CHAPITRE I

CONCEPTS MATHEMATIQUES

1. DEFINITIONS - NOTATIONS

- **Espace**

Tous les systèmes réels à considérer évoluent dans l'espace physique.

L'image mathématique de l'espace physique est l'espace affine euclidien. C'est un espace à 3 dimensions (c'est-à-dire l'ensemble ordonné de 3 réels *x, y, z)* muni de la distance euclidienne.

- **Point**

Le point est l'élément de l'espace affine. On le note $A(x, y, z)$
x, y, z, sont ses coordonnées canoniques.

- **Bi-point** (ou **vecteur lié**)

Un bi-point est un couple ordonné de 2 points (origine *A* et extrémité *B)*.
On le note (*A,B*)
Il a 6 composantes, les coordonnées des 2 points : x_A, y_A, z_A, x_B, y_B, z_B,

Composantes canoniques d'un bi-point : $x_B - x_A$, $y_B - y_A$, $z_B - z_A$

- **Vecteur libre associé à un bi-point** (A,B) : $\overline{AB}$

C'est l'ensemble ordonné de ses 3 composantes canoniques.

On le note $$\boxed{\overline{AB} = \begin{bmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \\ z_B - z_A \end{bmatrix}}$$

C'est un vecteur de l'espace vectoriel réel à 3 dimensions associé à l'espace affine.

- **Bi-points équipollents**

Deux bi-points (*A,B)* et (*C,D*) sont équipollents s'ils sont associés au même vecteur libre (ou encore s'ils ont les mêmes composantes canoniques).

c'est-à-dire :

$$\overline{AB} = \overline{CD} \qquad \text{ou} \quad \begin{bmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \\ z_B - z_A \end{bmatrix} \qquad \text{ou} \quad \begin{cases} x_B - x_A & = & x_D - x_C \\ y_B - y_A & = & y_D - y_C \\ z_B - z_A & = & z_D - z_C \end{cases}$$

- Propriété

Si *(A,B)* et *(C,D)* sont équipollents, il résulte immédiatement de la définition que *(A,C)* et *(B,D)* sont équipollents.

D'où $$\overline{AC} = \overline{BD}$$

- Relation de Chasles

Si *A, B, C* sont 3 points, on obtient immédiatement entre les vecteurs libres associés aux 3 bi-points *(A,B), (B,C)* et *(A,C)* la relation

$$\boxed{\overline{AB} + \overline{BC} = \overline{AC}}$$

- **Origine :** $O(0,0,0)$

Si on munit l'espace d'une origine (point *O* de coordonnées toutes trois nulles), le vecteur libre $\overline{OA}$ associé au bi-point (O,A) a pour composantes les coordonnées de A.

$\overline{OA}$ est le vecteur de l'espace vectoriel r^3 associé au point *A* de l'espace affine a^3.

- **Base** (ou repère)

Une base est l'ensemble d'une origine et de trois vecteurs indépendants $\overline{x}$, $\overline{y}$, $\overline{z}$.

On la note : $R(o, \overline{x}, \overline{y}, \overline{z})$

Nous n'utiliserons que des bases orthonormées directes constituées par les 3 vecteurs unitaires

$$\overline{x} = (1,0,0) \quad \overline{y} = (0,1,0) \quad \overline{z} = (0,0,1)$$

Le vecteur $\overline{OM}$ associé à tout point *M* s'écrit alors

$$\boxed{\overline{OM} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}_R = x\overline{x} + y\overline{y} + z\overline{z}}$$

- **Distance euclidienne**

La distance euclidienne de 2 points A et B est la norme du vecteur $\overline{AB}$, soit

$$\boxed{AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2}}$$

2. OPÉRATIONS SUR LES VECTEURS

2.1. Produit scalaire

Soient les 2 vecteurs libres $\overline{V}_1(X_1, Y_1, Z_1)$ et $\overline{V}_2(X_2, Y_2, Z_2)$

Les 3 définitions suivantes sont équivalentes :

1. Le produit scalaire par $\overline{V}_1$ du vecteur_ $\overline{V}_2$ est le scalaire

$$\overline{V}_1\overline{V}_2 = X_1X_2 + Y_1Y_2 + Z_1Z_2$$

2. Le produit scalaire par $\overline{V}_1$ du vecteur $\overline{V}_2$ faisant l'angle θ avec $\overline{V}_1$ est le scalaire

$$\overline{V}_1\overline{V}_2 = V_1V_2\cos\theta$$

3. Le produit scalaire est la forme bilinéaire symétrique unique vérifiant les conditions

$$\boxed{\overline{x}^2 = \overline{y}^2 = \overline{z}^2 = 1} \qquad \boxed{\overline{y}.\overline{z} = \overline{z}.\overline{x} = \overline{x}.\overline{y} = 0}$$

