

Mécanique générale

Cours et exercices corrigés

Sylvie Pommier

Professeure à l'École normale supérieure de Cachan

Yves Berthaud

Professeur à l'Université Pierre-et-Marie-Curie

DUNOD

Illustration de couverture : © PixHom, Shutterstock.com

<p>Le pictogramme qui figure ci-contre mérite une explication. Son objet est d'alerter le lecteur sur la menace que représente pour l'avenir de l'écrit, particulièrement dans le domaine de l'édition technique et universitaire, le développement massif du photocopillage.</p> <p>Le Code de la propriété intellectuelle du 1^{er} juillet 1992 interdit en effet expressément la photocopie à usage collectif sans autorisation des ayants droit. Or, cette pratique s'est généralisée dans les établissements</p>		<p>d'enseignement supérieur, provoquant une baisse brutale des achats de livres et de revues, au point que la possibilité même pour les auteurs de créer des œuvres nouvelles et de les faire éditer correctement est aujourd'hui menacée. Nous rappelons donc que toute reproduction, partielle ou totale, de la présente publication est interdite sans autorisation de l'auteur, de son éditeur ou du Centre français d'exploitation du droit de copie (CFC, 20, rue des Grands-Augustins, 75006 Paris).</p>
--	--	---

© Dunod, 2010, 2022 pour la nouvelle présentation
11, rue Paul Bert, 92240 Malakoff
www.dunod.com
ISBN 978-2-10-084395-4

Le Code de la propriété intellectuelle n'autorisant, aux termes de l'article L. 122-5, 2^o et 3^o a), d'une part, que les « copies ou reproductions strictement réservées à l'usage privé du copiste et non destinées à une utilisation collective » et, d'autre part, que les analyses et les courtes citations dans un but d'exemple et d'illustration, « toute représentation ou reproduction intégrale ou partielle faite sans le consentement de l'auteur ou de ses ayants droit ou ayants cause est illicite » (art. L. 122-4).

Cette représentation ou reproduction, par quelque procédé que ce soit, constituerait donc une contrefaçon sanctionnée par les articles L. 335-2 et suivants du Code de la propriété intellectuelle.

TABLE DES MATIÈRES

INTRODUCTION	1
--------------	---

PREMIÈRE PARTIE

CINÉMATIQUE – CINÉTIQUE

CHAPITRE 1 • CINÉMATIQUE	7
1.1 Référentiels d'espace et de temps	7
1.2 Cinématique du point	11
CHAPITRE 2 • LE SOLIDE INDÉFORMABLE	12
2.1 Définition	12
2.2 Paramétrage de la position relative de deux solides	12
2.3 Cinématique du solide	19
Exercices	32
Solutions des exercices	41
CHAPITRE 3 • CINÉTIQUE	50
3.1 Torseur cinétique	50
3.2 Calcul des centres de masse	58
3.3 Calcul des moments d'inertie et de l'opérateur d'inertie	58
3.4 Moment d'inertie d'un solide par rapport à un point	63
3.5 Théorème d'Huyghens	64
3.6 Théorème d'Huyghens Steiner	65
3.7 Axes principaux d'inertie	66
3.8 Énergie cinétique d'un solide	68
3.9 Torseur dynamique	69
Exercices	71
Solutions des exercices	75

Table des matières

DEUXIÈME PARTIE

ACTION – LIAISONS – STATIQUE

CHAPITRE 4 • ACTIONS, LIAISONS	83
4.1 Action mécanique	83
4.2 Liaisons	93
4.3 Schématisation des systèmes mécaniques	108
Exercices	112
Solutions des exercices	112
CHAPITRE 5 • STATIQUE DES SOLIDES	114
5.1 Principe fondamental de la statique	114
5.2 Analyse des mécanismes	118
Exercices	127
Solutions des exercices	136

TROISIÈME PARTIE

CONSERVATION DE L'ÉNERGIE : PREMIER PRINCIPE

CHAPITRE 6 • INTRODUCTION	155
6.1 Énergétique	155
6.2 Conservation de l'énergie	160

QUATRIÈME PARTIE

PRINCIPE FONDAMENTAL DE LA DYNAMIQUE, PRINCIPE DES PUISSANCES VIRTUELLES

CHAPITRE 7 • PRINCIPE FONDAMENTAL DE LA DYNAMIQUE	167
7.1 Introduction : un peu d'histoire	167
7.2 Énoncé du principe fondamental de la dynamique	168
CHAPITRE 8 • PRINCIPE DES PUISSANCES VIRTUELLES	174
8.1 Introduction : un peu d'histoire	174
8.2 Énoncé du principe des puissances virtuelles	174

8.3 Choix de torseurs virtuels particuliers et théorèmes de la dynamique	175
Exercices	196
Solutions des exercices	200

CINQUIÈME PARTIE

ÉQUATIONS DU MOUVEMENT

CHAPITRE 9 • LINÉARISATION DES ÉQUATIONS DU MOUVEMENT	216
9.1 Linéarisation des équations de Lagrange	216
9.2 Vibrations autour d'une position d'équilibre stable	230
CHAPITRE 10 • CHOC ET PERCUSSIONS	232
10.1 Introduction	232
10.2 Cas d'un point matériel	232
10.3 Cas d'un solide ou d'un système de solides	233

SIXIÈME PARTIE

QUELQUES RAPPELS MATHÉMATIQUES SUR LES TORSEURS
ET LES TENSEURS

CHAPITRE 11 • CALCUL VECTORIEL	246
11.1 Opérations sur les vecteurs	246
11.2 Champs de vecteurs	249
CHAPITRE 12 • DÉRIVATION VECTORIELLE	253
12.1 Dérivée d'un vecteur	253
12.2 Changement de base de dérivation	254
12.3 Champ équiprojectif de vecteurs	256
12.4 Torseurs	257
12.5 Opérations sur les torseurs	259
12.6 Champ de vecteurs antisymétriques	260
12.7 Vecteurs liés, libres	261
12.8 Champ de moment	262

Table des matières

12.9 Axe d'un torseur	264
CHAPITRE 13 • ÉLÉMENTS SUR LES TENSEURS	265
BIBLIOGRAPHIE	268
INDEX	269

INTRODUCTION

Dans le langage courant, la mécanique est d'abord le domaine des machines (moteurs, véhicules, engrenages, poulies, arbres de transmission, piston...), bref, de tout ce qui produit ou transmet un mouvement ou bien s'oppose à ce mouvement. Pour les scientifiques, la mécanique est la discipline qui étudie les mouvements des systèmes matériels et les forces qui provoquent ou modifient ces mouvements. Les systèmes matériels étant très variés, de nombreuses branches de cette discipline co-existent. La mécanique générale (ou mécanique des systèmes de solides indéformables) qui est l'objet de cet ouvrage en est un exemple. Mais on peut également citer la mécanique des milieux continus (qui s'applique, comme son nom l'indique, aux milieux continus et continûment déformables), la mécanique statistique (qui s'applique aux milieux discrets, constitués d'un nombre considérable de composants), l'acoustique (qui s'applique aux gaz) ou la mécanique des fluides (qui s'applique aux liquides), la mécanique de la rupture (qui s'applique aux milieux fissurés), la mécanique des structures (plaques, poutres, coques)... La liste est longue même en se limitant à la mécanique non-relativiste.

Dans le cadre non-relativiste, déterminer les mouvements du système et les actions qui provoquent ces mouvements ou s'y opposent, consiste à établir un système d'équations en appliquant quatre principes fondamentaux :

- la conservation de la masse ;
- le principe fondamental de la dynamique (ou le principe des puissances virtuelles ou encore la conservation de la quantité de mouvement) ;
- la conservation de l'énergie (premier principe de la thermodynamique) ;
- le second principe de la thermodynamique.

Ces « bons » principes s'appliquent, quelle que soit la branche de la mécanique considérée, mais avec un formalisme très différent selon les familles de mouvements étudiés. L'étape clef de la résolution d'un problème de mécanique est donc la modélisation du mouvement appelée aussi *la cinématique*.

Le choix d'une cinématique plutôt qu'une autre change radicalement la forme des objets manipulés pour représenter le mouvement ou les actions susceptibles de modifier le mouvement. Ainsi, en mécanique des milieux continus, le milieu étant continu, un seul espace est défini : celui qui contient le milieu. Dans cet espace, le mouvement est représenté par un champ de déformation et les actions mécaniques par un champ de contrainte.

Introduction

Au contraire, en mécanique générale, le milieu est constitué de solides indéformables, il est donc *discontinu* par nature. Pour modéliser cette discontinuité, on travaillera dans une collection d'espaces (un espace par solide) en translation et en rotation les uns par rapport aux autres. Les mouvements se représentent alors par des objets appelés *torseurs cinématiques*, qui seront construits dans le premier chapitre. On leur associe des actions mécaniques appelées *torseurs des actions mécaniques*.

Le principe de conservation de la masse permet ensuite, via l'introduction d'une représentation condensée de la distribution de la masse dans un solide (masse, centre d'inertie, tenseur d'inertie d'un solide), d'exprimer les principes fondamentaux à l'échelle du solide, plutôt qu'à l'échelle d'un élément de volume de ce solide. Cette partie sera détaillée dans le chapitre cinétique.

Le mouvement et les principes fondamentaux s'écrivant alors à la même échelle (l'échelle du solide), les équations du mouvement peuvent être établies en s'appuyant sur le principe fondamental de la dynamique (ou la conservation de la quantité de mouvement ou encore le principe des puissances virtuelles). Cette approche conduit généralement à un système d'équations pour lequel le nombre d'équations est inférieur au nombre d'inconnues. Les équations complémentaires sont données par les lois de comportement, qui doivent vérifier le premier et le second principe de la thermodynamique. Ces lois de comportement seront très simples dans le cadre de la mécanique générale, par exemple :

- comportement rigide indéformable pour les solides ;
- lois de contact entre solides (lois de Coulomb) ;
- comportement de liaisons entre solides (liaison parfaites, élastiques ou visqueuses) ;
- lois d'action à distance (attraction gravitationnelle, par exemple).

Une fois que le système d'équations est établi, en utilisant par exemple la méthode de Lagrange, il peut être résolu pour déterminer les mouvements du système de solides indéformables étudié. Deux grands cadres peuvent être utilisés pour cette résolution. Le cadre des petits mouvements continus des solides, où les équations sont linéarisées en supposant que si la variation de position tend vers zéro, alors la variation de vitesse ou d'accélération en fait de même. Le cadre des chocs où cette hypothèse n'est pas valable, de très petites variations de position induisant de grandes variations de vitesses (lorsqu'une balle élastique entre en collision avec un mur, sa vitesse change brutalement de sens en conservant son module, alors que la balle n'a quasiment pas changé de position).

