# SOMMAIRE

## Préliminaires

2. METHODE DES FORCES :
APPLICATION DU PRINCIPE DES TRAVAUX VIRTUELS



3. METHODE DES DEPLACEMENTS :
DETERMINATION DE LA MATRICE DE RIGIDITE D'UNE STRUCTURE

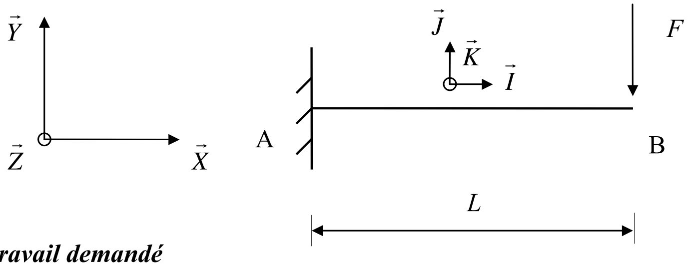
# PRÉLIMINAIRES

## Notations utilisées

| Symboles | Unités | Définitions |
|---|---|---|
| $\vec{\Lambda}_A$ | m | Vecteur déplacement du point A. |
| $u_A$ | m | Translation horizontale du point A. |
| $v_A$ | m | Translation verticale du point A. |
| $\omega_A$ | rad | Rotation de la section en A. |
| $\Omega_A$ | rad | Rotation du nœud A. |
| $\theta$ | rad | Angle (thêta). |
| $\beta_{AB}$ | rad | Rotation d'ensemble de la travée AB sous l'effet d'une dénivellation d'appui. |
| $\chi(x)$ | rad | Rotation de section (khi) : $\chi(x) = \dfrac{Mf(x)}{EI_z}$ |
| $\varepsilon(x)$ | sans unité | Déformation (epsilon) : $\varepsilon(x) = \dfrac{N(x)}{ES}$ |
| $I_z$ | $m^4$ | Moment quadratique de la section transversale par rapport à l'axe $\vec{z}$ passant par son centre de gravité ($\vec{z}$ étant la normale au plan de la structure). Exprimé en mètres bicarrés. |
| $E$ | MPa | Module d'élasticité longitudinale. $E$ = 210 000 MPa pour l'acier. |
| $\alpha$ | $°C^{-1}$ | Coefficient de dilatation thermique. $\alpha = 1{,}2.10^{-5}\ °C^{-1}$ pour l'acier. |
| $t$ | °C | Température. |
| $mf_{AB}(x)$ | MN.m | Moment fléchissant dans la poutre AB isostatique. |
| $v_{AB}(x)$ | MN | Effort tranchant dans la poutre AB isostatique. |
| $Mf_{AB}(x)$ | MN.m | Moment fléchissant dans la poutre AB hyperstatique |
| $V_{AB}(x)$ | MN | Effort tranchant dans la poutre AB hyperstatique. |
| $N_{AB}(x)$ | MN | Effort normal dans la poutre AB hyperstatique. |
| $Mf^*(x)$ | MN.m | Moment fléchissant dans la structure virtuelle. |
| $N^*(x)$ | MN | Effort normal dans la structure virtuelle. |
| $F^*$ | MN | Effort virtuel. |
| $\Phi^*$ | MN.m | Couple virtuel. |

**Etude d'une poutre encastrée**

Une poutre de longueur $L$ peut être schématisée comme l'indique la figure ci-dessous.
On note $I_z$ le moment quadratique de la section transversale et $E$ le module d'élasticité longitudinale du matériau constituant la poutre.




***Travail demandé***

1) Déterminer l'expression de la translation verticale du point B.
2) Déterminer l'expression de la rotation de la section au point B.

*Application numérique :*
On donne : $E = 2{,}1.10^5$ MPa ; $I_z = 171$ cm$^4$ ; $F = 300$ daN ; $L = 2$ m.

