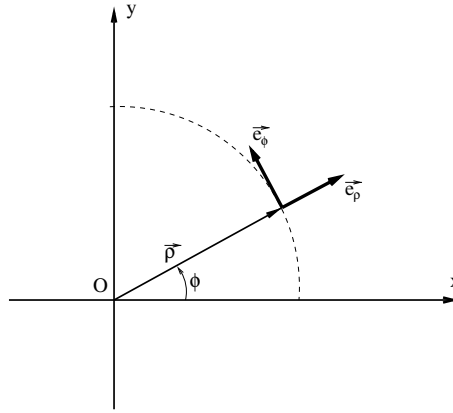


FIGURE 1.7 – Base mobile  $(\vec{e}_\rho, \vec{e}_\phi)$  des coordonnées polaires.

Il est également facile de déterminer les vecteurs  $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$  (équation (1.2.2.1)) pour des coordonnées sphériques et cylindriques de l'espace  $\mathbb{R}^3$ .

Pour les coordonnées sphériques de la Figure 1.2 :

$$\vec{e}_1 \equiv \vec{e}_r = \frac{\partial \vec{r}}{\partial r} = \frac{\partial}{\partial r} \begin{pmatrix} r \sin \theta \cos \phi \\ r \sin \theta \sin \phi \\ r \cos \theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin \theta \cos \phi \\ \sin \theta \sin \phi \\ \cos \theta \end{pmatrix} \quad (1.2.2.5)$$

$$\vec{e}_2 \equiv \vec{e}_\theta = \frac{\partial \vec{r}}{\partial \theta} = \frac{\partial}{\partial \theta} \begin{pmatrix} r \sin \theta \cos \phi \\ r \sin \theta \sin \phi \\ r \cos \theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r \cos \theta \cos \phi \\ r \cos \theta \sin \phi \\ -r \sin \theta \end{pmatrix} \quad (1.2.2.6)$$

$$\vec{e}_3 \equiv \vec{e}_\phi = \frac{\partial \vec{r}}{\partial \phi} = \frac{\partial}{\partial \phi} \begin{pmatrix} r \sin \theta \cos \phi \\ r \sin \theta \sin \phi \\ r \cos \theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -r \sin \theta \sin \phi \\ r \sin \theta \cos \phi \\ 0 \end{pmatrix} \quad (1.2.2.7)$$

Ces vecteurs sont montrés dans la Figure 1.8. Il est facile de vérifier qu'ils sont orthogonaux pour tout  $\vec{r}$  (tous  $r, \theta, \phi$ ).

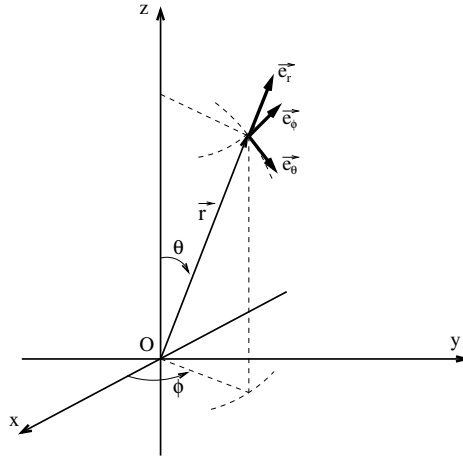
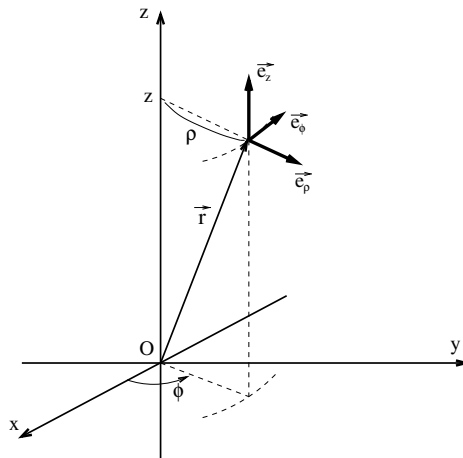
Pour les coordonnées cylindriques (Figure 1.3) on trouve :

$$\vec{e}_1 \equiv \vec{e}_\rho = \frac{\partial \vec{r}}{\partial \rho} = \frac{\partial}{\partial \rho} \begin{pmatrix} \rho \cos \phi \\ \rho \sin \phi \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \phi \\ \sin \phi \\ 0 \end{pmatrix} \quad (1.2.2.8)$$

$$\vec{e}_2 \equiv \vec{e}_\phi = \frac{\partial \vec{r}}{\partial \phi} = \frac{\partial}{\partial \phi} \begin{pmatrix} \rho \cos \phi \\ \rho \sin \phi \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\rho \sin \phi \\ \rho \cos \phi \\ 0 \end{pmatrix} \quad (1.2.2.9)$$

$$\vec{e}_3 \equiv \vec{e}_z = \frac{\partial \vec{r}}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial z} \begin{pmatrix} \rho \cos \phi \\ \rho \sin \phi \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (1.2.2.10)$$

voir la Figure 1.9. Ces vecteurs sont orthogonaux entre eux.

