

Table des matières

Notations	7
Introduction	9
I Marchés financiers et introduction à la gestion des risques	13
1 Les différents marchés financiers	14
1.1 Description des produits de marchés	14
1.2 Classification selon la liquidité	21
1.3 Structures d'information existantes	23
1.4 Marchés de capitaux, taux d'intérêt et actualisation	23
2 Principes de fonctionnement des bourses	25
2.1 Quelques caractéristiques des bourses	25
2.2 La négociation des valeurs	26
3 Introduction générale sur la gestion de risque	28
3.1 Les principes de la gestion de risque	28
3.2 La notion de portefeuille et le risque associé	30
3.3 Position risquée d'un actif	31
4 Produits dérivés optionnels	33
4.1 Couverture par des options	33
4.2 Typologie des options	36
4.3 Importance des marchés de produits dérivés	39
5 Gestion des risques et réglementation	39
5.1 Gestion des risques et capital réglementaire	40
5.2 Forme simple d'un problème d'optimisation de portefeuille	44
5.3 Intérêt économique et nécessité de la gestion des risques	45
II Modèles de marché et valorisation d'options en temps discret	47
1 Stratégie de gestion d'un portefeuille en temps discret	48
1.1 Définition d'une stratégie de gestion	48
1.2 Stratégie autofinancée	50
1.3 Stratégie admissible et arbitrage	51
2 Les modèles binomiaux recombinaux	52
2.1 Présentation des modèles binomiaux recombinaux	53
2.2 Limite du modèle pour un grand nombre de pas de temps	55
3 Martingales en temps discret et intégrales stochastiques discrètes	59
3.1 Martingales en temps discret et probabilité martingale	59
3.2 Intégrale stochastique discrète et valeur du portefeuille	63
3.3 Marchés viables et marchés complets	67
4 Evaluation des options et couverture dans les marchés complets	71
4.1 Evaluation des options	71
4.2 Couverture en Delta	72

4.3	Relation de parité Call/Put pour les européennes	73
4.4	Options américaines en temps discret	74
4.5	Synthèse sur les modèles à temps discret	75
5	Deux exemples de marchés complet et incomplet	75
5.1	Exemple de marché complet	76
5.2	Exemple de marché incomplet	77
6	Description des fluctuations et concepts de rentabilité	79
6.1	Description des fluctuations	79
6.2	Les concepts de rentabilité	82
III Modèles en temps continu		87
1	Calcul stochastique en temps continu	87
1.1	Martingales en temps continu et mouvements browniens	88
1.2	Intégrales stochastiques en temps continu	92
1.3	Calcul d'Itô	95
1.4	Changement de probabilité	103
1.5	Théorème de Girsanov	104
2	Le modèle de Black et Scholes	105
2.1	Présentation du modèle et intégration par la formule d'Itô	105
2.2	Evaluation des options dans le modèle de Black et Scholes	107
2.3	Options américaines dans le modèle de Black et Scholes	115
2.4	Dividendes et coûts de transaction	116
2.5	Et au delà de Black et Scholes?	119
3	Représentation des aléas de prix	120
3.1	Le modèle standard de Black et Scholes	121
3.2	Prise en compte du retour à la moyenne	121
3.3	Prise en compte de la saisonnalité	127
3.4	Processus multidimensionnels	129
3.5	Prise en compte de la volatilité stochastique	130
4	Estimation	132
4.1	Estimation paramétrique ou non paramétrique	132
4.2	Estimation historique	133
4.3	Estimation implicite	134
4.4	Des méthodes statistiques	135
IV Méthodes numériques pour la valorisation d'options		139
1	Relations de parité Call/Put et inégalités	140
2	Equations aux dérivées partielles et méthodes de résolution	141
2.1	Obtention des équations aux dérivées partielles	141
2.2	Résolution par l'équation de la chaleur	144
2.3	Différences finies pour un call européen sous Black et Scholes	150
2.4	Equations aux dérivées partielles et options asiatiques	156
2.5	Equations aux dérivées partielles et options américaines	159
2.6	Extension, limites et difficultés des méthodes EDP	161
3	Les méthodes de Monte-Carlo	162
3.1	Buffon inventeur de la méthode de Monte-Carlo?	162
3.2	Présentation des méthodes de Monte-Carlo	165
3.3	Exemple de valorisation par méthode de Monte-Carlo	166
3.4	Discrétisation temporelle des équations différentielles stochastiques	167
3.5	Un exemple de mise en œuvre avec commentaires	171
3.6	Extension à d'autres options ou d'autres processus de prix	172