Pour terminer cette introduction, il est important de se convaincre que si les objets manipulés sont différents d'une branche à l'autre de la mécanique, les principes fondamentaux appliqués restent les mêmes. Il est donc possible de traiter un même problème avec deux approches différentes et d'obtenir des résultats identiques. Prenons par exemple un tas de sable sec, à l'échelle humaine il pourra être vu comme

un matériau déformable (le sable). À l'échelle des grains de sable, c'est un système de solides indéformables. Il pourra donc être modélisé dans deux cadres différents, la mécanique des milieux continus à l'échelle humaine, la mécanique générale à l'échelle des grains de sable, mais le résultat final doit être le même, puisqu'il s'agit bien du même tas de sable. Et nous ne parlons pas d'approches de type gaz qui peuvent s'appliquer aussi !

À l'inverse, la tour Eiffel est constituée de poutres et poutrelles déformables. Son mouvement peut être modélisé à l'échelle des poutres dans le cadre de la mécanique des poutres. Mais à l'échelle de la structure, le mouvement peut être simplifié et chaque poutre modélisée comme un assemblage de tiges rigides liées entre elles par des liaisons élastiques représentant la rigidité en flexion, torsion et traction-compression de la poutre. Encore une fois, il s'agit de la même tour Eiffel, et les résultats obtenus par ces différentes approches doivent être les mêmes.

Pour clore cette introduction nous signalons que cet ouvrage a pour objectif de réactualiser celui rédigé par J.-C. Bône, J. Morel et M. Boucher, réactualisation au sens de la mise en forme plus que des concepts, ceux-ci datant de quelques siècles. Nous avons repris bon nombre d'exercices et de figures issues d'un ouvrage récemment édité chez Dunod par l'un des auteurs avec de nombreux co-auteurs. Que ces derniers soient ici remerciés pour ces emprunts.

Partie I

Cinématique – Cinétique

1.1 RÉFÉRENTIELS D'ESPACE ET DE TEMPS

Nous allons donner quelques éléments utiles pour la compréhension générale mais nous conseillons au lecteur de se reporter à l'excellent ouvrage de P. Rougée [2] qui définit de façon très précise et commentée toutes les notions mathématiques importantes. Les quelques lignes qui suivent s'en inspirent en partie.

La notion de temps ou de durée en mécanique classique est un concept autonome. On parlera d'instants t dans un ensemble \mathcal{T} muni d'une chronologie. La différence entre deux instants est appelée durée. Les horloges – supposées galiléennes, terme qui sera précisé dans le chapitre dynamique – sont classiquement fondées sur des mouvements répétitifs : la rotation de la Terre a été le premier d'entre eux.

L'espace dans lequel nous allons travailler est celui qui nous entoure, modélisé par un espace affine réel euclidien de dimension trois. Il sera noté \mathcal{E} . Dans cet espace se trouvent des points qui peuvent constituer des droites ou des plans. Repérer des déplacements dans \mathcal{E} conduit à la notion de vecteur qui appartient à un espace vectoriel noté E de dimension trois lui aussi. Le point A qui se sera déplacé pour se trouver en un point B de \mathcal{E} conduit donc au vecteur déplacement noté $\mathbf{U} = \mathbf{AB}$.

Remarque

Dans cet ouvrage les vecteurs sont notés en gras (notation anglo-saxonne), par exemple \mathbf{x} , afin d'alléger l'écriture sachant que l'on trouve aussi comme notation \underline{x} ou \vec{x} dans d'autres ouvrages. Il n'y aura aucune confusion possible car nous ne manipulerons dans cet ouvrage que des scalaires x , des vecteurs \mathbf{x} ou des tenseurs constitués de vecteurs. Les tenseurs d'ordre deux seront évoqués à propos de tenseur d'inertie ou du vecteur rotation derrière lequel se cache un tenseur anti-symétrique. Nous donnons quelques informations opérationnelles sur les outils indispensables que sont les produits scalaire, vectoriel et mixte. Le lecteur est invité à se reporter à des ouvrages plus spécialisés pour plus de renseignements. Nous travaillerons dans tout ce cours avec des bases orthonormées directes. Il est donc important de savoir les construire rapidement. Nous utiliserons la méthode suivante (figure 1.1) : un premier vecteur unitaire \mathbf{u} est tracé. Le deuxième \mathbf{v} doit être directement perpendiculaire (avec un angle droit dans le sens trigonométrique). Le troisième en est déduit (par produit vectoriel) en utilisant la règle simple qui consiste à positionner le pouce (de la main droite) sur \mathbf{u} , l'index sur \mathbf{v} ; le majeur replié pointe alors dans la troisième direction et permet de tracer \mathbf{w} .

Partie I. Cinématique - Cinétique

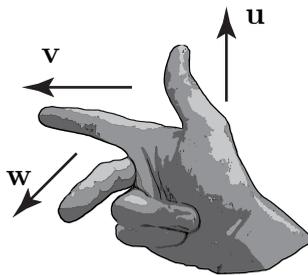


Figure 1.1 Règle de la main droite pour le produit vectoriel.

Le **produit scalaire** de deux vecteurs \mathbf{u} et \mathbf{v} est noté $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}$. Si ces vecteurs ont des composantes (x_u, y_u, z_u) et (x_v, y_v, z_v) dans une base orthonormée on a :

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = x_u x_v + y_u y_v + z_u z_v.$$

Si les vecteurs \mathbf{u} et \mathbf{v} font un angle θ (figure 1.2), on a :

$$\|\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}\| = \|\mathbf{u}\| \|\mathbf{v}\| \cos \theta.$$

Dans le cas où les deux vecteurs ont une norme unité, on a alors :

$$\|\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}\| = \cos \theta.$$

Les principales propriétés du produit scalaire sont :

- qu'il est symétrique $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \mathbf{v} \cdot \mathbf{u}$;
- qu'il est distributif sur l'addition des vecteurs $\mathbf{u} \cdot (\mathbf{v} + \mathbf{w}) = \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} + \mathbf{u} \cdot \mathbf{w}$;
- que deux vecteurs non nuls sont orthogonaux si et seulement si leur produit scalaire est nul.

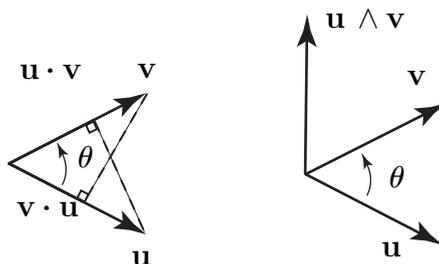


Figure 1.2 Produits scalaire et vectoriel.

Le produit vectoriel de deux vecteurs \mathbf{u} et \mathbf{v} est noté $\mathbf{u} \wedge \mathbf{v}$. Il s'agit d'un vecteur normal au plan contenant les deux vecteurs \mathbf{u} et \mathbf{v} . Si ces vecteurs ont des composantes (x_u, y_u, z_u) et (x_v, y_v, z_v) dans une base orthonormée, on a :

$$\mathbf{u} \wedge \mathbf{v} = (y_u z_v - z_u y_v) \mathbf{x} + (z_u x_v - x_u z_v) \mathbf{y} + (x_u y_v - y_u x_v) \mathbf{z}.$$

Si les vecteurs \mathbf{u} et \mathbf{v} font un angle θ , on a :

$$\|\mathbf{u} \wedge \mathbf{v}\| = \|\mathbf{u}\| \|\mathbf{v}\| \sin \theta.$$

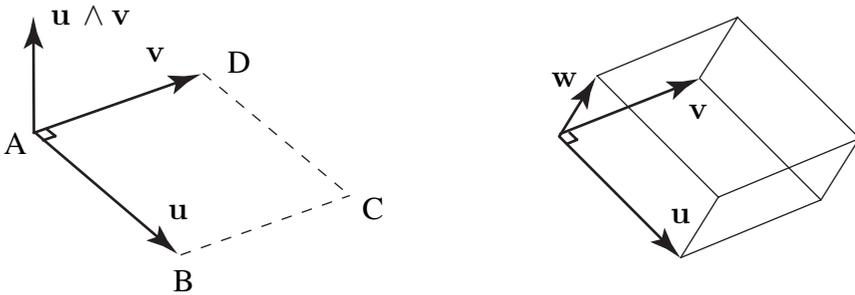


Figure 1.3 Produit vectoriel et produit mixte.

Le produit vectoriel $\mathbf{u} \wedge \mathbf{v}$ de deux vecteurs position \mathbf{u} et \mathbf{v} (dont la dimension est une longueur L) représente l'aire orientée du parallélogramme formé par ces deux vecteurs (dimension L^2) dirigée selon la normale à ce parallélogramme (figure 1.3).

Les principales propriétés du produit vectoriel sont :

- qu'il est antisymétrique $\mathbf{u} \wedge \mathbf{v} = -\mathbf{v} \wedge \mathbf{u}$;
- qu'il est distributif sur l'addition des vecteurs $\mathbf{u} \wedge (\mathbf{v} + \mathbf{w}) = \mathbf{u} \wedge \mathbf{v} + \mathbf{u} \wedge \mathbf{w}$;
- que deux vecteurs non nuls sont colinéaires si et seulement si leur produit vectoriel est nul.

Le produit mixte de trois vecteurs \mathbf{u} , \mathbf{v} et \mathbf{w} est noté $(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w})$. C'est par définition $(\mathbf{u} \wedge \mathbf{v}) \cdot \mathbf{w}$. Le produit mixte est inchangé par permutation circulaire directe :

$$(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}) = (\mathbf{w}, \mathbf{u}, \mathbf{v}) = (\mathbf{v}, \mathbf{w}, \mathbf{u}).$$

On a de la même manière les relations :

$$(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}) = -(\mathbf{v}, \mathbf{u}, \mathbf{w}),$$

ce qui signifie que pour toute permutation de deux termes du produit mixte, celui-ci change de signe. Le produit mixte $(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w})$ de trois vecteurs position \mathbf{u} , \mathbf{v} et \mathbf{w} (dimension L) représente le volume du parallélépipède formé par ces trois vecteurs (dimension L^3) (figure 1.3). On aura aussi besoin du double produit vectoriel

Partie I. Cinématique - Cinétique

$\mathbf{u} \wedge (\mathbf{v} \wedge \mathbf{w})$. On montre les relations suivantes :

$$\mathbf{u} \wedge (\mathbf{v} \wedge \mathbf{w}) = (\mathbf{u} \cdot \mathbf{w}) \mathbf{v} - (\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}) \mathbf{w},$$

$$(\mathbf{u} \wedge \mathbf{v}) \wedge \mathbf{w} = (\mathbf{u} \cdot \mathbf{w}) \mathbf{v} - (\mathbf{v} \cdot \mathbf{w}) \mathbf{u}.$$

Trièdre, base et repère d'espace. Nous appellerons **trièdre** l'ensemble noté $T(O, x, y, z)$ défini par trois axes concourants en O de vecteurs unitaires \mathbf{x} , \mathbf{y} et \mathbf{z} non coplanaires. Le plus souvent repère d'espace R et trièdre T sont confondus (ou se définissent mutuellement). On notera donc R , dans tout ce document, le repère d'espace constitué du point O et des axes Ox , Oy et Oz associé à la **base** constituée des trois vecteurs unitaires $(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z})$. On notera (par abus mais cette notation est classique en mécanique) $R(O, \mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z})$ ce repère. Lorsque ce repère sera associé à un solide particulier S_i le repère sera noté R_i et s'entendra comme constitué de $R_i = (O_i, \mathbf{x}_i, \mathbf{y}_i, \mathbf{z}_i)$ sauf cas particulier qui sera indiqué.