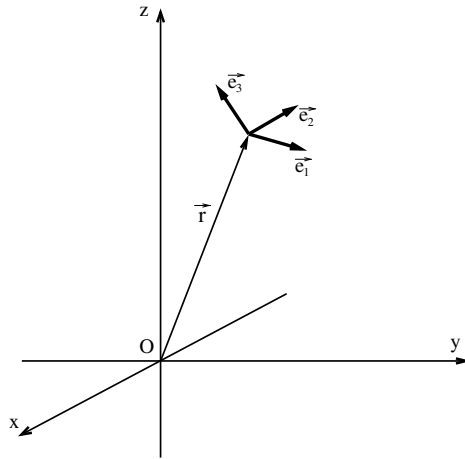
FIGURE 1.8 – Base mobile  $(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_\phi)$  des coordonnées sphériques.FIGURE 1.9 – Base mobile  $(\vec{e}_\rho, \vec{e}_\phi, \vec{e}_z)$  des coordonnées cylindriques.

Revenons au cadre général des coordonnées curvilignes quelconques  $u_1, u_2, u_3$  (localement orthogonales) et des vecteurs  $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$  (équation (1.2.2.1)). Ces vecteurs forment une **base locale**, ou une **base mobile**, pour un point d'espace donné (Figure 1.10). Elle sert à décomposer les vecteurs : à les exprimer dans ces coordonnées. Cette base est censée être orthogonale mais elle n'est pas nécessairement normée. Autrement dit, en général  $\|\vec{e}_i\| \neq 1, i = 1, 2, 3$ .

Les **échelles** le long des axes de cette base locale sont définies par les modules (longueurs) des vecteurs  $\{\vec{e}_i\}$ . Nous allons les noter  $e_i \equiv \|\vec{e}_i\|, i = 1, 2, 3$ . Ces quantités sont appelées **facteurs d'échelle** ou **facteurs géométriques** des coordonnées curvilignes correspondantes.

Nous introduisons également les vecteurs normés de cette base locale :

$$\hat{e}_1, \hat{e}_2, \hat{e}_3 \quad (1.2.2.11)$$

FIGURE 1.10 – Base mobile des coordonnées quelconques  $u_1, u_2, u_3$ , au point  $\vec{r}$  dans  $\mathbb{R}^3$ .

$\|\hat{e}_1\| = \|\hat{e}_2\| = \|\hat{e}_3\| = 1$ , de telle façon que :

$$\begin{aligned} \hat{e}_1 &= \frac{\vec{e}_1}{e_1}, & \hat{e}_2 &= \frac{\vec{e}_2}{e_2}, & \hat{e}_3 &= \frac{\vec{e}_3}{e_3}, \\ \vec{e}_1 &= e_1 \hat{e}_1, & \vec{e}_2 &= e_2 \hat{e}_2, & \vec{e}_3 &= e_3 \hat{e}_3 \end{aligned} \quad (1.2.2.12)$$

Pour des coordonnées sphériques on trouve, à partir des équations (1.2.2.5)–(1.2.2.7), les facteurs géométriques suivants :

$$e_1 \equiv e_r = 1, \quad e_2 \equiv e_\theta = r, \quad e_3 \equiv e_\phi = r \sin \theta \quad (1.2.2.13)$$

Pour des coordonnées cylindriques (équations (1.2.2.8)–(1.2.2.10)), on obtient :

$$e_1 \equiv e_\rho = 1, \quad e_2 \equiv e_\phi = \rho, \quad e_3 \equiv e_z = 1 \quad (1.2.2.14)$$

Observons par ailleurs que le **volume élémentaire**, ou la **mesure d'intégration**, dans les intégrales dans l'espace  $\mathbb{R}^3$ , est égal au produit des facteurs géométriques multipliés par les différentielles des coordonnées. Dans le cas général des coordonnées curvilignes orthogonales :

$$dV \equiv d^3\vec{r} = e_1 e_2 e_3 du_1 du_2 du_3 \quad (1.2.2.15)$$

Les notations  $dV$  et  $d^3\vec{r}$  sont équivalentes. Les deux sont utilisées couramment dans la littérature physique.

En effet, on peut réécrire les équations (1.2.2.1), qui définissent les vecteurs  $\{\vec{e}_i\}$ , de la manière suivante :

$$d\vec{r}_{(1)} = \vec{e}_1 du_1, \quad d\vec{r}_{(2)} = \vec{e}_2 du_2, \quad d\vec{r}_{(3)} = \vec{e}_3 du_3 \quad (1.2.2.16)$$

où les petits vecteurs  $d\vec{r}_{(i)}$ ,  $i = 1, 2, 3$ , représentent les petits déplacements, à partir du point  $\vec{r}$  dans  $\mathbb{R}^3$ , qui correspondent à des variations des coordonnées  $du_i$ ,  $i = 1, 2, 3$ . Les trois vecteurs  $d\vec{r}_{(1)}$ ,  $d\vec{r}_{(2)}$ ,  $d\vec{r}_{(3)}$  sont orthogonaux entre eux, étant proportionnels aux vecteurs  $\vec{e}_1$ ,  $\vec{e}_2$ ,  $\vec{e}_3$  de la base locale. Le volume élémentaire (dans des intégrales) s'obtient par le produit des longueurs

des trois vecteurs  $\{d\vec{r}_{(i)}\}$  (équation (1.2.2.16)), ce qui nous donne la mesure d'intégration dans l'équation (1.2.2.15).