Symétrie : $\overline{V}_1\overline{V}_2 = \overline{V}_2\overline{V}_1$

2.2. Produit vectoriel

Soient les 2 vecteurs libres $\overline{V}_1\left(X_1, Y_1, Z_1\right)$ et $\overline{V}_2\left(X_2, Y_2, Z_2\right)$

Les 3 définitions suivantes sont équivalentes :

1. Le produit vectoriel par $\overline{V}_1$ du vecteur $\overline{V}_2$ est le vecteur

$$\overline{W} = \overline{V}_1 \wedge \overline{V}_2 = \left(y_1z_2 - z_1y_2\right)\overline{x} + \left(z_1x_2 - x_1z_2\right)\overline{y} + \left(x_1y_2 - y_1x_2\right)\overline{z}$$

2. Le produit vectoriel par $\overline{V}_1$ du vecteur $\overline{V}_2$ est le vecteur $\overline{W}$

✓ orthogonal à $\overline{V}_1$ et à $\overline{V}_2$
✓ tel que $\overline{V}_1$, $\overline{V}_2$, $\overline{W}$ soit direct
✓ de norme $\lvert W\rvert = \lvert V_1V_2\sin\theta\rvert$

3. Le produit vectoriel est la loi de composition interne unique bilinéaire et antisymétrique vérifiant

$$\boxed{\overline{x} \wedge \overline{y} = \overline{z} \quad \overline{y} \wedge \overline{z} = \overline{x} \quad \overline{z} \wedge \overline{x} = \overline{y}}$$

Antisymétrie : $\overline{V}_1 \wedge \overline{V}_2 = -\overline{V}_2 \wedge \overline{V}_1$

2.3. Produit mixte

Le produit mixte des 3 vecteurs $\overline{V}_1, \overline{V}_2,\ \overline{V}_3$ pris dans cet ordre est le scalaire

$$\boxed{\left(\overline{V}_1,\overline{V}_2,\overline{V}_3\right)=\overline{V}_1.\left(\overline{V}_2\wedge\overline{V}_3\right)}$$

Il est inchangé par permutation circulaire et change de signe pour une autre permutation. Il est égal au volume du parallélépipède construit sur les 3 vecteurs. Il vaut :

$$\boxed{\left(\overline{V}_1,\overline{V}_2,\overline{V}_3\right)=\begin{vmatrix}X_1 & X_2 & X_3\\ Y_1 & Y_2 & Y_3\\ Z_1 & Z_2 & Z_3\end{vmatrix}}$$

2.4. Double produit vectoriel

Le double produit vectoriel des 3 vecteurs $\overline{V}_1, \overline{V}_2,\ \overline{V}_3$ est le vecteur

$$\boxed{\overline{W}=\overline{V}_1\wedge\left(\overline{V}_2\wedge\overline{V}_3\right)}$$

Dans un repère orthonormé on a

$$\overline{W}=\begin{bmatrix}X_1\\ Y_1\\ Z_1\end{bmatrix}\wedge\begin{bmatrix}Y_2Z_3-Z_2Y_3\\ Z_2X_3-X_2Z_3\\ X_2Y_3-Y_2X_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}X_2\left(X_1X_3+Y_1Y_3+Z_1Z_3\right)-X_3\left(X_1X_3+Y_1Y_3+Z_1Z_3\right)\\ Y_2\left(X_1X_3+Y_1Y_3+Z_1Z_3\right)-Y_3\left(X_1X_3+Y_1Y_3+Z_1Z_3\right)\\ Z_2\left(X_1X_3+Y_1Y_3+Z_1Z_3\right)-Z_3\left(X_1X_3+Y_1Y_3+Z_1Z_3\right)\end{bmatrix}$$

$$\boxed{\overline{W}=\left(\overline{V}_1.\overline{V}_3\right)\overline{V}_2-\left(\overline{V}_1.\overline{V}_2\right).\overline{V}_3}$$

2.5. Division vectorielle

Les vecteurs $\overline{A}$ et $\overline{B}$ étant donnés, pour diviser $\overline{A}$ par $\overline{B}$ on cherche $\overline{X}$ tel que

$$\boxed{\overline{A}=\overline{X}\wedge\overline{B}}$$

Si $\overline{A}$ et $\overline{B}$ ne sont pas orthogonaux, il n'y a pas de solution.