Mouvement discontinu et repères d'espace. Dans un modèle mécanique, la première étape de la modélisation est la cinématique, c'est-à-dire la modélisation du mouvement. Si le milieu est assimilé à un ensemble de solides indéformables, le mouvement est discontinu au passage d'un solide à un autre solide. Plutôt que de chercher à modéliser les discontinuités du mouvement dans un seul espace \mathcal{E} , il a été choisi de représenter le mouvement à l'aide d'une collection d'espaces (un espace pour chaque solide) dans lesquels le mouvement est continu.

Remarque

La notion d'espace est donc centrale en mécanique générale, mais est parfois un peu délicate à manipuler. En effet, on associe un espace à un objet, mais cet espace est infini et ne s'arrête donc pas aux frontières de l'objet. Par conséquent, les espaces se recouvrent et plusieurs espaces coïncident en un même point M . Aussi doit-on généralement préciser à quel espace appartient le point M dont on décrit le mouvement. Reprenons un exemple donné par Rougée [2]. Une mouette - perçue comme un point M - posée en haut du mât d'un bateau, se trouve, à un instant donné t , à la fois au sommet du mât et dans l'air, à x mètres de la surface de la mer et à y centaines de mètres de la côte. À l'instant t , trois espaces coïncident donc au point M , attachés respectivement à la mouette, au bateau et à l'espace géographique (la côte). Comme entre deux instants t et t' le bateau et la mouette se déplacent par rapport à la côte, la situation évolue. Ainsi, lorsqu'on écrit une expression aussi simple que *la vitesse du point M est parallèle à OM* , le point M dont on suit le mouvement (la mouette, par exemple) doit être distingué du point M de l'espace géographique ($M \in \text{air}$) qui permet de repérer une position ou la direction du vecteur vitesse à l'instant t .

Notion de référentiel du mouvement. Dans la collection d'espaces introduite pour décrire le mouvement d'un système de solides, l'un d'eux est défini comme le référentiel du mouvement. Cet espace sera considéré comme fixe, en première approximation, lors des opérations (calculs de vitesses ou d'accélération) qui

impliquent des dérivées par rapport au temps. Cette notion est tout à fait intuitive. Prenons un solide – la Terre par exemple – auquel nous associons un espace affine réel de dimension trois \mathcal{E} . Cet espace est attaché au solide, mais ne se limite pas à lui et s'étend à l'infini, l'espace \mathcal{E} est tout entier entraîné par ce solide. Pour un mouvement se produisant au voisinage immédiat de la Terre, l'hypothèse est valide. En revanche, si le mouvement d'un objet se produit à l'échelle de l'espace de Copernic (une fusée interplanétaire) l'espace associé à la Terre ne sera pas utilisé comme référentiel du mouvement, puisque cet espace occupe successivement des espaces \mathcal{E}_t dans l'espace de Copernic et ne peut certainement pas être considéré comme fixe à l'échelle du problème étudié.

1.2 CINÉMATIQUE DU POINT

On rappelle ici les définitions de la position, de la vitesse et de l'accélération d'un point M par rapport à un repère R (O, \mathbf{x} , \mathbf{y} , \mathbf{z}).

Le **vecteur position** du point M dans le repère R (O, \mathbf{x} , \mathbf{y} , \mathbf{z}), à l'instant t , est le vecteur $\mathbf{OM}(t)$.

La **trajectoire** T du point M est l'ensemble des points P de R avec lesquels coïncide M au cours de son mouvement au cours du temps t .

Le **vecteur vitesse** du point M par rapport au repère R, à l'instant t , est la dérivée du vecteur position $\mathbf{OM}(t)$ par rapport à t dans R. La dimension physique de la vitesse est LT^{-1} . Le vecteur vitesse du point M à l'instant t est tangent à la trajectoire en $M(t)$.

$$\mathbf{V}(M/R) = \left. \frac{d\mathbf{OM}(t)}{dt} \right|_R.$$

Le **vecteur accélération** du point M par rapport au repère R, à l'instant t , est la dérivée du vecteur vitesse $\mathbf{V}(M/R)$ par rapport à t , dans R. La dimension physique de l'accélération est LT^{-2} .

$$\mathbf{\Gamma}(M/R) = \left. \frac{d\mathbf{V}(M/R)}{dt} \right|_R.$$

2

LE SOLIDE INDÉFORMABLE

2.1 DÉFINITION

Un solide est dit indéformable lorsque – quels que soient les points A et B de ce solide – la distance AB reste constante au cours du mouvement. On se limitera par la suite à appeler « solide » un solide indéformable. On peut imaginer que, dans l'exemple ci-dessous, les points A et B répondent bien à cette définition mais évidemment pas ceux qui se situent dans la zone du choc. L'étude du mouvement du solide S_2 par rapport au solide S_1 est identique à l'étude du mouvement de l'espace R_2 attaché au solide S_2 par rapport à l'espace R_1 attaché au solide S_1 .



Figure 2.1 Solide indéformable.

2.2 PARAMÉTRAGE DE LA POSITION RELATIVE DE DEUX SOLIDES

Positionner le solide S_2 par rapport au solide S_1 revient donc à positionner le repère R_2 attaché au solide S_2 , par rapport au repère R_1 . La position du repère R_2 par rapport à R_1 est complètement déterminée si l'on se fixe :

1. **L'orientation de la base** de R_2 par rapport à celle de R_1 . La base de R_1 est définie par deux vecteurs unitaires et orthogonaux, le troisième vecteur se déduisant des deux autres par un produit vectoriel. Trois paramètres indépendants sont donc nécessaires pour positionner l'orientation de la base (x_2, y_2, z_2) par rapport à la base (x_1, y_1, z_1) .

2. **Les coordonnées de l'origine** O_2 du repère R_2 dans le repère R_1 . Il existe plusieurs façons de définir ces coordonnées (cartésiennes, cylindriques, sphériques, curvilignes...). Quel que soit le système de coordonnées choisi, trois paramètres indépendants sont nécessaires pour positionner O_2 dans R_1 .

2.2.1 Définition de l'orientation relative de deux bases

Dans un premier temps on cherche à définir l'orientation de la base (x, y, z) du repère $R_2(O_2, x, y, z)$ par rapport à la base (x_1, y_1, z_1) du repère $R_1(O_1, x_1, y_1, z_1)$. Cette orientation est toujours définie par trois paramètres. La méthode la plus générale consiste à représenter cette orientation par une rotation autour d'un vecteur unitaire instantané. C'est ce que l'on appelle la paramétrisation axio-angulaire. D'autres méthodes existent également, qui permettent de décomposer la rotation de la base 1 par rapport à celle de la base 2 en rotations élémentaires autour d'axes connus. Les deux méthodes les plus usuelles sont le paramétrage par les angles d'Euler et par les angles de Cardan dit aussi de « roulis, tangage, lacet », mais dix autres possibilités sont également possibles. Le lecteur pourra aussi se référer aux quaternions.

• *Paramétrisation axio-angulaire des rotations*

Notons Q l'opérateur de rotation d'angle α , autour d'un axe défini par le vecteur unitaire e de R , qui transforme un vecteur a de R en un vecteur b . La composante du vecteur a portée par e est $(e \cdot a)e$. Le complément, c'est-à-dire la composante de a dans le plan de normale e s'écrit $(-e \wedge (e \wedge a))$ (figure 2.2). Le vecteur a s'écrit :

$$a = (e \cdot a)e - e \wedge (e \wedge a).$$

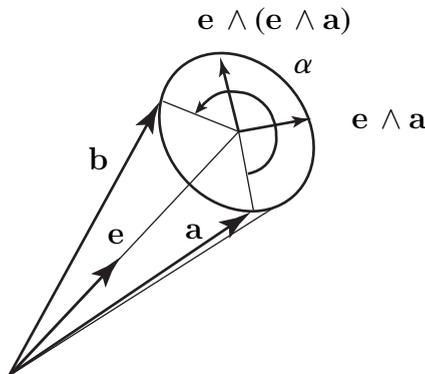


Figure 2.2 Paramétrage axio-angulaire d'une rotation.

Le vecteur b , obtenu par rotation d'un angle α du vecteur a autour de e s'écrit alors (figure 2.2) :

$$b = (e \cdot a)e + \cos \alpha(-e \wedge (e \wedge a)) + \sin \alpha(e \wedge a),$$

Partie I. Cinématique - Cinétique

ou encore :

$$\mathbf{b} = Q(\mathbf{a}) = (1 - \cos \alpha)(\mathbf{e} \cdot \mathbf{a}) \mathbf{e} + \cos \alpha \mathbf{a} + \sin \alpha (\mathbf{e} \wedge \mathbf{a}).$$

L'opérateur rotation Q d'un angle α autour d'un vecteur \mathbf{e} peut alors s'écrire :

$$\underline{\underline{Q}} = (1 - \cos \alpha) \mathbf{e} \otimes \mathbf{e} + \cos \alpha \underline{\underline{I}} + \sin \alpha \mathbf{e}^\wedge,$$

où l'opérateur \mathbf{e}^\wedge est tel que : $\mathbf{e}^\wedge(\mathbf{v}) = \mathbf{e} \wedge \mathbf{v} \quad \forall \mathbf{v}$. Nous demandons au lecteur de se reporter aux annexes pour la définition du produit tensoriel \otimes . La notation $\underline{\underline{Q}}$ correspond au tenseur d'ordre deux Q (l'opérateur mentionné plus haut).