Dans les coordonnées sphériques :

$$dV \equiv d^3\vec{r} = e_r e_\theta e_\phi dr d\theta d\phi = r^2 \sin \theta dr d\theta d\phi \quad (1.2.2.17)$$

Dans les coordonnées cylindriques :

$$dV \equiv d^3\vec{r} = e_\rho e_\phi e_z d\rho d\phi dz = \rho d\rho d\phi dz \quad (1.2.2.18)$$

Finalement, les bases mobiles orthonormées de coordonnées sphériques et cylindriques sont formées par les vecteurs

$$\hat{e}_r = \frac{\vec{e}_r}{e_r}, \quad \hat{e}_\theta = \frac{\vec{e}_\theta}{e_\theta}, \quad \hat{e}_\phi = \frac{\vec{e}_\phi}{e_\phi} \quad (1.2.2.19)$$

et

$$\hat{e}_\rho = \frac{\vec{e}_\rho}{e_\rho}, \quad \hat{e}_\phi = \frac{\vec{e}_\phi}{e_\phi}, \quad \hat{e}_z = \frac{\vec{e}_z}{e_z} \quad (1.2.2.20)$$

Selon la base cartésienne, les vecteurs de la **base mobile orthonormée de coordonnées sphériques**, s'expriment comme suit :

$$\hat{e}_r = \begin{pmatrix} \sin \theta \cos \phi \\ \sin \theta \sin \phi \\ \cos \theta \end{pmatrix}, \quad \hat{e}_\theta = \begin{pmatrix} \cos \theta \cos \phi \\ \cos \theta \sin \phi \\ -\sin \theta \end{pmatrix}, \quad \hat{e}_\phi = \begin{pmatrix} -\sin \theta \sin \phi \\ \sin \theta \cos \phi \\ 0 \end{pmatrix} \quad (1.2.2.21)$$

Ou encore :

$$\begin{aligned} \hat{e}_r &= \sin \theta \cos \phi \vec{e}_x + \sin \theta \sin \phi \vec{e}_y + \cos \theta \vec{e}_z \\ \hat{e}_\theta &= \cos \theta \cos \phi \vec{e}_x + \cos \theta \sin \phi \vec{e}_y - \sin \theta \vec{e}_z \\ \hat{e}_\phi &= -\sin \theta \sin \phi \vec{e}_x + \sin \theta \cos \phi \vec{e}_y + 0 \vec{e}_z \end{aligned} \quad (1.2.2.22)$$

Tandis que les vecteurs de la **base mobile orthonormée de coordonnées cylindriques**, s'expriment selon la base cartésienne tels que :

$$\vec{e}_\rho = \begin{pmatrix} \cos \phi \\ \sin \phi \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{e}_\phi = \begin{pmatrix} -\rho \sin \phi \\ \rho \cos \phi \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{e}_z = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (1.2.2.23)$$

ou de manière équivalente

$$\begin{aligned} \hat{e}_\rho &= \cos \phi \vec{e}_x + \sin \phi \vec{e}_y + 0 \vec{e}_z \\ \hat{e}_\phi &= -\sin \phi \vec{e}_x + \cos \phi \vec{e}_y + 0 \vec{e}_z \\ \hat{e}_z &= 0 \vec{e}_x + 0 \vec{e}_y + \vec{e}_z \end{aligned} \quad (1.2.2.24)$$

Il est évident que la **base mobile orthonormée de coordonnées polaires** est formée par les vecteurs :

$$\hat{e}_\rho = \begin{pmatrix} \cos \phi \\ \sin \phi \end{pmatrix}, \quad \hat{e}_\phi = \begin{pmatrix} -\sin \phi \\ \cos \phi \end{pmatrix} \quad (1.2.2.25)$$

également sous la forme suivante

$$\begin{aligned} \hat{e}_\rho &= \cos \phi \vec{e}_x + \sin \phi \vec{e}_y \\ \hat{e}_\phi &= -\sin \phi \vec{e}_x + \cos \phi \vec{e}_y \end{aligned} \quad (1.2.2.26)$$

Par la suite nous n'allons utiliser que des bases orthonormées. Pour simplifier les écritures, une fois les vecteurs définis par les méthodes exposées précédemment, nous allons supprimer les accents circonflexes des vecteurs des bases  $\hat{e}_r \rightarrow \vec{e}_r$ ,  $\hat{e}_\theta \rightarrow \vec{e}_\theta$  etc.

