

# SOMMAIRE

## Préliminaires

---

Notations utilisées	7
Conventions de signe	8
Détermination des expressions des sollicitations internes	8
Détermination du degré d'hyperstaticité d'un système	10
Calcul du nombre d'inconnues de liaison	10

## Première partie – Calcul des déplacements d'une structure

---

### 1. METHODE GEOMETRIQUE : APPLICATION DES FORMULES GENERALES DE BRESSE

#### *Rappels de cours*

Définition	13
Enoncé des formules générales de Bresse	13
Notations	14

#### *Applications*

Etude d'une poutre encastrée	15
Etude d'un portique de bâtiment	16
Etude d'un anneau dynamométrique	18
Etude de la structure d'un hall de gare	24
Approche intuitive de la résolution d'un système hyperstatique	29

## Deuxième partie – Résolution des systèmes hyperstatiques

---

### 1. POUTRES CONTINUES : APPLICATION DES FORMULES DE CLAPEYRON

#### *Rappels de cours*

Définition	33
Enoncé des formules de Clapeyron	33
Notations	34
Relations entre les sollicitations internes et les moments sur appuis	34
Formulaire des rotations	36

#### *Applications*

Etude d'une panne reposant sur trois fermes	37
Etude d'une poutre encastrée à une extrémité	42
Etude d'une poutre reposant sur quatre appuis	47
Etude d'une poutre encastrée à une extrémité reposant sur trois appuis	55
Etude d'une poutre encastrée avec appui élastique	64

2. METHODE DES FORCES :  
APPLICATION DU PRINCIPE DES TRAVAUX VIRTUELS

*Rappels de cours*

Méthode générale de résolution d'un système hyperstatique	67
Enoncé du principe des travaux virtuels	68
Théorème de la charge unité	69
Méthode graphique de calcul du travail de déformation	69
Intégrales de Mohr	72

*Applications*

Etude d'une poutre encastrée	73
Etude d'un portique de bâtiment articulé en pied	76
Etude de l'influence de la température sur un système hyperstatique	82
Etude d'une poutre encastrée avec appui élastique	85
Etude d'une grue de manutention (sujet d'agrégation de Génie civil)	88
Etude d'un abri à bicyclettes	96
Etude d'une poutre continue	104
Etude d'un portique de bâtiment encastré en pied	109

3. METHODE DES DEPLACEMENTS :  
DETERMINATION DE LA MATRICE DE RIGIDITE D'UNE STRUCTURE

*Rappels de cours*

Présentation de la méthode des déplacements	119
Principe de la méthode des déplacements	119
Relations entre les actions des nœuds sur les extrémités des barres et les déplacements des extrémités des barres	119
Hypothèse simplificatrice	123
Equations d'équilibre des nœuds	124
Méthode graphique de détermination des degrés de liberté d'une structure	127
Relations entre les sollicitations internes et les actions des nœuds sur les extrémités des barres	129
Organigramme de la méthode des déplacements	130

*Applications*

Etude de la structure d'un abri	131
Etude d'une grue de manutention (sujet d'agrégation de Génie civil)	138
Etude d'une poutre continue	145
Etude d'un portique de bâtiment encastré en pied	152
Etude de la structure d'un entrepôt	161

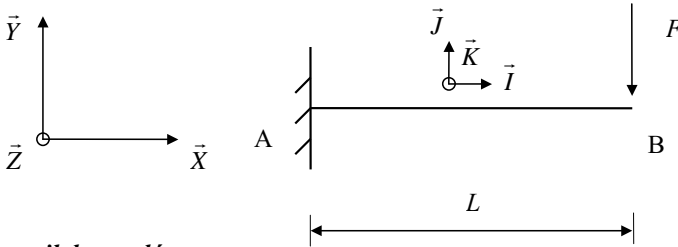
# PRÉLIMINAIRES

## Notations utilisées

Symboles	Unités	Définitions
$\vec{\Delta}_A$	m	Vecteur déplacement du point A.
$u_A$	m	Translation horizontale du point A.
$v_A$	m	Translation verticale du point A.
$\omega_A$	rad	Rotation de la section en A.
$\Omega_A$	rad	Rotation du nœud A.
$\theta$	rad	Angle (thêta).
$\beta_{AB}$	rad	Rotation d'ensemble de la travée AB sous l'effet d'une dénivellation d'appui.
$\chi(x)$	rad	Rotation de section (khi) : $\chi(x) = \frac{Mf(x)}{EI_z}$
$\varepsilon(x)$	sans unité	Déformation (epsilon) : $\varepsilon(x) = \frac{N(x)}{ES}$
$I_z$	m <sup>4</sup>	Moment quadratique de la section transversale par rapport à l'axe $\vec{z}$ passant par son centre de gravité ( $\vec{z}$ étant la normale au plan de la structure). Exprimé en mètres bicarrés.
$E$	MPa	Module d'élasticité longitudinale. $E = 210\,000$ MPa pour l'acier.
$\alpha$	°C <sup>-1</sup>	Coefficient de dilatation thermique. $\alpha = 1,2 \cdot 10^{-5}$ °C <sup>-1</sup> pour l'acier.
$t$	°C	Température.
$mf_{AB}(x)$	MN.m	Moment fléchissant dans la poutre AB isostatique.
$v_{AB}(x)$	MN	Effort tranchant dans la poutre AB isostatique.
$Mf_{AB}(x)$	MN.m	Moment fléchissant dans la poutre AB hyperstatique
$V_{AB}(x)$	MN	Effort tranchant dans la poutre AB hyperstatique.
$N_{AB}(x)$	MN	Effort normal dans la poutre AB hyperstatique.
$Mf^*(x)$	MN.m	Moment fléchissant dans la structure virtuelle.
$N^*(x)$	MN	Effort normal dans la structure virtuelle.
$F^*$	MN	Effort virtuel.
$\Phi^*$	MN.m	Couple virtuel.