Supposons donc $\overline{A}.\overline{B}=0$ (avec $\overline{A}\neq 0$)

Par multiplication vectorielle par $\overline{B}$ il vient $\overline{B}\wedge\overline{A}=\overline{B}^2\overline{X}-\left(\overline{B}.\overline{X}\right)\overline{B}$

Il existe donc une première solution $\overline{X}_0=\dfrac{\overline{B}\wedge\overline{A}}{\overline{B}^2}$ où $\overline{X}_0$ est orthogonal à $\overline{B}$:

Si $\overline{X}$ est une autre solution on aura par différence $\left(\overline{X}-\overline{X}_0\right)\wedge\overline{B}=0$

D’où finalement, avec λ quelconque, une infinité de solutions :

$$\boxed{\overline{X}=\frac{\overline{B}\wedge\overline{A}}{\overline{B}^2}+\lambda\overline{B}}\quad .$$

3. TENSEURS

3.1. Définition

Un tenseur est un opérateur linéaire

a) Tenseur d'ordre 1

Soit un vecteur libre $\overline{A} = (a_1, a_2, a_3)$

Son produit scalaire par $\overline{X} = (x_1, x_2, x_3)$ fait correspondre à $\overline{X}$ un scalaire Y parfaitement déterminé.

$$\boxed{Y = \overline{A}.\overline{X} = a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3}$$

La base utilisée n'intervient que pour permettre le calcul effectif de Y sans avoir par elle-même aucune influence sur le résultat final.

On dit que $\overline{A}$ est un opérateur linéaire qui, à tout vecteur $\overline{X}$ fait correspondre un scalaire *Y*.

$$\boxed{Y = \overline{A}.\overline{X}}$$

On dit encore qu'un ***vecteur libre est un tenseur d'ordre un.***

b) Tenseur d'ordre 2

Un tenseur d'ordre 2 est l'opérateur linéaire qui à tout vecteur libre $\overline{X} = (x_1, x_2, x_3)$ fait correspondre un vecteur libre $\overline{Y} = (y_1, y_2, y_3)$.

Dans une base orthonormée, on a alors entre les composantes les relations

$$\begin{cases} y_1 &= a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 \\ y_2 &= a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 \\ y_3 &= a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 \end{cases}$$

que l'on écrit encore $y_i = \sum_j \left(a_{ij}x_j\right)$ ou $y_i = a_{ij}x_j$

ou

$$\boxed{\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}}$$

$$\boxed{\overline{Y} = \overline{\overline{A}}.\overline{X}}$$

en désignant par $\overline{\overline{A}}$ l'opérateur linéaire considéré, c'est-à-dire le tenseur d'ordre 2 qui à $\overline{X}$ fait correspondre $\overline{Y}$.

On le représente par la matrice $\boxed{\overline{\overline{A}} = \left\{a_{ij}\right\}}$

Forme bilinéaire

En effectuant le produit scalaire $\overline{X}'.\overline{Y}$ on obtient immédiatement

$$\overline{X}'.\overline{\overline{A}}.\overline{X} = \sum_{i,j}\left(a_{ij}x_i x'_j\right)$$

Forme quadratique

C'est le produit scalaire $\overline{X}.\overline{Y}$, c'est-à-dire

$$\boxed{\overline{X}.\overline{\overline{A}}.\overline{X} = \sum_{i,j}\left(a_{ij}x_i x_j\right)}$$

$$\boxed{\overline{X}.\overline{\overline{A}}.\overline{X} = a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + a_{33}x_3^2 + 2a_{23}x_2x_3 + 2a_{31}x_3x_1 + 2a_{12}x_1x_2}$$

c) Tenseur d'ordre 3

Un tenseur d'ordre 3 est *l'opérateur linéaire qui à tout vecteur libre* $\overline{X}$ *fait correspondre un tenseur d'ordre 2 :*

$$\boxed{\overline{\overline{Y}} = \overline{\overline{\overline{A}}}.\overline{X}}$$

Pour définir les 9 composantes de $\overline{\overline{Y}}$ il faudra des relations

$$y_{ij} = \sum_k\left(a_{ijk}x_k\right) \text{ou } y_{ij} = a_{ijk}x_k$$

L'opérateur linéaire $\overline{\overline{\overline{A}}}$ a donc $3^3 = 27$ composantes.

c) Tenseur d'ordre n

En généralisant, *un tenseur d'ordre n est un opérateur linéaire qui à tout vecteur* $\overline{X}$ *associe un tenseur d'ordre n-1.*

On le représente avec n barres au-dessus de la lettre qui le désigne ou par A^n.

Il a 3^n composantes.