### 1.2.3 Les relations entre les vecteurs des bases de coordonnées cartésiennes, cylindriques et sphériques

D'après les projections orthogonales des figures 1.11 et 1.12 on trouve les décompositions suivantes :

$$\begin{aligned}\vec{e}_\rho &= \cos \phi \vec{e}_x + \sin \phi \vec{e}_y \\ \vec{e}_\phi &= -\sin \phi \vec{e}_x + \cos \phi \vec{e}_y\end{aligned}\quad (1.2.3.1)$$

dans le plan  $(x,y)$  (Figure 1.11), et

$$\begin{aligned}\vec{e}_r &= \sin \theta \vec{e}_\rho + \cos \theta \vec{e}_z \\ \vec{e}_\theta &= \cos \theta \vec{e}_\rho - \sin \theta \vec{e}_z\end{aligned}\quad (1.2.3.2)$$

dans le plan méridien (Figure 1.12).

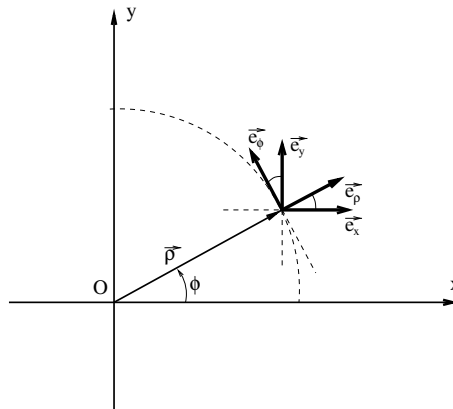


FIGURE 1.11 – Plan  $(x,y)$ .

Nous observons que les décompositions inverses s'obtiennent par la transposition des matrices des coefficients dans les équations (1.2.3.1) et (1.2.3.2). On trouve :

$$\begin{aligned}\vec{e}_x &= \cos \phi \vec{e}_\rho - \sin \phi \vec{e}_\phi \\ \vec{e}_y &= \sin \phi \vec{e}_\rho + \cos \phi \vec{e}_\phi\end{aligned}\quad (1.2.3.3)$$

et

$$\begin{aligned}\vec{e}_\rho &= \sin \theta \vec{e}_r + \cos \theta \vec{e}_\theta \\ \vec{e}_z &= \cos \theta \vec{e}_r - \sin \theta \vec{e}_\theta\end{aligned}\quad (1.2.3.4)$$

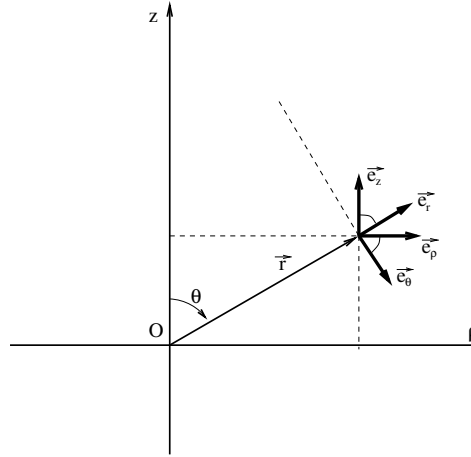


FIGURE 1.12 – Le **plan méridien**, dans cette figure, est le plan qui passe par l'axe  $z$  et le vecteur  $\vec{r}$  dans les figures 1.8 et 1.9. Autrement dit, le plan méridien est le plan  $(x, z)$  tourné selon l'angle  $\phi$  autour de l'axe  $z$  des figures 1.8 et 1.9. La variable  $\rho$  de l'axe horizontal correspond à la distance de l'axe  $z$ , sur le plan.

En effet, les décompositions dans les équations (1.2.3.1) et (1.2.3.3) peuvent être réécrites comme suit :

$$\begin{aligned}\vec{e}_\rho &= (\vec{e}_\rho \cdot \vec{e}_x) \vec{e}_x + (\vec{e}_\rho \cdot \vec{e}_y) \vec{e}_y \\ \vec{e}_\phi &= (\vec{e}_\phi \cdot \vec{e}_x) \vec{e}_x + (\vec{e}_\phi \cdot \vec{e}_y) \vec{e}_y\end{aligned}\quad (1.2.3.5)$$

et

$$\begin{aligned}\vec{e}_x &= (\vec{e}_x \cdot \vec{e}_\rho) \vec{e}_\rho + (\vec{e}_x \cdot \vec{e}_\phi) \vec{e}_\phi \\ \vec{e}_y &= (\vec{e}_y \cdot \vec{e}_\rho) \vec{e}_\rho + (\vec{e}_y \cdot \vec{e}_\phi) \vec{e}_\phi\end{aligned}\quad (1.2.3.6)$$

Les produits scalaires sont symétriques :  $(\vec{e}_x \cdot \vec{e}_\rho) = (\vec{e}_\rho \cdot \vec{e}_x)$ , etc. En comparant les deux décompositions on voit clairement que les matrices de coefficients, dans les équations (1.2.3.5) et (1.2.3.6), sont transposées, l'une par rapport à l'autre.

Autrement, on retrouve les décompositions inverses par les projections correspondantes dans les figures 1.11 et 1.12 .