Les vecteurs \mathbf{e} et \mathbf{a} étant fixes dans \mathbb{R} , la vitesse du vecteur \mathbf{b} , en rotation autour de l'axe \mathbf{e} vaut :

$$\left. \frac{d\mathbf{b}}{dt} \right|_{\mathbb{R}} = \dot{\alpha} \sin \alpha (\mathbf{e} \wedge (\mathbf{e} \wedge \mathbf{a})) + \dot{\alpha} \cos \alpha (\mathbf{e} \wedge \mathbf{a}).$$

En remarquant que :

$$\mathbf{e} \wedge \mathbf{b} = \cos \alpha (\mathbf{e} \wedge \mathbf{a}) + \sin \alpha (\mathbf{e} \wedge \mathbf{e} \wedge \mathbf{a}),$$

on en déduit :

$$\left. \frac{d\mathbf{b}}{dt} \right|_{\mathbb{R}} = \dot{\alpha} (\mathbf{e} \wedge \mathbf{b}).$$

De cette expression découle la formule de changement de base de dérivation (p. 17).

L'opérateur vitesse de rotation $\underline{\underline{\Omega}}_R^\wedge$, autour d'un vecteur \mathbf{e} de \mathbb{R} à la vitesse $\dot{\alpha}$ peut alors s'écrire :

$$\underline{\underline{\Omega}}_R^\wedge = \dot{\alpha} \mathbf{e}^\wedge.$$

Remarque

Par la suite, on parlera **abusivement** de vecteur vitesse de rotation $\underline{\underline{\Omega}} = \dot{\alpha} \mathbf{e}$, mais on doit bien garder en mémoire qu'il ne s'agit en aucun cas d'un vecteur mais d'un tenseur d'ordre deux antisymétrique. Ce tenseur ayant trois composantes non nulles on peut décider de le représenter par un vecteur (c'est courant en mécanique des milieux continus avec le vecteur contrainte, le vecteur déformation et la matrice 6×6 de comportement). C'est donc par commodité qu'on note le tenseur vitesse de rotation comme un vecteur, mais ce pseudo-vecteur n'obéit pas aux règles habituelles applicables aux vecteurs. Par exemple, le produit scalaire de deux vecteurs vitesse de rotation n'a aucun sens. On pourra utiliser pour $\underline{\underline{\Omega}}$ le terme de **pseudo-vecteur**.

• *Angles d'Euler*

Les angles d'Euler correspondent à la composition de trois rotations planes successives qui permettent de faire coïncider la base (x, y, z) avec la base (x_1, y_1, z_1) . La première rotation d'angle ψ , autour de l'axe (O, z_1) permet de passer à une première base intermédiaire $(u, v, z_1 = z)$. L'angle ψ est appelé « angle de précession ».

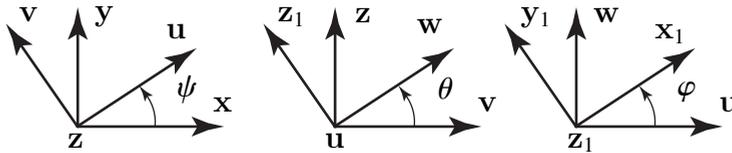


Figure 2.3 Angles d'Euler.

Une deuxième rotation d'angle θ est alors appliquée autour de l'axe (O, u) , de la première base intermédiaire, ce qui permet de définir une deuxième base intermédiaire (u, w, z_1) . L'angle θ est appelé « angle de nutation ».

Une dernière rotation d'angle φ est appliquée autour de l'axe (O, z_1) de la seconde base intermédiaire, ce qui permet de positionner la base (x_1, y_1, z_1) . L'angle φ est appelé « angle de rotation propre ».

La composition de rotations planes successives permet de dessiner des figures de projection qui sont souvent très utiles pour la résolution des problèmes.

• *Angles de Cardan*

Les trois angles de Cardan, ou « roulis, tangage, lacet » correspondent à la composition de trois rotations planes successives qui permettent de faire coïncider la base (x, y, z) avec la base (x_1, y_1, z_1) . La première rotation d'angle θ , autour de l'axe (O, x) permet de passer à une première base intermédiaire (x, u, v) . L'angle θ est appelé « angle de roulis ».

Une seconde rotation d'angle ψ , est alors appliquée autour de l'axe (O, u) , de la première base intermédiaire, ce qui permet de définir une seconde base intermédiaire (u, z_1, w) . L'angle ψ est appelé « angle de tangage ».

Une dernière rotation d'angle μ est appliquée autour de l'axe (O, z_1) de la seconde base intermédiaire, ce qui permet de positionner la base (z_1, x_1, y_1) . L'angle μ est appelé « angle de lacet ».

Ce paramétrage est habituellement employé pour paramétrer de petits mouvements du solide autour d'une base (x, y, z) définie à l'aide de la trajectoire du centre de gravité du solide dans le référentiel du mouvement R. La direction x , axe de roulis, est confondue avec la direction du vecteur vitesse du point O_1 par rapport au référentiel R. La direction (O, y) , axe de tangage, est orthogonale à (O, x) , dans le plan local défini par la trajectoire du point O_1 . La direction (O, z) , axe de lacet, est orthogonale au plan local défini par la trajectoire du point O_1 .

Partie I. Cinématique - Cinétique

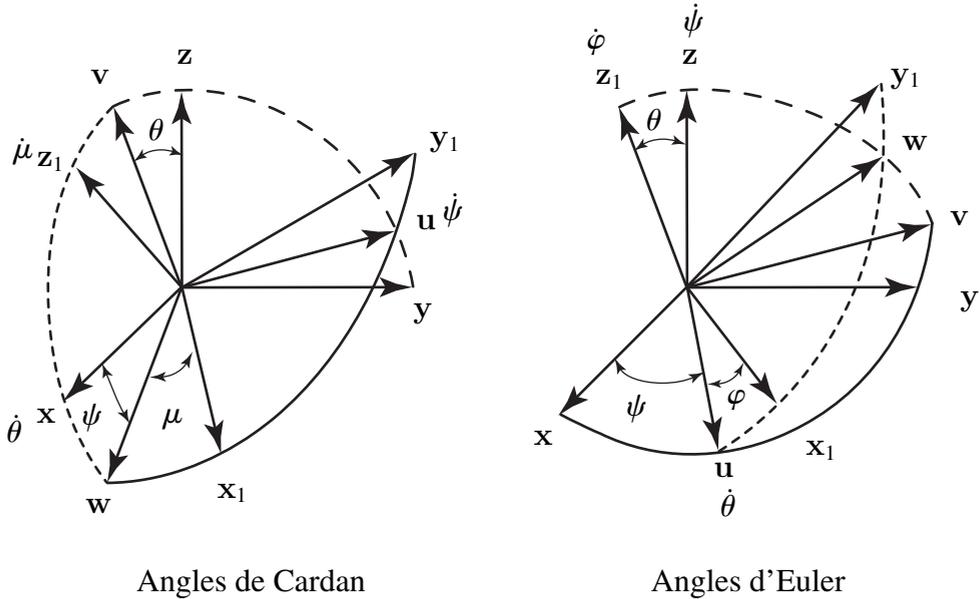


Figure 2.4 Angles d'Euler et de Cardan.

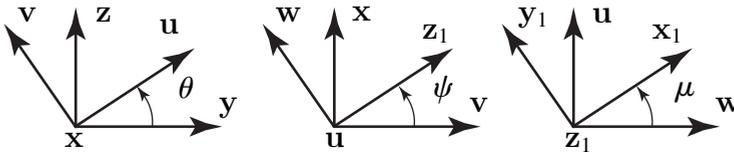


Figure 2.5 Angles de Cardan.

2.2.2 Systèmes de coordonnées

On cherche maintenant à positionner l'origine O_2 du repère R_2 dans un repère R_1 . Il existe trois systèmes de coordonnées classiques : les coordonnées, cartésiennes, cylindriques et sphériques. Nous allons noter dans les figures qui suivent R et R_1 les deux repères et O l'origine de R . Nous nous intéressons aux coordonnées et à la vitesse d'un point M (le point O_2 précédent).

a) Coordonnées cartésiennes

Les coordonnées cartésiennes, notées (x_M, y_M, z_M) du point M dans le repère $R(O, x, y, z)$ sont les projections du vecteur OM sur chacun des axes (x, y, z) (voir figure 2.6).

$$OM = OM \cdot x + OM \cdot y + OM \cdot z = x_M x + y_M y + z_M z.$$

En coordonnées cartésiennes, la vitesse du point M, par rapport au repère R s'écrit :

$$\left. \frac{d\mathbf{OM}}{dt} \right|_R = \frac{dx_M}{dt} \mathbf{x} + \frac{dy_M}{dt} \mathbf{y} + \frac{dz_M}{dt} \mathbf{z} = \dot{x}_M \mathbf{x} + \dot{y}_M \mathbf{y} + \dot{z}_M \mathbf{z}.$$

On notera le plus souvent la dérivée par rapport au temps $\frac{dx}{dt}$ de la façon suivante \dot{x} .

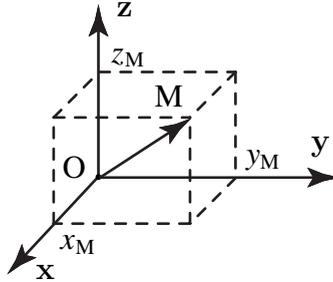


Figure 2.6 Vecteur position pour un repère cartésien.

b) Coordonnées cylindriques

Pour définir les coordonnées cylindriques, il faut d'abord définir la projection H du point M dans le plan (O, x, y), puis un vecteur unitaire \mathbf{u} de direction OH. Les coordonnées cylindriques du point M sont alors : r_M , norme du vecteur \mathbf{OH} , $\theta_M = (\mathbf{x}, \mathbf{u})$, angle orienté dans le plan de normale \mathbf{z} et z_M , projection de OM sur l'axe \mathbf{z} :

$$\mathbf{OM} = r_M \mathbf{u} + z_M \mathbf{z}.$$

Les relations entre les coordonnées cartésiennes et cylindriques sont données par :

$$x_M = r_M \cos \theta_M \quad y_M = r_M \sin \theta_M.$$

En coordonnées cylindriques, la vitesse du point M, par rapport au repère R s'écrit :

$$\left. \frac{d\mathbf{OM}}{dt} \right|_{B_0} = \frac{dr_M}{dt} \mathbf{u} + r_M \frac{d\theta}{dt} \mathbf{v} + \frac{dz_M}{dt} \mathbf{z} = \dot{r}_M \mathbf{u} + r_M \dot{\theta}_M \mathbf{v} + \dot{z}_M \mathbf{z},$$

où $\mathbf{v} = \mathbf{z} \wedge \mathbf{u}$. En effet, en appliquant la formule de changement de base de dérivation :

$$\left. \frac{d\mathbf{OM}}{dt} \right|_{B_0=(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z})} = \left. \frac{d\mathbf{OM}}{dt} \right|_{B_1=(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{z})} + \boldsymbol{\Omega}(B_1/B_0) \wedge \mathbf{OM}.$$

