

Table des matières

1	Interpolation et approximation	1
1.1	Approximation d'une fonction par une autre fonction	1
1.1.1	Fonctions d'approximation	1
1.1.2	Approximation polynomiale	2
1.2	Détermination des polynômes d'interpolation	3
1.2.1	Calcul du polynôme d'interpolation	3
1.2.2	Polynôme d'interpolation de Newton	4
1.2.3	Polynôme d'interpolation de Lagrange	8
1.2.4	Interpolation polynomiale avec des points régulièrement espacés	9
1.2.5	Polynômes de Hermite	12
1.2.6	Polynômes de Chebyshev et points irrégulièrement espacés	14
1.2.7	Interpolation par fonctions splines	19
1.2.8	Interpolation par des courbes splines paramétriques	25
1.3	Courbes de Bézier	26
1.4	Discussion et conclusion	27
2	Intégration numérique	29
2.1	Formules d'intégration de Newton et Cotes fermées	29
2.1.1	Intégration globale sur l'intervalle $[a, b]$	29
2.1.2	Intégration sur des sous-intervalles	32
2.2	Formules d'intégration de Newton et Cotes ouvertes	34
2.3	Conclusions sur les formules d'intégration de Newton et Cotes	35
2.4	Intégration répétée par dichotomie et intégration de Romberg	35
2.5	Intégration numérique avec des points irrégulièrement espacés	38
2.5.1	Rappels sur les polynômes orthogonaux	39
2.5.2	Quadrature de Gauss-Legendre	42
2.5.3	Quadrature de Gauss-Laguerre	46
2.5.4	Quadrature de Gauss-Chebyshev	46
2.5.5	Quadrature de Gauss-Hermite	46
2.6	Discussion et conclusion	47
3	Résolution d'équations par des méthodes itératives	49
3.1	Méthode de Graeffe	49
3.2	Méthode de Bernoulli	51
3.3	Méthode de Bairstow	54
3.4	Méthode des substitutions successives	57
3.5	Méthode de Newton et méthodes dérivées	60

3.5.1	Méthode de Newton	60
3.5.2	Méthode de la sécante	63
3.6	Méthodes de dichotomie et regula falsi	63
3.6.1	Méthode de dichotomie	64
3.6.2	Méthode regula falsi	66
3.7	Méthode d'Aitken	66
3.8	Méthode d'homotopie	68
3.8.1	Introduction	68
3.8.2	Méthode de continuation	68
3.9	Discussion et conclusion	72
4	Opérations numériques sur les matrices	75
4.1	Introduction	75
4.2	Rappels sur les matrices	75
4.3	Rappels sur les vecteurs	77
4.4	Transformations linéaires et sous-espaces	79
4.4.1	Théorème de Gershgorin	81
4.4.2	Théorème de Cayley-Hamilton et conséquences	82
4.4.3	Méthode de puissance	83
4.5	Matrices semblables et polynômes de matrices	85
4.6	Matrices symétriques et matrices hermitiennes	85
4.7	Réduction de matrices sous une forme plus simple	90
4.8	Méthode LR de Rutishauser	91
4.9	Méthode de Householder	95
4.10	Méthode QR de Francis	99
4.11	Discussion et conclusion	109
5	Résolution des systèmes d'équations algébriques	111
5.1	Introduction	111
5.2	Résolution de systèmes linéaires triangulaires	111
5.3	Résolution de systèmes linéaires : méthode d'élimination de Gauss	112
5.4	Calcul du déterminant d'une matrice	119
5.5	Algorithme de Gauss-Jordan	120
5.6	Factorisation LDL^T	123
5.7	Décomposition de Cholesky	124
5.8	Décomposition en valeurs singulières	125
5.9	Méthode des moindres carrés pour les systèmes linéaires sur-déterminés	127
5.10	Résolution itérative de grands systèmes linéaires (Jacobi, Gauss- Seidel)	129
5.11	Résolution de systèmes linéaires : cas d'une matrice tridiagonale .	133
5.12	Résolution de systèmes non linéaires : méthode de Newton-Raphson	134
5.13	Résolution de systèmes non linéaires par optimisation	137
5.14	Discussion et conclusion	137
6	Intégration numérique des équations différentielles ordinaires	139
6.1	Introduction	139
6.1.1	Equations différentielles linéaires et non-linéaires	140
6.1.2	Unicité de la solution	141
6.2	Problèmes à valeur initiale	141

6.2.1	Méthodes à un pas	142
6.2.2	Méthodes à pas multiples	157
6.2.3	Formules d'intégration ouvertes	157
6.3	Stabilité des méthodes d'intégration numérique	164
6.4	Cas des systèmes raides	167
6.5	Systèmes algébro-différentiels	168
6.6	Equations différentielles à frontières multiples	170
6.7	Discussion et conclusion	170
7	Intégration numérique des équations aux dérivées partielles	173
7.1	Quelques exemples de systèmes physiques	173
7.1.1	Transfert de chaleur par conduction	173
7.1.2	Transfert de matière	175
7.1.3	Equation des ondes	175
7.1.4	Equation de Laplace	175
7.2	Propriétés des équations aux dérivées partielles	176
7.2.1	Généralités	176
7.2.2	Problème bien posé	177
7.2.3	Classification	178
7.2.4	Caractérisation des solutions	178
7.2.5	Méthode des caractéristiques	179
7.3	Méthode des différences finies	188
7.3.1	Préambule	188
7.3.2	Discrétisation	189
7.4	Calcul automatique des dérivées partielles	205
7.4.1	Calcul de $\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_0$ et $\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_N$	206
7.4.2	Calcul de $\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)_0$ et $\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)_N$	207
7.5	Méthode des lignes	207
7.5.1	Cas de conditions aux limites de Dirichlet	208
7.5.2	Cas de conditions aux limites de Neumann	208
7.5.3	Simulation d'un échangeur de chaleur	209
7.6	Méthode des volumes finis	213
7.6.1	Introduction	213
7.6.2	Maillage	213
7.6.3	Intégration sur un volume de contrôle quelconque	215
7.6.4	Prise en compte des conditions aux limites à gauche	217
7.6.5	Prise en compte des conditions aux limites à droite	218
7.6.6	Cas de deux milieux solides en contact et de conductivités différentes	219
7.6.7	Résolution numérique	220
7.6.8	Problème bi-dimensionnel	223
7.6.9	Extension au cas des écoulements	224
7.6.10	Conservation appliquée à un volume de contrôle	225
7.6.11	Algorithme SIMPLER	226
7.7	Discussion et conclusion	227