De même, les décompositions des vecteurs  $\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z$  dans la base sphérique  $\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_\phi$  s'obtiennent par la transposition de la matrice des coefficients dans l'équation (1.2.2.2). On trouve :

$$\begin{aligned}\vec{e}_x &= \sin \theta \cos \phi \vec{e}_r + \cos \theta \cos \phi \vec{e}_\theta - \sin \theta \sin \phi \vec{e}_\phi \\ \vec{e}_y &= \sin \theta \sin \phi \vec{e}_r + \cos \theta \sin \phi \vec{e}_\theta + \sin \theta \cos \phi \vec{e}_\phi \\ \vec{e}_z &= \cos \theta \vec{e}_r - \sin \theta \vec{e}_\theta + 0 \vec{e}_\phi\end{aligned}\quad (1.2.3.7)$$

Observons que l'on peut également retrouver les décompositions (1.2.3.7) par les décompositions, dans un premier temps, des vecteurs  $\vec{e}_x, \vec{e}_y$  dans la base de  $\vec{e}_\rho, \vec{e}_\phi$  (équation (1.2.3.3)), le vecteur  $\vec{e}_z$  restant inchangé. Et ensuite en décomposant les vecteurs  $\vec{e}_\rho, \vec{e}_z$  dans la base de  $\vec{e}_r, \vec{e}_\theta$  (équation (1.2.3.4)), le vecteur  $\vec{e}_\phi$  restant inchangé.



En résumé, on peut trouver toutes les relations entre les vecteurs des trois bases, cartésienne, cylindrique et sphérique, en employant les projections orthogonales des figures 1.11 et 1.12. Les vecteurs des bases mobiles, de coordonnées cylindriques et sphériques en particulier, ont initialement été définis dans la section 1.2.2 par les dérivées par rapport aux variables correspondantes. Mais, une fois les orientations de ces vecteurs établies et les facteurs géométriques déterminés, il est en principe possible de ne se servir que des projections orthogonales pour obtenir (ou retrouver) les relations entre tous ces vecteurs.

D'une manière générale, concernant les transformations des champs de vecteurs entre les différentes bases, les relations ci-dessous sont utiles en complément des décompositions des vecteurs de bases présentées précédemment :

$$\rho = r \sin \theta, \quad z = r \cos \theta \quad (1.2.3.8)$$

$$x = \rho \cos \phi, \quad y = \rho \sin \phi \quad (1.2.3.9)$$

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}, \quad \rho = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad r = \sqrt{\rho^2 + z^2} \quad (1.2.3.10)$$

$$\vec{r} = x\vec{e}_x + y\vec{e}_y + z\vec{e}_z = r\vec{e}_r \quad (1.2.3.11)$$

$$\vec{\rho} = x\vec{e}_x + y\vec{e}_y = \rho\vec{e}_\rho \quad (1.2.3.12)$$

$$-y\vec{e}_x + x\vec{e}_y = \rho\vec{e}_\phi \quad (1.2.3.13)$$

$$\vec{r} = x\vec{e}_x + y\vec{e}_y + z\vec{e}_z = \vec{\rho} + z\vec{e}_z = \rho\vec{e}_\rho + z\vec{e}_z \quad (1.2.3.14)$$

## 1.2.4 Exemples de projections des champs de vecteurs sur des bases mobiles

### Exemple 1

Soit le champ de vecteurs dans  $\mathbb{R}^2$  (Figure 1.13)

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} -y \\ x \end{pmatrix} \equiv -y\vec{e}_x + x\vec{e}_y \quad (1.2.4.1)$$

Ses décompositions dans les bases cartésienne et polaire sont montrées sur les figures 1.14 et 1.15.

À partir du champ  $\vec{v}$  exprimé en coordonnées cartésiennes (équation (1.2.4.1)), on peut passer vers son expression en coordonnées polaires de manière plus algébrique :

$$\begin{aligned} \vec{v} &= -y\vec{e}_x + x\vec{e}_y = -\rho \sin \phi (\cos \phi \vec{e}_\rho - \sin \phi \vec{e}_\phi) + \rho \cos \phi (\sin \phi \vec{e}_\rho + \cos \phi \vec{e}_\phi) \\ &= (\rho \sin^2 \phi + \rho \cos^2 \phi) \vec{e}_\phi = \rho \vec{e}_\phi, \quad \vec{v} = \rho \vec{e}_\phi \end{aligned} \quad (1.2.4.2)$$

Nous avons utilisé les décompositions des vecteurs  $\vec{e}_x$  et  $\vec{e}_y$  dans l'équation (1.2.3.3).

On trouve un accord avec la forme du champ  $\vec{v}$  en coordonnées polaires obtenue de manière graphique dans la figure 1.15.

### Exemple 2

Soit le champ de vecteurs dans  $\mathbb{R}^3$  (Figure 1.16)

$$\vec{w}(\vec{r}) = z\vec{e}_z \quad (1.2.4.3)$$

Dans la base cartésienne, sa décomposition est de la forme :

$$\vec{w}(\vec{r}) = 0\vec{e}_x + 0\vec{e}_y + z\vec{e}_z \equiv \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ z \end{pmatrix} \quad (1.2.4.4)$$