Soit

$$\left. \frac{d\mathbf{OM}}{dt} \right|_{B_0=(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z})} = \frac{dr_M}{dt} \mathbf{u} + \frac{dz_M}{dt} \mathbf{z} + \frac{d\theta_M}{dt} \mathbf{z} \wedge r_M \mathbf{u} + z_M \mathbf{z} = \dot{r}_M \mathbf{u} + \dot{z}_M \mathbf{z} + r_M \dot{\theta}_M \mathbf{v}.$$

Partie I. Cinématique - Cinétique

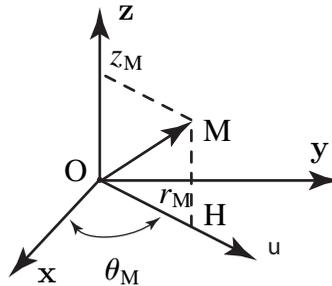


Figure 2.7 Vecteur position pour un repérage cylindrique.

c) Coordonnées sphériques

Pour définir les coordonnées sphériques, il faut d'abord définir la projection H du point M dans le plan (O, x, y) puis un vecteur unitaire \mathbf{u} de direction OH, et enfin un vecteur unitaire \mathbf{w} de direction OM. Les coordonnées sphériques du point M sont alors :

$\varrho_M = OM$, la mesure algébrique de la distance OM ;

$\theta_M = (\mathbf{x}, \mathbf{u})$, angle orienté dans le plan de normale \mathbf{z} ;

$\varphi_M = (\mathbf{z}, \mathbf{w})$, angle orienté dans le plan de normale \mathbf{v} , où $\mathbf{v} = \mathbf{z} \wedge \mathbf{u}$.

$$\mathbf{OM} = \varrho_M \mathbf{w}.$$

Les relations entre les coordonnées cartésiennes et sphériques :

$$\begin{cases} x_M = \varrho_M \sin \varphi_M \cos \theta_M, \\ y_M = \varrho_M \sin \varphi_M \sin \theta_M, \\ z_M = \varrho_M \cos \varphi_M. \end{cases}$$

En coordonnées sphériques, la vitesse du point M, par rapport au repère R_1 s'écrit :

$$\left. \frac{d\mathbf{OM}}{dt} \right|_{R_1} = \dot{\varrho}_M \mathbf{w} + \varrho_M \sin \varphi_M \dot{\theta}_M \mathbf{v} - \varrho_M \sin \varphi_M \dot{\varphi}_M \mathbf{z}.$$

En effet, en appliquant la formule de changement de base de dérivation :

$$\left. \frac{d\mathbf{OM}}{dt} \right|_{B_0=(x, y, z)} = \left. \frac{d\mathbf{OM}}{dt} \right|_{B_1=(\mathbf{n}, \mathbf{v}, \mathbf{w})} + \boldsymbol{\Omega}(B_1/B_0) \wedge \mathbf{OM}.$$

Soit :

$$\left. \frac{d\mathbf{OM}}{dt} \right|_{B_0=(x, y, z)} = \dot{\varrho}_M \mathbf{w} + (\dot{\theta}_M \mathbf{z} + \dot{\varphi}_M \mathbf{v}) \wedge (\varrho_M \mathbf{w}).$$

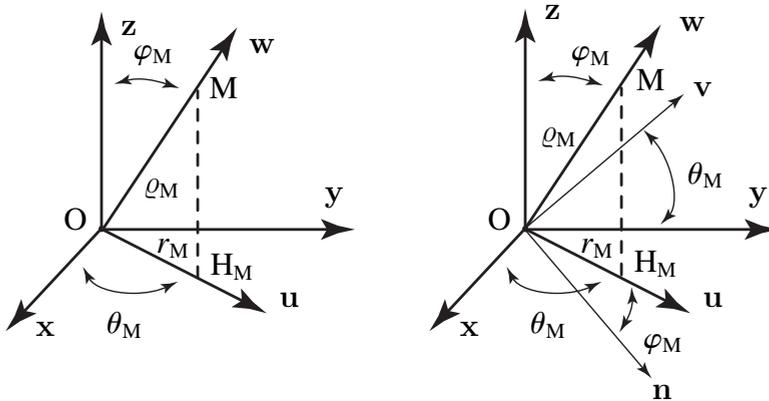


Figure 2.8 Vecteur position pour un repérage sphérique.

2.3 CINÉMATIQUE DU SOLIDE

2.3.1 Introduction, notations

Soit un point P_1 d'un solide S_1 en mouvement par rapport au repère R . Les vecteurs vitesse et accélération du point P_1 par rapport au repère R sont alors notés : $\mathbf{V}(P_1 \in S_1/R)$ et $\mathbf{\Gamma}(P_1 \in S_1/R)$. Cette notation permet de préciser à quel solide appartient le point dont on suit le mouvement lorsque plusieurs espaces coïncident au même point. Cela permet aussi de distinguer la vitesse d'un point appartenant à un solide, de la vitesse d'un point de l'espace n'appartenant à aucun solide, comme le point de contact P entre les solides S_1 et S_2 . La vitesse du point P sera alors notée : $\mathbf{V}(P/R)$.

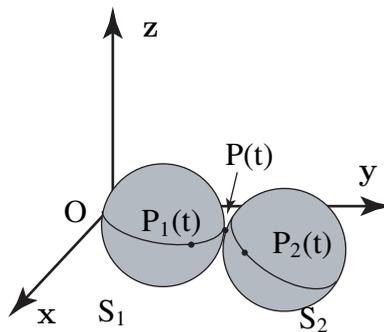


Figure 2.9 Vitesses des points d'un solide.

Partie I. Cinématique – Cinétique

2.3.2 Champ des vecteurs vitesses des points d'un solide : torseur cinématique

Supposons un référentiel du mouvement R_1 d'origine O_1 et un solide S_2 en mouvement par rapport à ce référentiel, auquel est attaché un repère R_2 d'origine O_2 . La base attachée à R_2 a une vitesse de rotation $\boldsymbol{\Omega}(R_2/R_1)$ par rapport à la base attachée à R_1 . Supposons deux points quelconques A et B du solide S_2 , alors en utilisant la paramétrisation axio-angulaire des rotations on peut écrire :

$$\left. \frac{d\mathbf{AB}}{dt} \right|_{R_1} = \boldsymbol{\Omega}(R_2/R_1) \wedge \mathbf{AB},$$

dont on déduit la formule de changement de point pour le champ des vecteurs vitesses des points d'un solide :

$$\forall A, \forall B \in S_2 \quad \mathbf{V}(B \in S_2/R_1) = \mathbf{V}(A \in S_2/R_1) + \boldsymbol{\Omega}(R_2/R_1) \wedge \mathbf{AB}.$$

La vitesse d'un point B quelconque du solide S_2 peut donc se calculer à partir de la vitesse d'un point A de S_2 et de la vitesse de rotation du solide par rapport au référentiel du mouvement. Le champ des vecteurs vitesses des points du solide S_2 par rapport à R_1 peut être représenté par un torseur, dit torseur cinématique, noté $\{\mathcal{V}\}$ (V comme vitesse) dont la résultante est la vitesse de rotation de la base B_2 par rapport à la base B_1 et le moment en un point A, la vitesse du point A appartenant au solide S_2 , par rapport au repère R_1 :

$$\{ \mathcal{V}(S_2/R_1) \} = \left\{ \begin{array}{c} \boldsymbol{\Omega}(S_2/R_1) \\ \mathbf{V}(A \in S_2/R_1) \end{array} \right\}_A.$$

Remarque

Nous indiquerons le point d'expression (ou de calcul) des torseurs en indice ce qui n'est pas une obligation puisqu'il est défini dans le moment du torseur. L'expérience indique que cela permet d'éviter des erreurs. Nous n'indiquerons jamais le point dans l'expression générique du type : $\{ \mathcal{V}(S_2/R_1) \}$ sauf cas particulier de relations de type composition.

Remarque

Nous manipulons des objets appelés vecteurs, vecteur position, vecteur vitesse ou encore vecteur vitesse de rotation. La notion de vecteur est différente en mathématiques et en mécanique ou en physique. Par exemple, dans notre cas, le vecteur est attaché (lié) au point dont on exprime la vitesse $\mathbf{V}(B \in S_2/R_1)$. Par ailleurs, certaines quantités sont notées, par commodité, sous forme de vecteurs (pseudo-vecteurs) mais n'obéissent pas aux mêmes règles que les « vrais » vecteurs que sont les vecteurs déplacements ou vitesse de déplacement. C'est le cas déjà souligné, par exemple, du « vecteur vitesse de rotation ». C'est en raison de ces subtilités que seul le produit scalaire d'une force par une vitesse ou d'un moment par une vitesse de rotation a

un sens physique (une puissance). Le produit scalaire d'une force par une vitesse de rotation donne naissance à un être exotique ! Le lecteur peut se référer à l'ouvrage [2] par exemple pour trouver des compléments, en particulier sur les notions de tenseur antisymétrique d'ordre deux, de covariance ou de contravariance.

a) Équiprojectivité

Comme le champ des vecteurs vitesses d'un solide se représente par un torseur, c'est un champ équiprojectif. Cela signifie que quels que soient deux points A et B d'un solide S_2 :

$$\forall A, \forall B \in S_2 \quad \mathbf{AB} \cdot \mathbf{V}(A \in S_2/R_1) = \mathbf{AB} \cdot \mathbf{V}(B \in S_2/R_1).$$

On peut aussi le montrer directement, à partir de la propriété d'indéformabilité du solide. Si S_2 est un solide indéformable, quels que soient A et B deux points appartenant à S_2 alors la distance AB reste constante au cours du temps. Cela s'écrit :

$$\frac{d(\mathbf{AB} \cdot \mathbf{AB})}{dt} = 0 = \left. \frac{d\mathbf{AB}}{dt} \right|_{R_1} \cdot \mathbf{AB}.$$

Cela s'écrit aussi :

$$\left. \frac{d(\mathbf{O}_1\mathbf{B} - \mathbf{O}_1\mathbf{A})}{dt} \right|_{R_1} \cdot \mathbf{AB} = [\mathbf{V}(B \in S_2/R_1) - \mathbf{V}(A \in S_2/R_1)] \cdot \mathbf{AB} = 0,$$

dont on déduit :

$$\forall A, B \in S_2 \quad \mathbf{AB} \cdot \mathbf{V}(A \in S_2/R_1) = \mathbf{AB} \cdot \mathbf{V}(B \in S_2/R_1).$$

Le champ des vitesses des points d'un solide indéformable est donc bien équiprojectif. Cette propriété est utilisée en cinématique graphique pour résoudre graphiquement des problèmes de cinématique.