8	Méthodes analytiques d'optimisation	229
8.1	Quelques rappels mathématiques	229
8.2	Introduction	230
8.3	Fonctions d'une seule variable	231
8.3.1	Intervalle infini	231
8.3.2	Intervalle fini	234
8.3.3	Présence de discontinuités	235
8.4	Fonctions de plusieurs variables	235
8.4.1	Intervalle infini	235
8.4.2	Intervalle fini	236
8.4.3	Présence de discontinuités	236
8.5	Fonction soumise à des contraintes d'égalité	236
8.5.1	Méthode de Jacobi	236
8.5.2	Multiplicateurs de Lagrange	238
8.5.3	Signification des multiplicateurs de Lagrange	240
8.5.4	Conditions de minimum	240
8.5.5	Conditions de minimum par le gradient projeté dans le cas de contraintes d'égalité	240
8.6	Fonction soumise à des contraintes d'inégalité	245
8.6.1	Utilisation de fonctions d'écart	245
8.6.2	Paramètres de Kuhn-Tucker	246
8.6.3	Conditions de minimum par le gradient projeté dans le cas de contraintes d'inégalité	250
8.7	Fonction soumise à des contraintes d'égalité et d'inégalité	255
8.8	Analyse de sensibilité	256
8.9	Discussion et conclusion	258
9	Méthodes numériques d'optimisation	259
9.1	Fonctions d'une seule variable	259
9.1.1	Méthode de dichotomie	259
9.1.2	Méthode de Newton	261
9.1.3	Méthode de Fibonacci	262
9.2	Fonctions de plusieurs variables	264
9.2.1	Méthodes de recherche directe	265
9.2.2	Recherche simple monovariante	265
9.2.3	Méthode du simplexe	265
9.2.4	Méthodes d'accélération	267
9.2.5	Méthode du complexe de Box	271
9.2.6	Algorithme génétique	273
9.2.7	Méthodes de gradient	276
9.2.8	Méthode de la plus grande pente	282
9.2.9	Problème de la recherche dans une direction \mathbf{s} donnée	283
9.2.10	Méthode des gradients conjugués	286
9.2.11	Méthode de Newton-Raphson	293
9.2.12	Méthode de quasi-Newton	298
9.2.13	Méthodes pour les sommes de carrés	301
9.2.14	Méthode de Gauss-Newton	303
9.2.15	Méthode de Levenberg-Marquardt	304
9.2.16	Approximation de quasi-Newton	306
9.2.17	Systèmes d'équations non linéaires	308

9.3	Discussion et conclusion	308
10	Programmation linéaire	309
10.1	Généralités	309
10.2	Formulation du problème à partir d'exemples	310
10.2.1	Utilisation de variables d'écart	310
10.2.2	Utilisation de variables d'écart et de variables artificielles	311
10.2.3	Conditions d'optimalité	313
10.3	Résolution du problème, tableau du simplexe	313
10.3.1	Interprétation géométrique, exemple 1	313
10.3.2	Tableau du simplexe avec variables d'écart et artificielles, exemple 2	319
10.4	Solution théorique	321
10.5	Cas de contraintes simultanées d'inégalité et d'égalité	325
10.6	Dualité	329
10.6.1	Exemple de dualité	329
10.6.2	Démonstration du théorème de dualité	330
10.7	Méthodes de point intérieur	335
10.7.1	Méthode de projection de Karmarkar	335
10.7.2	Transformation affine	340
10.8	Discussion et conclusion	344
11	Optimisation quadratique et non linéaire	347
11.1	Introduction	347
11.2	Optimisation quadratique, conditions de Kuhn-Tucker et résolution par le simplexe	348
11.2.1	Première présentation	348
11.2.2	Deuxième présentation	348
11.2.3	Solution sous forme d'un problème de simplexe	348
11.3	Optimisation quadratique, méthode de barrière	350
11.4	Optimisation non linéaire par optimisation quadratique successive	354
11.4.1	Introduction	354
11.4.2	Notion de région possible et de cône tangent	355
11.4.3	Optimisation quadratique successive	356
11.4.4	Spécificités et difficultés du problème SQP	360
11.5	Discussion et conclusion	366
12	Exercices	367
12.1	Interpolation et approximation	367
12.2	Intégration numérique	374
12.3	Résolution d'équations par des méthodes itératives	377
12.4	Opérations numériques sur les matrices	382
12.5	Résolution des systèmes d'équations algébriques	385
12.6	Intégration numérique des équations différentielles ordinaires	393
12.7	Intégration numérique des équations aux dérivées partielles	401
12.8	Méthodes analytiques d'optimisation	404
12.9	Méthodes numériques d'optimisation	413
12.10	Programmation linéaire	420
12.11	Optimisation quadratique et non linéaire	427