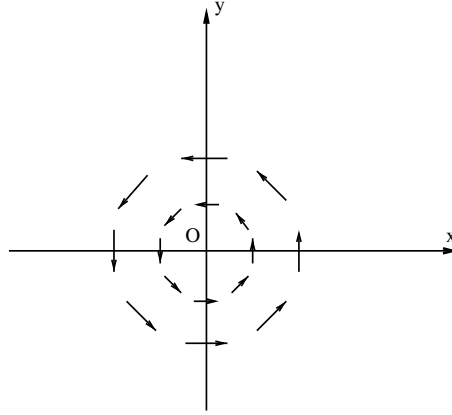


FIGURE 1.13 – Champ de vecteurs  $\vec{v} = \frac{1}{2}(-y\vec{e}_x + x\vec{e}_y)$  dans  $\mathbb{R}^2$ . Le facteur  $\frac{1}{2}$  a été ajouté pour simplifier l'image, la taille de flèches s'accordant plus ou moins à la formule. L'image du champ  $\vec{v} = -y\vec{e}_x + x\vec{e}_y$  sera la même mais avec des flèches deux fois plus longues.

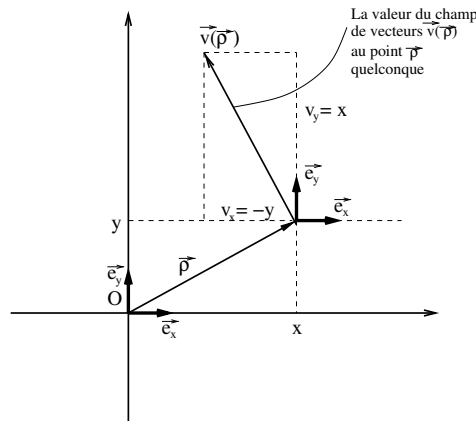


FIGURE 1.14 – Décomposition du champ de vecteurs  $\vec{v}(\vec{p}) = -y\vec{e}_x + x\vec{e}_y$  dans la base cartésienne  $(\vec{e}_x, \vec{e}_y)$  de  $\mathbb{R}^2$ .

Ses décompositions graphiques dans les bases mobiles des coordonnées sphériques et cylindriques sont données sur les figures 1.17 à 1.19.

Par la méthode algébrique on fait passer le champ  $\vec{w} = z\vec{e}_z$  vers les coordonnées sphériques de la manière suivante :

$$\vec{w} = z\vec{e}_z = r \cos \theta (\cos \theta \vec{e}_r - \sin \theta \vec{e}_\theta) = r \cos^2 \theta \vec{e}_r - r \cos \theta \sin \theta \vec{e}_\theta$$

Nous avons utilisé la décomposition (équation (1.2.3.4)) du vecteur  $\vec{e}_z$  dans les vecteurs de la base sphérique.

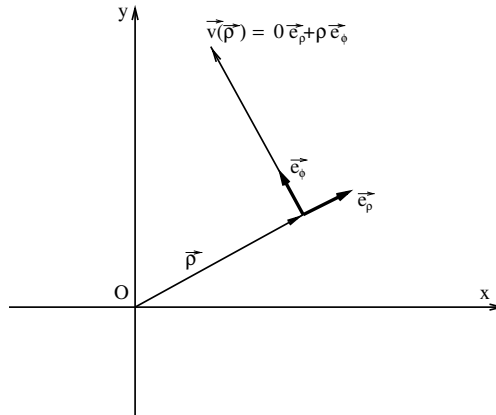


FIGURE 1.15 – Décomposition du champ de vecteurs  $\vec{v}(\vec{\rho}) = -y\vec{e}_x + x\vec{e}_y$ , dans la base mobile des coordonnées polaires.

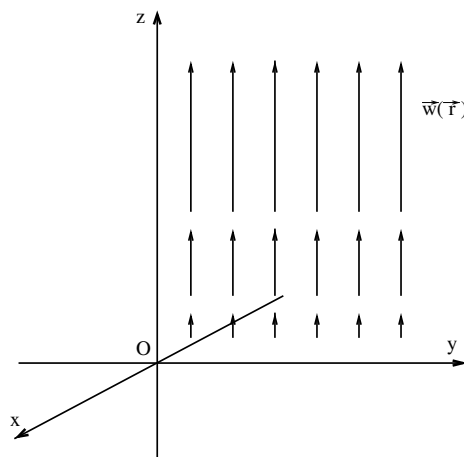


FIGURE 1.16 – Champ de vecteurs  $\vec{w}(\vec{r}) = z\vec{e}_z$  dans  $\mathbb{R}^3$ .

### Exercices

1. Dessiner le champ de vecteurs défini dans le plan par l'expression  $\vec{v}(\vec{r}) = x\vec{e}_x + y\vec{e}_y$ . Donner son expression en coordonnées polaires planes dans la base  $(\vec{e}_\rho, \vec{e}_\phi)$ .
2. Dessiner dans le plan méridien le champ de vecteurs défini dans l'espace par l'expression  $\vec{v}(\vec{r}) = r\vec{e}_\theta$ . Pourquoi demande-t-on le dessin seulement dans un plan méridien? Donner son expression en coordonnées cartésiennes dans la base  $(\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$ .
3. Soit le champ de vecteurs  $\vec{v}(\vec{r}) = x\vec{e}_x + y\vec{e}_y + 2z\vec{e}_z$ . Donner son expression en coordonnées cylindriques dans la base  $(\vec{e}_\rho, \vec{e}_\phi, \vec{e}_z)$  puis en coordonnées sphériques dans la base  $(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_\phi)$ .
4. Soit le champ de vecteurs  $\vec{v}(\vec{r}) = (x^2 + y^2)(\vec{e}_x + \vec{e}_y)$ . Donner son expression en coordonnées cylindriques dans la base  $(\vec{e}_\rho, \vec{e}_\phi, \vec{e}_z)$  puis en coordonnées sphériques dans la base  $(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_\phi)$ .