Nous insistons à ce stade sur la propriété importante d'équivalence entre champ équiprojectif et champ de moment de torseur. Cette démonstration est faite dans les annexes.

b) Calcul du vecteur rotation instantané

D'après ce qui a été dit plus haut, la dérivée des vecteurs unitaires ($\mathbf{x}_2, \mathbf{y}_2, \mathbf{z}_2$) de la base du repère R_2 par rapport au référentiel R_1 , se calcule comme suit :

$$\left. \frac{d\mathbf{x}_2}{dt} \right|_{R_1} = \boldsymbol{\Omega}(R_2/R_1) \wedge \mathbf{x}_2.$$

On en déduit alors, si l'on connaît les dérivées des vecteurs unitaires :

$$2\boldsymbol{\Omega}(S_2/R_1) = \mathbf{x}_2 \wedge \left. \frac{d\mathbf{x}_2}{dt} \right|_{R_1} + \mathbf{y}_2 \wedge \left. \frac{d\mathbf{y}_2}{dt} \right|_{R_1} + \mathbf{z}_2 \wedge \left. \frac{d\mathbf{z}_2}{dt} \right|_{R_1}.$$

Partie I. Cinématique - Cinétique

c) Mouvement de translation

Si le mouvement du solide S_2 par rapport à R_1 se représente par un torseur couple :

$$\{ \mathcal{V}(S_2/R_1) \} = \left\{ \begin{array}{c} \mathbf{0} \\ \mathbf{V}(A \in S_2/R_1) \end{array} \right\}_A \quad \forall A,$$

alors : $\forall A \in S_2 \quad \mathbf{V}(B \in S_2/R_1) = \mathbf{V}(A \in S_2/R_1)$. Le solide S_2 est en translation par rapport à R_1 .

d) Mouvement de rotation instantanée

Si le mouvement du solide S_2 par rapport à R_1 se représente au point A, par un torseur résultante :

$$\{ \mathcal{V}(S_2/R_1) \} = \left\{ \begin{array}{c} \boldsymbol{\Omega}(S_2/R_1) \\ \mathbf{0} \end{array} \right\}_A,$$

alors : $\forall B \in S_2 \quad \mathbf{V}(B \in S_2/R_1) = \mathbf{BA} \wedge \boldsymbol{\Omega}(S_2/R_1)$. Le solide S_2 est en rotation par rapport à R_1 autour de l'axe central (Δ) du torseur cinématique. Cet axe central passe par le point A et sa direction est alignée avec $\boldsymbol{\Omega}$.

2.3.3 Champ des vecteurs accélération des points d'un solide

La formule de changement de base de dérivation permet de définir le champ des vecteurs accélération des points d'un solide, par rapport au référentiel du mouvement. Supposons un référentiel du mouvement R_1 et un solide S_2 en mouvement par rapport à ce référentiel, auquel est attaché un repère R_2 . La base attachée à R_2 a une vitesse de rotation $\boldsymbol{\Omega}$ par rapport à la base attachée à R_1 . Supposons deux points quelconques A et B du solide S_2 , alors :

$$\forall A, B \in S_2 \quad \mathbf{V}(B \in S_2/R_1) = \mathbf{V}(A \in S_2/R_1) + \boldsymbol{\Omega}(S_2/R_1) \wedge \mathbf{AB}.$$

La relation entre les vecteurs accélération des points A et B du solide S_2 dans son mouvement par rapport au repère R_1 s'obtient en dérivant les deux membres de cette égalité par rapport à t dans le repère R_1 :

$$\left. \frac{d\mathbf{V}(B \in S_2/R_1)}{dt} \right|_{R_1} = \left. \frac{d\mathbf{V}(A \in S_2/R_1)}{dt} \right|_{R_1} + \left. \frac{d(\boldsymbol{\Omega}(S_2/R_1) \wedge \mathbf{AB})}{dt} \right|_{R_1}.$$

Cela s'écrit :

$$\boldsymbol{\Gamma}(B \in S_2/R_1) = \boldsymbol{\Gamma}(A \in S_2/R_1) + \left. \frac{d(\boldsymbol{\Omega}(S_2/R_1) \wedge \mathbf{AB})}{dt} \right|_{R_1}.$$

En développant le dernier terme on obtient :

$$\Gamma(\mathbf{B} \in S_2/R_1) = \Gamma(\mathbf{A} \in S_2/R_1) + \boldsymbol{\Omega}(S_2/R_1) \wedge \left. \frac{d\mathbf{AB}}{dt} \right|_{R_1} + \left. \frac{d\boldsymbol{\Omega}(S_2/R_1)}{dt} \right|_{R_1} \wedge \mathbf{AB}.$$

Pour calculer la dérivée de \mathbf{AB} par rapport à t , on utilise la formule de changement de base de dérivation, soit :

$$\left. \frac{d\mathbf{AB}}{dt} \right|_{R_1} = \left. \frac{d\mathbf{AB}}{dt} \right|_{S_2} + \boldsymbol{\Omega}(S_2/R_1) \wedge \mathbf{AB} = \mathbf{0} + \boldsymbol{\Omega}(S_2/R_1) \wedge \mathbf{AB}.$$

On en déduit la formule de changement de point du champ des vecteurs accélérations d'un solide :

$$\Gamma(\mathbf{B} \in S_2/R_1) = \Gamma(\mathbf{A} \in S_2/R_1) + \left. \frac{d\boldsymbol{\Omega}(S_2/R_1)}{dt} \right|_{R_1} \wedge \mathbf{AB} + \boldsymbol{\Omega}(S_2/R_1) \wedge (\boldsymbol{\Omega}(S_2/R_1) \wedge \mathbf{AB}).$$

Ainsi, le champ des vecteurs accélérations des points d'un solide ne peut pas être représenté par un torseur, du fait de l'existence du dernier terme. Ce point est très important et marque la différence entre champ des vitesses et des accélérations.

2.3.4 Composition des mouvements

a) Introduction

Soit un point P , appartenant à un solide S_2 , en mouvement à la fois par rapport à un repère $R_1(O_1, \mathbf{x}_1, \mathbf{y}_1, \mathbf{z}_1)$ et par rapport à un repère $R(O, \mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z})$. On va chercher la relation entre les vecteurs vitesses $\mathbf{V}(P/R_1)$ et $\mathbf{V}(P/R)$, ainsi que la relation entre les vecteurs accélération $\Gamma(P/R_1)$ et $\Gamma(P/R)$. Ces relations, dites « de composition du mouvement », sont particulièrement utiles lorsqu'on étudie des mécanismes dans lesquels les mouvements relatifs mutuels des pièces sont connus, mais pas la cinématique d'ensemble du mécanisme.

b) Composition des vecteurs vitesse

On cherche à définir en premier lieu la relation entre $\mathbf{V}(P/R)$ et $\mathbf{V}(P/R_1)$. On a :

$$\mathbf{V}(P/R) = \left. \frac{d\mathbf{OP}}{dt} \right|_R \quad \text{et} \quad \mathbf{V}(P/R_1) = \left. \frac{d\mathbf{O}_1\mathbf{P}}{dt} \right|_{R_1}.$$

Donc :

$$\mathbf{V}(P/R) = \left. \frac{d(\mathbf{OO}_1 + \mathbf{O}_1\mathbf{P})}{dt} \right|_R = \mathbf{V}(O_1 \in R_1/R) + \left. \frac{d\mathbf{O}_1\mathbf{P}}{dt} \right|_R.$$

Partie I. Cinématique - Cinétique

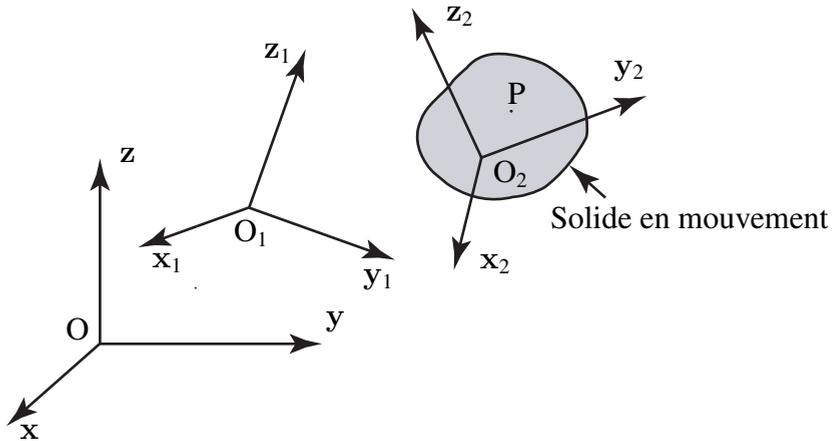


Figure 2.10 Solide en mouvement.

Par ailleurs :

$$\left. \frac{d\mathbf{O}_1\mathbf{P}}{dt} \right|_{\mathbf{R}} = \left. \frac{d\mathbf{O}_1\mathbf{P}}{dt} \right|_{\mathbf{R}_1} + \boldsymbol{\Omega}(S_2/R_1) \wedge \mathbf{O}_1\mathbf{P} = \mathbf{V}(P/R_1) + \boldsymbol{\Omega}(R_1/R) \wedge \mathbf{O}_1\mathbf{P}.$$

Par suite : $\mathbf{V}(P/R) = \mathbf{V}(P/R_1) + \mathbf{V}(O_1 \in R_1/R) + \boldsymbol{\Omega}(S_2/R_1) \wedge \mathbf{O}_1\mathbf{P}$. Si maintenant on considère le point de R_1 qui coïncide avec P à l'instant t :

$$\mathbf{V}(P \in R_1/R) = \mathbf{V}(O_1 \in R_1/R) + \boldsymbol{\Omega}(S_2/R_1) \wedge \mathbf{O}_1\mathbf{P}.$$

Et donc :

$$\mathbf{V}(P/R) = \mathbf{V}(P/R_1) + \mathbf{V}(P \in R_1/R).$$

c) Définitions

Dans le mouvement du point P par rapport aux deux repères R et R_1 , on appelle :

1. Vecteur vitesse absolue : $\mathbf{V}(P/R)$.
2. Vecteur vitesse relative : $\mathbf{V}(P/R_1)$.
3. Vecteur vitesse d'entraînement : $\mathbf{V}(P \in R_1/R)$.

d) Généralisation

Soit un point P mobile par rapport à n repères R_i ($i=1, n$). On peut écrire successivement :

$$\mathbf{V}(P/R_{n-1}) = \mathbf{V}(P/R_n) + \mathbf{V}(P \in R_n/R_{n-1}).$$

Ainsi :

$$\mathbf{V}(P/R_1) = \mathbf{V}(P/R_n) + \sum_{i=2}^n \mathbf{V}(P \in R_i/R_{i-1}).$$

e) Composition des torseurs cinématiques

Il a déjà été montré en utilisant la formule de changement de base de dérivation que lors de la composition des mouvements par rapport à n pères la relation :

$$\boldsymbol{\Omega}(\mathbf{R}_n/\mathbf{R}_1) = \sum_{i=2}^n \boldsymbol{\Omega}(\mathbf{R}_i/\mathbf{R}_{i-1}).$$