1) Expression de la translation verticale du point B

L'effort normal est égal à zéro dans cet exemple, la formule se simplifie donc ainsi :

$$\vec{\Lambda}_B = \vec{\Lambda}_A + \vec{\omega}_A \wedge \overrightarrow{G_A G_B} + \int_{s_A}^{s_B} \frac{Mf(s)}{EI_z} \vec{K} \wedge \overrightarrow{GG_B} ds$$

L'équation du moment fléchissant dans la poutre AB est la suivante :

$$Mf(s) = -(L-s)F$$

La rotation $\vec{\omega}_A$ est égale à zéro en A (liaison encastrement) et le produit vectoriel $\vec{K} \wedge \overrightarrow{GG_B}$ donne :

$$\vec{K} \wedge \overrightarrow{GG_B} = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{vmatrix} \wedge \begin{vmatrix} (L-s) \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 \\ (L-s) \\ 0 \end{vmatrix}$$

Le déplacement en B s'écrit :

$$v_B = 0 + 0 + \frac{1}{EI_z} \int_0^L -(L-s)^2 F ds$$

On trouve finalement :

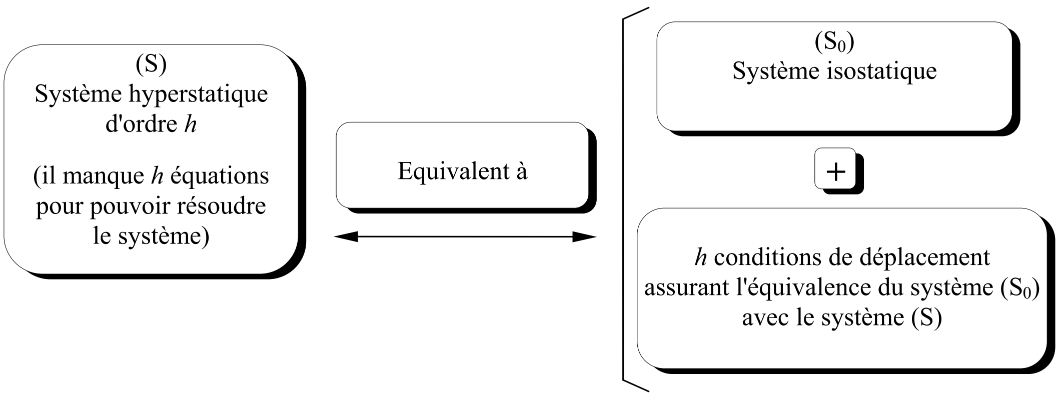
$$\boxed{v_B = -\frac{1}{3} \frac{FL^3}{EI_z}}$$

# 2 MÉTHODE DES FORCES : APPLICATION DU PRINCIPE DES TRAVAUX VIRTUELS

**Méthode générale de résolution d'un système hyperstatique**

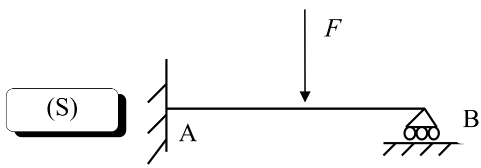
Un système est hyperstatique lorsque le nombre d'inconnues de liaison est supérieur au nombre d'équations issues du principe fondamental de la statique. L'écart entre ces deux nombres correspond au degré d'hyperstaticité du système.

Pour résoudre un système hyperstatique d'ordre *h*, il faut donc établir *h* équations supplémentaires. La méthode consiste à choisir un système isostatique ($S_0$) auquel on impose *h* conditions de déplacement (en translation ou en rotation) afin d'obtenir un système équivalent au système (S). Ces *h* conditions de déplacement fournissent *h* équations supplémentaires.



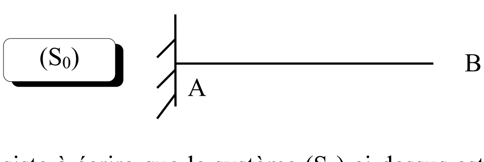

**Exemple de résolution**

On considère le système (S) hyperstatique d'ordre 1 suivant :




Il y a plusieurs choix possibles de systèmes isostatiques ($S_0$), il suffit de donner un degré de liberté supplémentaire au système (S).

On choisit le système ($S_0$) suivant :




La méthode consiste à écrire que le système ($S_0$) ci-dessus est équivalent au système (S) à condition que la translation verticale du point B soit égale à zéro.