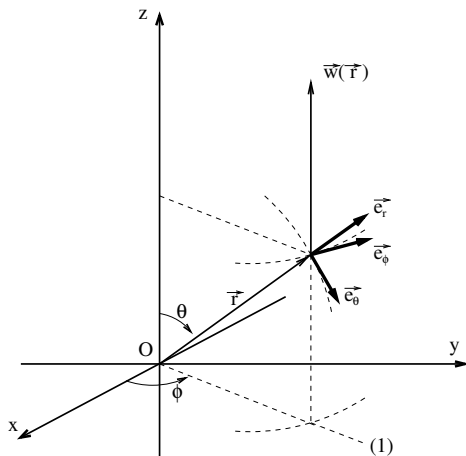


FIGURE 1.17 – Le champ de vecteurs  $\vec{w}(\vec{r}) = z\vec{e}_z$  et la base mobile de coordonnées sphériques.

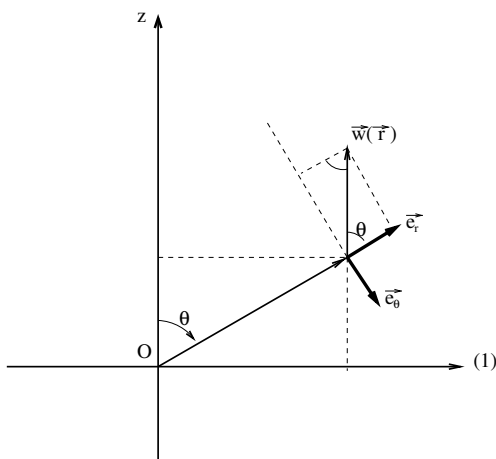


FIGURE 1.18 – Le champ  $\vec{w}(\vec{r}) = z\vec{e}_z$ , montré dans le plan  $(z, (1))$  de la figure 1.17, qui est le plan méridien de cette figure. Il se décompose dans la base mobile de coordonnées sphériques comme suit :  $\vec{w}(\vec{r}) = z \cos \theta \vec{e}_r - z \sin \theta \vec{e}_\theta + 0 \vec{e}_\phi = r \cos^2 \theta \vec{e}_r - r \cos \theta \sin \theta \vec{e}_\theta$ . C'est-à-dire que  $w_r = r \cos^2 \theta$ ,  $w_\theta = -r \cos \theta \sin \theta$  sont les composantes de  $\vec{w}(\vec{r})$  par rapport à la base mobile de coordonnées sphériques.

**5.** Soit le champ de vecteurs  $\vec{v}(\vec{r}) = \rho(\vec{e}_\rho + \rho \sin \phi \vec{e}_\phi)$ . Donner son expression en coordonnées sphériques dans la base  $(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_\phi)$  puis en coordonnées cartésiennes dans la base  $(\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$ .

**6.** Soit le champ de vecteurs  $\vec{v}(\vec{r}) = r(\vec{e}_r + r \sin \theta \vec{e}_\theta)$ . Donner son expression en coordonnées cylindriques dans la base  $(\vec{e}_\rho, \vec{e}_\phi, \vec{e}_z)$  puis en coordonnées cartésiennes dans la base  $(\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$ .

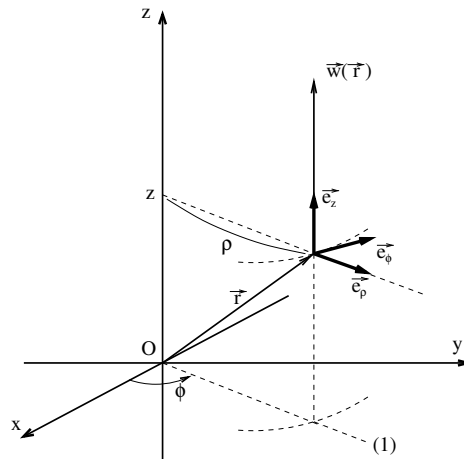


FIGURE 1.19 – Décomposition du champ de vecteurs  $\vec{w}(\vec{r}) = z\vec{e}_z$  dans la base mobile de coordonnées cylindriques. On a :  $\vec{w} = 0\vec{e}_\rho + 0\vec{e}_\phi + z\vec{e}_z$ . C'est-à-dire que  $w_\rho = 0, w_\phi = 0, w_z = z$  sont les composantes de  $\vec{w}(\vec{r})$  par rapport à la base mobile de coordonnées cylindriques.