Comme par ailleurs :

$$\mathbf{V}(\mathbf{P}/\mathbf{R}_1) = \mathbf{V}(\mathbf{P}/\mathbf{R}_n) + \sum_{i=2}^n \mathbf{V}(\mathbf{P} \in \mathbf{R}_i/\mathbf{R}_{i-1}),$$

on peut donc écrire :

$$\{ \mathcal{V}(\mathbf{R}_i/\mathbf{R}_{i-1}) \} = \left\{ \begin{array}{c} \boldsymbol{\Omega}(\mathbf{R}_i/\mathbf{R}_{i-1}) \\ \mathbf{V}(\mathbf{P} \in \mathbf{R}_i/\mathbf{R}_{i-1}) \end{array} \right\}.$$

La relation de composition des torseurs cinématiques s'écrit (au même point évidemment) :

$$\{ \mathcal{V}(\mathbf{R}_n/\mathbf{R}_1) \} = \sum_{i=2}^n \{ \mathcal{V}(\mathbf{R}_i/\mathbf{R}_{i-1}) \}.$$

Exemple

L'objectif de cet exemple est d'illustrer la distinction entre le vecteur vitesse absolue d'un point I , $\mathbf{V}(I/\mathbf{R})$ et son vecteur vitesse d'entraînement $\mathbf{V}(I \in S_1/\mathbf{R})$ par un solide S_1 . Supposons deux roues de friction S_1 et S_2 . S_1 est en rotation autour de l'axe (O, z) et S_2 autour de l'axe (A, z) . On pose : $\boldsymbol{\Omega}(S_1/\mathbf{R}_1) = \omega_1 \mathbf{z}$ et $\boldsymbol{\Omega}(S_2/\mathbf{R}) = \omega_2 \mathbf{z}$. Les deux roues de friction sont en contact au point I : $\mathbf{OI} = r_1 \mathbf{y}$ et $\mathbf{AI} = -r_2 \mathbf{y}$. Le vecteur vitesse absolue du point de contact I par rapport au repère \mathbf{R} s'obtient en dérivant le vecteur position du point I :

$$\mathbf{V}(I/\mathbf{R}) = \left. \frac{d\mathbf{OI}}{dt} \right|_{\mathbf{R}} = \left. \frac{dr_1 \mathbf{y}}{dt} \right|_{\mathbf{R}} = \mathbf{0}.$$

Le vecteur vitesse du point du solide S_1 qui à l'instant t coïncide avec I , noté $I \in S_1$, est le vecteur vitesse d'un point du solide S_1 qui décrit un cercle de centre O et de rayon r_1 à la vitesse ω_1 . C'est-à-dire qu'on calcule la vitesse au point noté $I \in S_1$, comme si ce point appartenait physiquement à S_1 . Soit :

$$\mathbf{V}(I \in S_1/\mathbf{R}) = \mathbf{V}(O \in S_1/\mathbf{R}) + \boldsymbol{\Omega}(S_1/\mathbf{R}_1) \wedge \mathbf{OI} = \mathbf{0} + \omega_1 \mathbf{z} \wedge r_1 \mathbf{y} = -r_1 \omega_1 \mathbf{x}.$$

Le vecteur vitesse du point du solide S_2 qui à l'instant t coïncide avec I , noté $I \in S_2$, est le vecteur vitesse d'un point qui décrit un cercle de centre A et de rayon r_2 à la vitesse ω_2 ; on a $\mathbf{V}(I \in S_2/\mathbf{R}) = \omega_2 r_2 \mathbf{x}$.

Partie I. Cinématique - Cinétique

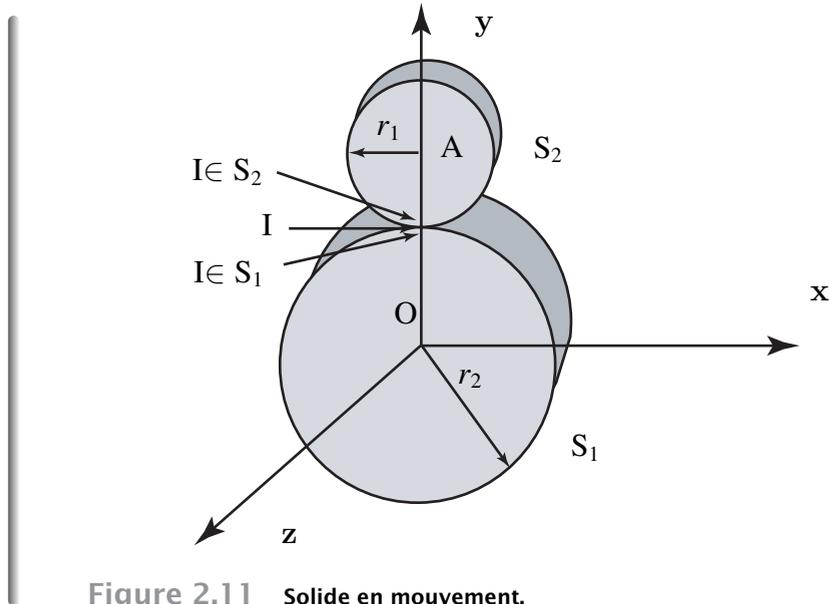


Figure 2.11 Solide en mouvement.

f) Composition des vecteurs accélération

Soit un point P, appartenant à un solide S_2 , en mouvement à la fois par rapport à un repère $R_1(O_1, x_1, y_1, z_1)$ et par rapport à un repère $R(O, x, y, z)$. On va chercher maintenant la relation entre les vecteurs accélération $\Gamma(P/R_1)$ et $\Gamma(P/R)$.

• Relation de composition des vecteurs accélération

Il a été montré aux paragraphes précédents que : $\mathbf{V}(P/R) = \mathbf{V}(P/R_1) + \mathbf{V}(O_1 \in R_1/R)$ ce qui s'écrit aussi :

$$\mathbf{V}(P/R) = \mathbf{V}(P/R_1) + \mathbf{V}(O_1 \in R_1/R) + \boldsymbol{\Omega}(S_2/R_1) \wedge \mathbf{O}_1\mathbf{P}.$$

Dérivons chaque terme par rapport au temps dans le repère R :

$$\left. \frac{d\mathbf{V}(P/R)}{dt} \right|_R = \left. \frac{d\mathbf{V}(P/R_1)}{dt} \right|_R + \left. \frac{d\mathbf{V}(O_1 \in R_1/R)}{dt} \right|_R + \left. \frac{d(\boldsymbol{\Omega}(S_2/R_1) \wedge \mathbf{O}_1\mathbf{P})}{dt} \right|_R.$$

Soit, en appliquant la formule de changement de base de dérivation au premier terme :

$$\begin{aligned} \left. \frac{d\mathbf{V}(P/R_1)}{dt} \right|_R &= \left. \frac{d\mathbf{V}(P/R_1)}{dt} \right|_{R_1} + \boldsymbol{\Omega}(S_2/R_1) \wedge \mathbf{V}(P/R_1) \\ &= \boldsymbol{\Gamma}(P/R_1) + \boldsymbol{\Omega}(S_2/R_1) \wedge \mathbf{V}(P/R_1). \end{aligned}$$

Comme O_1 est l'origine du repère R_1 :

$$\left. \frac{d\mathbf{V}(O_1 \in R_1/R)}{dt} \right|_R = \boldsymbol{\Gamma}(O_1 \in R_1/R).$$

Enfin, en appliquant la formule de changement de base de dérivation au dernier terme :

$$\begin{aligned} \left. \frac{d(\boldsymbol{\Omega}(S_2/R_1) \wedge \mathbf{O}_1\mathbf{P})}{dt} \right|_R &= \left. \frac{d\boldsymbol{\Omega}(S_2/R_1)}{dt} \right|_R \wedge \mathbf{O}_1\mathbf{P} + \boldsymbol{\Omega}(S_2/R_1) \wedge \left. \frac{d\mathbf{O}_1\mathbf{P}}{dt} \right|_R \\ &= \left. \frac{d\boldsymbol{\Omega}(S_2/R_1)}{dt} \right|_R \wedge \mathbf{O}_1\mathbf{P} \\ &\quad + \boldsymbol{\Omega}(S_2/R_1) \wedge [\mathbf{V}(P/R_1) + \boldsymbol{\Omega}(S_2/R_1) \wedge \mathbf{O}_1\mathbf{P}]. \end{aligned}$$

Comme, par ailleurs, d'après la formule de changement de point du champ de vecteurs accélérations :

$$\boldsymbol{\Gamma}(P \in R_1/R) = \boldsymbol{\Gamma}(O_1 \in R_1/R) + \left. \frac{d\boldsymbol{\Omega}(R_1/R)}{dt} \right|_R \wedge \mathbf{O}_1\mathbf{P} + \boldsymbol{\Omega}(S_2/R_1) \wedge (\boldsymbol{\Omega}(R_1/R) \wedge \mathbf{O}_1\mathbf{P}),$$

on en déduit en regroupant tous les termes :

$$\boldsymbol{\Gamma}(P/R) = \boldsymbol{\Gamma}(P/R_1) + \boldsymbol{\Gamma}(P \in R_1/R) + 2 \boldsymbol{\Omega}(S_2/R_1) \wedge \mathbf{V}(P/R_1).$$

g) Définitions

Dans le mouvement du point P par rapport aux repères R et R₁, on appelle :

1. Vecteur accélération absolue : $\boldsymbol{\Gamma}(P/R)$.
2. Vecteur accélération relative : $\boldsymbol{\Gamma}(P/R_1)$.
3. Vecteur accélération d'entraînement : $\boldsymbol{\Gamma}(P \in R_1/R)$.
4. Vecteur accélération de Coriolis (Gustave Gaspard Coriolis, mathématicien français, 1792-1843) : $2 \boldsymbol{\Omega}(S_2/R_1) \wedge \mathbf{V}(P/R_1)$.