3.2. Opérations sur les tenseurs

a) Somme de deux tenseurs d'ordre *n*

Soient A^n et B^n 2 tenseurs d'ordre *n*

L'opérateur linéaire S^n qui au vecteur $\overline{X}$ fait correspondre le tenseur

$$Y^{n-1} = A^n.\overline{X} + B^n.\overline{X} \quad , \quad \text{soit } Y^{n-1} = S^n.\overline{X}$$

est appelé somme des tenseurs A^n et B^n

C'est un tenseur du même ordre dont chaque composante est la somme des composantes correspondantes.

b) Multiplication par un scalaire

L'opérateur linéaire qui au vecteur $\overline{X}$ fait correspondre le tenseur $\lambda\left(A^n\overline{X}\right)$ est appelé produit du tenseur A^n par le scalaire λ.

C'est le tenseur $\lambda.A^n$ du même ordre dont chaque composante est le produit par λ de la composante correspondante de A^n.

Remarque

On a défini une loi de groupe commutatif (l'addition) et une loi de composition externe (multiplication par un scalaire). On vérifie immédiatement les relations

$$\begin{aligned} \lambda\left(A^n + B^n\right) &= \lambda A^n + \lambda B^n \\ \left(\lambda + \mu\right)A^n &= \lambda A^n + \mu A^n \\ \lambda\left(\mu A^n\right) &= \lambda\mu A^n \end{aligned}$$

L'ensemble des tenseurs a donc une structure d'espace vectoriel.

3.3. Produits de 2 tenseurs

a) Produit tensoriel

Soient deux tenseurs A^n et B^q d'ordres respectifs n et q et de composantes $a_{i_1 i_2 \ldots i_n}$ et $b_{i_1 i_2 \ldots i_q}$ (tous les indices pouvant prendre les valeurs 1, 2 ou 3).

On appelle produit du tenseur A^n par le tenseur B^q le tenseur P^{n+q} d'ordre n+q et de composante

$$\boxed{p_{i_1 i_2 \ldots i_{n+q}} = a_{i_1 \ldots i_n}.b_{i_1 \ldots i_q}}$$

on écrira $$\boxed{P^{n+q} = A^n \times B^q}$$

L'opération produit tensoriel n'est pas commutative.

- ***Exemple : Produit tensoriel de 2 vecteurs*** $\overline{U}(u_1,u_2,u_3)$ et $\overline{V}(v_1,v_2,v_3)$

  C'est un tenseur d'ordre 2 .

Mais $\overline{\overline{P}} = \overline{U} \times \overline{V}$ avec $p_{ij} = u_i v_j$

alors que $\overline{\overline{P}}' = \overline{V} \times \overline{U}$ avec $p'_{ij} = v_i u_j$

c'est-à-dire

$$\overline{\overline{P}} = \begin{bmatrix} u_1v_1 & u_1v_2 & u_1v_3 \\ u_2v_1 & u_2v_2 & u_2v_3 \\ u_3v_1 & u_3v_2 & u_3v_3 \end{bmatrix} \qquad \overline{\overline{P}}' = \begin{bmatrix} v_1u_1 & v_1u_2 & v_1u_3 \\ v_2u_1 & v_2u_2 & v_2u_3 \\ v_3u_1 & v_3u_2 & v_3u_3 \end{bmatrix}$$

Les 2 matrices sont transposées l'une de l'autre.

b) Produit contracté, ou produit scalaire

Soient encore 2 tenseurs A^n et B^q d'ordres respectifs *n* et *q* et de composantes $a_{i_1 i_2 \dots i_n}$ et $b_{i_1 i_2 \dots i_q}$ tous les indices pouvant prendre les valeurs 1, 2 ou 3.

On appelle produit contracté, ou produit scalaire des tenseurs A^n et B^q le tenseur C^{n+q-2} d'ordre $n + q$ -2 de composante

$$\boxed{c_{i_1 \dots i_{n+q-2}} = \sum_k \left(a_{i_1 \dots i_{n-1} k} . b_{k i_2 \dots i_q} \right)}$$

Chaque composante est donc la somme de 3 termes obtenus en donnant au dernier indice de a et au premier indice de b la même valeur k prise successivement égale à 1, 2 et 3.

On écrira $\boxed{C^{n+q-2} = A^n . B^q}$

On dit qu'on a effectué la contraction sur le dernier indice de A^n et sur le premier indice de B^q. On aurait pu convenir d'effectuer la contraction sur d'autres indices, par exemple les derniers indices de A^n et de B^q.

Exemples

- ***Produit contracté de 2 vecteurs*** $\overline{A}(a_1,a_2,a_3)$ et $\overline{B}(b_1,b_2,b_3)$

  C'est un tenseur d'ordre zéro, c'est-à-dire un scalaire :

$$\boxed{C = \overline{A}.\overline{B} = \sum_k \left(a_k b_k \right)}$$

C'est le produit scalaire habituel.