## Corrections

1. Le dessin est donné dans la figure 1.20. Évidemment que

$$\vec{v}(\vec{r}) = \rho \vec{e}_\rho \quad (1.2.4.5)$$

car

$$\vec{v}(\vec{r}) = x\vec{e}_x + y\vec{e}_y = \vec{\rho} = \rho \vec{e}_\rho \quad (1.2.4.6)$$

2. Le dessin est donné dans la figure 1.21. Le dessin dans le plan méridien est suffisant car le champ  $\vec{v}(\vec{r}) = r\vec{e}_\theta$  est de symétrie axiale (ne dépend pas de  $\phi$ ). Par l'équation (1.2.2.22),

$$\begin{aligned} \vec{v}(\vec{r}) &= r\vec{e}_\theta = r(\cos\theta \cos\phi \vec{e}_x + \cos\theta \sin\phi \vec{e}_y - \sin\theta \vec{e}_z) \\ &= z \cos\phi \vec{e}_x + z \sin\phi \vec{e}_y - \rho \vec{e}_z \\ &= z \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} \vec{e}_x + z \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} \vec{e}_y - \sqrt{x^2+y^2} \vec{e}_z \\ \vec{v}(\vec{r}) &= \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} (zx\vec{e}_x + zy\vec{e}_y - (x^2+y^2)\vec{e}_z) \end{aligned} \quad (1.2.4.7)$$

3. Le calcul direct, par la substitution des expressions des  $x, y, z, \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z$  en coordonnées et vecteurs de la base sphériques serait long, tout en restant faisable. En profitant de la forme particulière de ce champ de vecteurs, on effectue un calcul plus rapide :

$$\begin{aligned} \vec{v}(\vec{r}) &= x\vec{e}_x + y\vec{e}_y + 2z\vec{e}_z = x\vec{e}_x + y\vec{e}_y + z\vec{e}_z + z\vec{e}_z \\ &= \vec{r} + z\vec{e}_z = r\vec{e}_r + r\cos\theta(\cos\theta\vec{e}_r - \sin\theta\vec{e}_\theta) \\ \vec{v}(\vec{r}) &= (r + r\cos^2\theta)\vec{e}_r - r\cos\theta\sin\theta\vec{e}_\theta \end{aligned} \quad (1.2.4.8)$$

en coordonnées sphériques, et

$$\vec{v}(\vec{r}) = \rho\vec{e}_\rho + 2z\vec{e}_z \quad (1.2.4.9)$$

en coordonnées cylindriques.

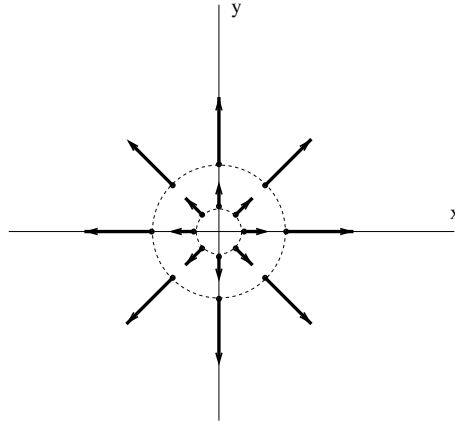


FIGURE 1.20 – Dessin du champ  $\vec{v}(\vec{r}) = x\vec{e}_x + y\vec{e}_y = \rho\vec{e}_\rho$  dans le plan  $(x, y)$ .

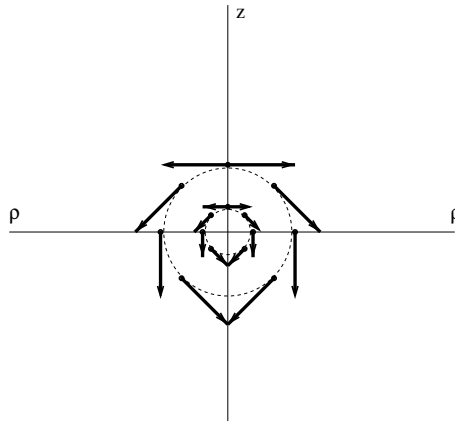


FIGURE 1.21 – Dessin du champ de vecteurs  $\vec{v}(\vec{r}) = r\vec{e}_\theta$  dans le plan méridien.

## Réponses

4. En coordonnées cylindriques :

$$\vec{v} = \rho^2[(\cos \phi + \sin \phi)\vec{e}_\rho + (\cos \phi - \sin \phi)\vec{e}_\phi] \quad (1.2.4.10)$$

En coordonnées sphériques :

$$\begin{aligned} \vec{v} = r^2 \sin^2 \theta [ & (\cos \phi + \sin \phi) \sin \theta \vec{e}_r \\ & + (\cos \phi + \sin \phi) \cos \theta \vec{e}_\theta + (\cos \phi - \sin \phi) \vec{e}_\phi ] \end{aligned} \quad (1.2.4.11)$$

5.

$$\vec{v} = r \sin^2 \theta \vec{e}_r + r \sin \theta \cos \theta \vec{e}_\theta + r^2 \sin^2 \theta \sin \phi \vec{e}_\phi \quad (1.2.4.12)$$

$$\vec{v} = (x - y^2)\vec{e}_x + (y + xy)\vec{e}_y \quad (1.2.4.13)$$