**Etude d'une poutre encastrée**

Une poutre de longueur  $L$  peut être schématisée comme l'indique la figure ci-dessous. On note  $I_z$  le moment quadratique de la section transversale et  $E$  le module d'élasticité longitudinale du matériau constituant la poutre.



**Travail demandé**

- 1) Déterminer l'expression de la translation verticale du point B.
- 2) Déterminer l'expression de la rotation de la section au point B.

*Application numérique :*

On donne :  $E = 2,1 \cdot 10^5$  MPa ;  $I_z = 171$  cm<sup>4</sup> ;  $F = 300$  daN ;  $L = 2$  m.

- 1) Expression de la translation verticale du point B

L'effort normal est égal à zéro dans cet exemple, la formule se simplifie donc ainsi :

$$\vec{\Delta}_B = \vec{\Delta}_A + \vec{\omega}_A \wedge \vec{G}_A \vec{G}_B + \int_{s_A}^{s_B} \frac{Mf(s)}{EI_z} \vec{K}_A \vec{G}_B ds$$

L'équation du moment fléchissant dans la poutre AB est la suivante :

$$Mf(s) = -(L - s)F$$

La rotation  $\vec{\omega}_A$  est égale à zéro en A (liaison encastrement) et le produit vectoriel  $\vec{K}_A \vec{G}_B$  donne :

$$\vec{K}_A \vec{G}_B = \begin{vmatrix} 0 & (L-s) & 0 \\ 0 & 0 & (L-s) \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

Le déplacement en B s'écrit :

$$v_B = 0 + 0 + \frac{1}{EI_z} \int_0^L -(L-s)^2 F ds$$

On trouve finalement :

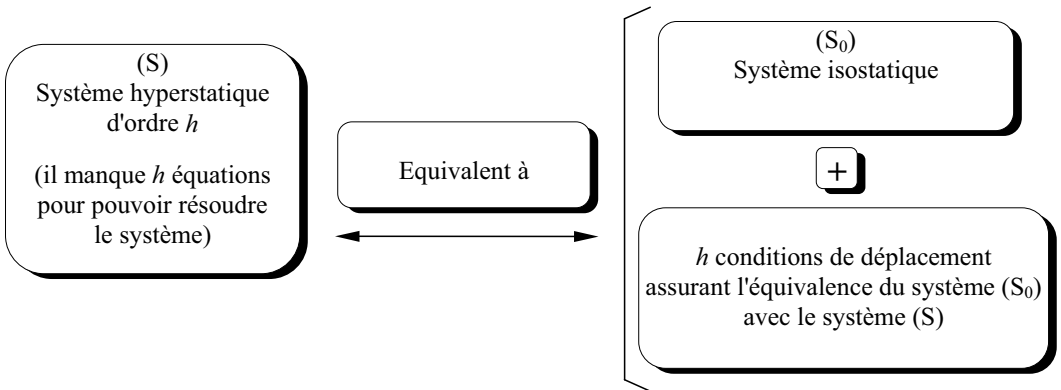
$$v_B = -\frac{1}{3} \frac{FL^3}{EI_z}$$

## 2 MÉTHODE DES FORCES : APPLICATION DU PRINCIPE DES TRAVAUX VIRTUELS

### Méthode générale de résolution d'un système hyperstatique

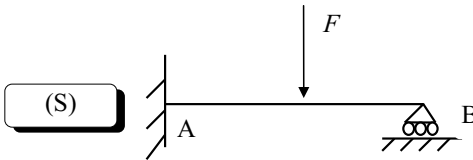
Un système est hyperstatique lorsque le nombre d'inconnues de liaison est supérieur au nombre d'équations issues du principe fondamental de la statique. L'écart entre ces deux nombres correspond au degré d'hyperstaticité du système.

Pour résoudre un système hyperstatique d'ordre  $h$ , il faut donc établir  $h$  équations supplémentaires. La méthode consiste à choisir un système isostatique ( $S_0$ ) auquel on impose  $h$  conditions de déplacement (en translation ou en rotation) afin d'obtenir un système équivalent au système ( $S$ ). Ces  $h$  conditions de déplacement fournissent  $h$  équations supplémentaires.



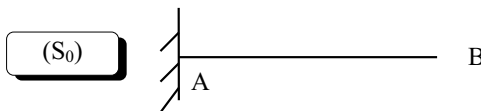
### Exemple de résolution

On considère le système ( $S$ ) hyperstatique d'ordre 1 suivant :



Il y a plusieurs choix possibles de systèmes isostatiques ( $S_0$ ), il suffit de donner un degré de liberté supplémentaire au système ( $S$ ).

On choisit le système ( $S_0$ ) suivant :



La méthode consiste à écrire que le système ( $S_0$ ) ci-dessus est équivalent au système ( $S$ ) à condition que la translation verticale du point B soit égale à zéro.