	3.7	Convergence et techniques d'accélération	172
4		Les méthodes basées sur la représentation des prix par un arbre	181
	4.1	Pricing d'un call européen sous Black-Scholes	181
	4.2	Pricing d'une option américaine dans un arbre binomial	184
	4.3	Pricing d'une option asiatique dans un arbre binomial	186
	4.4	Exemple de valorisation avec un arbre	188
5		Simulation et moindres carrés pour les options américaines	191
	5.1	Présentation du principe de la méthode	192
	5.2	Application à un put américain	195
	5.3	Propriétés et intérêts de la méthode	201
6		Valorisation minimisant le risque sous la probabilité réelle	202
	6.1	Présentation de la méthode «OHMC»	202
	6.2	Application de la méthode	208
	6.3	Propriétés et intérêt de la méthode	209
V Mesures de risque de portefeuilles			211
1		Définitions axiomatiques des mesures de risque	212
	1.1	Mesures de risque cohérentes	213
	1.2	Mesures de risque adaptées à l'allocation de portefeuille	215
	1.3	Conséquences générales des axiomes	219
2		Mesures de l'état du portefeuille	219
	2.1	La valeur marché (MtM)	219
	2.2	Les cash-flows (CF)	221
	2.3	Les gains et pertes (P&L)	221
3		Mesures de risque courantes	224
	3.1	Volatilité	225
	3.2	Ratio de Sharpe	227
	3.3	Value-at-Risk (VaR)	229
	3.4	Extreme Value-at-Risk (EVAR)	234
	3.5	Earning-at-Risk (EaR)	238
	3.6	Sensibilité par rapport aux facteurs de risque (Grecques)	239
	3.7	Stress-testing, ou indicateur de risques anormaux	241
	3.8	Back-testing, ou indicateur de risques de modélisation	242
	3.9	Construction générique de mesures adaptées au métier	245
4		Méthodes de calculs pour les mesures de risque	246
	4.1	Méthode paramétrique par approximation gaussienne	246
	4.2	Méthode paramétrique en Delta	252
	4.3	Méthode paramétrique en Delta-Gamma	257
	4.4	Méthodes de Monte-Carlo	261
	4.5	Simulations historiques	264
	4.6	Comparaison des méthodes de calcul d'indicateurs	266
VI Gestion des risques de portefeuille			269
1		Problématique de la gestion des risques	270
	1.1	Objectifs généraux	270
	1.2	Cadre d'hypothèses mathématiques du problème	270
	1.3	Typologie des méthodes de gestion de risque et de couverture	272
2		Gestion de risque par modèle de Markowitz	273
	2.1	Représentation paramétrique du gain et du risque	274
	2.2	Non-diversification en l'absence d'une contrainte de risque	277
	2.3	Critère de sélection moyenne-variance	277

2.4	Frontière efficiente et cible de gestion	278
2.5	Intérêt de la diversification illustré avec deux actifs risqués	280
2.6	Calcul de frontière efficiente avec uniquement des actifs risqués	283
2.7	Exemples et illustrations	285
2.8	Calcul explicite de frontière efficiente avec un actif sans risque	290
2.9	Le modèle du CAPM	294
2.10	Extensions et liens avec d'autres méthodes	299
2.11	Généralisation des notions de dominance et frontière efficiente	300
3	Gestion de risque par optimisation locale	301
3.1	Couverture en Delta	302
3.2	Couverture en Gamma (ou en Delta-Gamma)	305
3.3	Autres gestions par couverture locale	307
3.4	Limitations et extensions	309
4	Gestion de risque par optimisation globale	310
4.1	Méthodes de minimisation globale de risque	310
4.2	Méthodes d'allocation de portefeuille	312
A	Probabilités et Statistiques	317
1	Probabilités et variables aléatoires	317
1.1	Variables aléatoires	317
1.2	Caractériser une variable aléatoire	318
1.3	Caractériser les relations entre variables aléatoires	322
1.4	Opérations sur des variables aléatoires	326
1.5	Exemples de lois connues	328
2	Statistiques appliquées et tests	335
2.1	Statistiques du second ordre	335
2.2	Tests d'hypothèses	337
3	Outils pour observer et simuler des échantillons	339
3.1	Représentation temporelle des quantiles	339
3.2	Simulation conjointe de lois gaussiennes	341
B	Optimisation pour l'estimation et le contrôle	343
1	Vocabulaire et problématiques	343
1.1	Schéma général	344
1.2	Les problèmes d'estimation des données d'entrée ou de contrôle	345
1.3	Les problèmes d'estimation de modèles	346
1.4	Les méthodes de lissage	346
1.5	Une classification des problèmes d'optimisation	346
2	Optimisation continue	348
2.1	Problèmes sans contrainte, méthodes de gradient	348
2.2	Problèmes avec contraintes, méthodes de lagrangien	350
3	Optimisation combinatoire	352
3.1	Programmation en nombre entiers: énumération, coupe	352
3.2	Méthodes évolutionnaires	354
3.3	Méta-heuristiques, méthode tabou	360
3.4	Et ensuite...	360
	Glossaire financier	361
	Index	367
	Bibliographie	377