Exemple

Pour comprendre les accélérations relatives, d'entraînement et de Coriolis l'exemple (figure 2.12) est simple. Soit un point M fixe dans un repère R et tel que $\mathbf{OM} = ax$. On considère un plateau situé dans le plan horizontal (O, x, y) lequel tourne autour de (O, z) à la vitesse ω . On associe le repère R₁ à ce plateau. Le point M étant fixe dans R, la vitesse absolue $\mathbf{V}_a = \mathbf{V}(M/R)$ est nulle. On peut cependant calculer sa vitesse relative dans R₁ qui est :

$$\mathbf{V}_r = \mathbf{V}(M/R_1) = \left. \frac{d\mathbf{OM}}{dt} \right|_{R_1} = -a\omega \sin \omega t \mathbf{x}_1 - a\omega \cos \omega t \mathbf{y}_1.$$

Si on calcule la vitesse d'entraînement $\mathbf{V}_e = \mathbf{V}(M \in R_1/R)$ on trouve par la formule de changement de point du champ des vitesses :

$$\mathbf{V}(M \in R_1/R) = a\omega \sin \omega t \mathbf{x}_1 + a\omega \cos \omega t \mathbf{y}_1.$$

Partie I. Cinématique - Cinétique

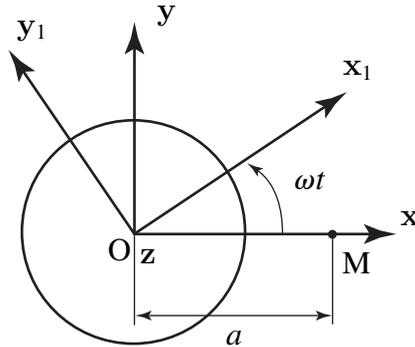


Figure 2.12 Plateau tournant et point M fixe dans R.

On constate que ce vecteur est égal à $-\mathbf{V}_r$ ce qui est logique puisque l'on a la relation :

$$\mathbf{V}_a = \mathbf{V}_r + \mathbf{V}_e \quad \text{avec} \quad \mathbf{V}_a = \mathbf{0}.$$

Si on procède ainsi pour les accélérations on trouve :

$$\mathbf{\Gamma}_r = \mathbf{\Gamma}(M/R_1) = a\omega^2 \cos \omega t \mathbf{x}_1 - a\omega^2 \sin \omega t \mathbf{x}_1,$$

qui peut se transformer de la façon suivante :

$$\mathbf{\Gamma}_r = (-a\omega^2 \cos \omega t \mathbf{x}_1 + 2a\omega^2 \cos \omega t \mathbf{x}_1) + (a\omega^2 \sin \omega t \mathbf{y}_1 - 2a\omega^2 \sin \omega t \mathbf{y}_1).$$

L'accélération d'entraînement vaut :

$$\mathbf{\Gamma}_e = \mathbf{\Gamma}(M \in R_1/R) = a\omega^2 \cos \omega t \mathbf{x}_1 - a\omega^2 \sin \omega t \mathbf{y}_1,$$

tandis que l'accélération de Coriolis s'écrit :

$$\mathbf{\Gamma}_c = 2\boldsymbol{\Omega}(R_1/R) \wedge \mathbf{V}(M/R_1) = 2a\omega^2 \cos \omega t \mathbf{x}_1 - 2a\omega^2 \sin \omega t \mathbf{y}_1.$$

On trouve donc bien en comparant l'accélération relative aux deux accélérations d'entraînement et de Coriolis que :

$$\mathbf{\Gamma}_r = -\mathbf{\Gamma}_e - \mathbf{\Gamma}_c.$$

Cela est à nouveau logique puisque $\mathbf{\Gamma}_a = \mathbf{0}$. Cet exemple illustre le fait que ces accélérations ne sont que la conséquence du mouvement du repère R_1 dans lequel nous nous sommes placés et qui correspond, par exemple, à la visée depuis la Terre d'une étoile fixe. Il faut bien, puisque nous tournons avec le repère sur lequel nous sommes (le plateau ou la Terre) qu'il y ait ces accélérations de façon à ce que le point M reste fixe dans R. Lorsque nous arriverons au chapitre dynamique nous pourrions penser à cet exemple qui fera apparaître des forces (fictives) associées à ces accélérations d'entraînement et de Coriolis.

EXEMPLE : TIR AU BUT!

• *Énoncé du problème*

Calculons la vitesse et l'accélération du coup du pied d'un footballeur au moment de l'impact avec le ballon. Ces paramètres contrôlent la trajectoire ultérieure du ballon. Pour cela, on considère que le référentiel du mouvement $R_0(H, x_0, y_0, z_0)$, attaché à l'articulation H de la hanche est fixe par rapport au sol. La hanche est modélisée comme une liaison pivot, d'axe z_0 et de degré de liberté α , autour de laquelle tourne le repère attaché à la cuisse $R_1(H, x_1, y_1, z_0)$. Le genou est modélisé comme une liaison pivot, d'axe z_0 et de degré de liberté β , autour de laquelle tourne le repère attaché au mollet $R_2(G, x_2, y_2, z_0)$. La distance hanche-genou est notée $HG = l_1$, la distance genou-cheville est notée $GP = l_2$. Les valeurs initiales de α et β sont négatives, leurs vitesses $\dot{\alpha}$ et $\dot{\beta}$ sont positives. À l'instant où le pied touche le ballon, on suppose que y_0, y_1 et y_2 sont confondus et $\alpha = \beta = 0$. Deux cas sont distingués. Dans le premier cas, la jambe du footballeur travaille en « double pendule », ses deux articulations sont actives au moment de l'impact. Dans le second cas, il a fini de déplier le genou au moment de l'impact $\dot{\beta} = 0$, seule l'articulation de la hanche est encore active $\dot{\alpha} \neq 0$.

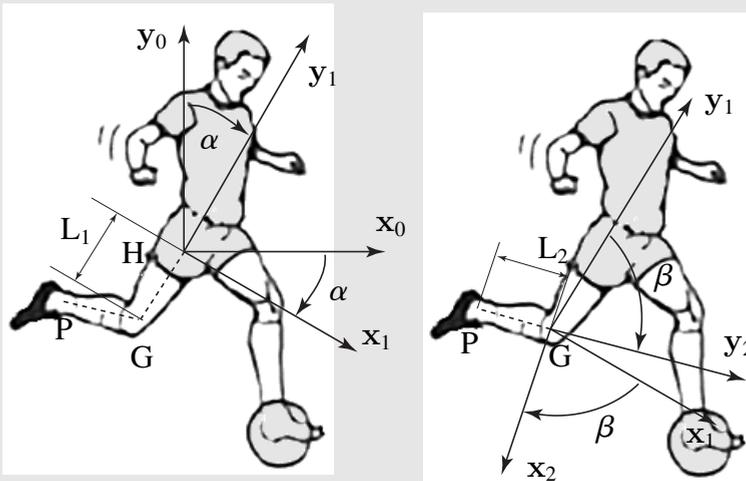


Figure 2.13 La jambe du footballeur fonctionne comme un double pendule. L'accélération transmise au ballon est maximale lorsque les vitesses de rotation des deux articulations atteignent leurs maxima simultanément à l'instant de l'impact.

• *Solution*

On calcule d'abord le vecteur position :

$$\mathbf{HP} = \mathbf{HG} + \mathbf{GP} = -l_1\mathbf{y}_1 - l_2\mathbf{y}_2.$$

Partie I. Cinématique - Cinétique

On en déduit le vecteur vitesse par la formule de changement de point et de changement de base de dérivation :

$$\mathbf{V}(P \in R_2/R_0) = \mathbf{V}(G \in R_2/R_0) + \boldsymbol{\Omega}(R_2/R_0) \wedge \mathbf{GP}.$$

Le genou appartenant à la fois au mollet et la la cuisse, il vient :

$$\mathbf{V}(G \in R_2/R_0) = \mathbf{V}(G \in R_1/R_0) = \mathbf{V}(H \in R_1/R_0) + \boldsymbol{\Omega}(R_1/R_0) \wedge \mathbf{HG}.$$

En remplaçant les termes par leurs expressions, il vient :

$$\mathbf{V}(P \in R_2/R_0) = \dot{\alpha} \mathbf{z}_0 \wedge (-l_1 \mathbf{y}_1) + (\dot{\alpha} + \dot{\beta}) \mathbf{z}_0 \wedge (-l_2 \mathbf{y}_2),$$

ou encore :

$$\mathbf{V}(P \in R_2/R_0) = \dot{\alpha} l_1 \mathbf{x}_1 + l_2 (\dot{\alpha} + \dot{\beta}) \mathbf{x}_2.$$

On procède de même pour le calcul de l'accélération :

$$\begin{aligned} \Gamma(P \in R_2/R_0) &= \Gamma(G \in R_2/R_0) \\ &+ \left. \frac{d\boldsymbol{\Omega}(R_2/R_0)}{dt} \right|_{R_0} \wedge \mathbf{GP} + \boldsymbol{\Omega}(R_2/R_0) \wedge (\boldsymbol{\Omega}(R_2/R_0) \wedge \mathbf{GP}), \end{aligned}$$

avec :

$$\begin{aligned} \Gamma(G \in R_1/R_0) &= \Gamma(H \in R_1/R_0) + \left. \frac{d\boldsymbol{\Omega}(R_1/R_0)}{dt} \right|_{R_0} \wedge \mathbf{HG} \\ &+ \boldsymbol{\Omega}(R_1/R_0) \wedge (\boldsymbol{\Omega}(R_1/R_0) \wedge \mathbf{HG}). \end{aligned}$$

En remplaçant les termes par leurs expressions, il vient :

$$\Gamma(P \in R_2/R_0) = l_1 \ddot{\alpha} x_1 + l_1 \dot{\alpha}^2 y_1 + l_2 (\ddot{\alpha} + \ddot{\beta}) x_2 + l_2 (\dot{\alpha} + \dot{\beta})^2 y_2.$$

À l'impact, lorsque la jambe travaille en « double pendule », la vitesse maximale de rotation étant atteinte pour les deux articulations au moment de l'impact, avec $\dot{\alpha} = \dot{\beta}$, et $l_1 = l_2 = l$, il vient :

$$\mathbf{V}(P \in R_2/R_0) = 3\dot{\alpha} l \mathbf{x}_0 \text{ et } \Gamma(P \in R_2/R_0) = 5l\dot{\alpha}^2 \mathbf{y}_0.$$

Dans le cas contraire, si $\dot{\alpha} \neq 0$ et $\dot{\beta} = 0$, il vient :

$$\mathbf{V}(P \in R_2/R_0) = 2\dot{\alpha} l \mathbf{x}_0 \text{ et } \Gamma(P \in R_2/R_0) = 2\dot{\alpha}^2 l \mathbf{y}_0.$$

La conclusion de cet exercice est qu'il vaut mieux – au regard de la vitesse du point d'impact – que la jambe travaille en double pendule plutôt qu'en pendule simple. Cette conclusion a pu être obtenue par tout joueur de football (ou de rugby) qui souhaite dégager son camp dans l'urgence ou obtenir une pénalité éloignée.



Cinématique du point

Vecteur vitesse (resp. accélération) du point P, par rapport à R, à l'instant t :

$$\mathbf{V}(P/R) = \left. \frac{d\mathbf{OP}}{dt} \right|_R \quad \Gamma(P/R) = \left. \frac{d\mathbf{V}(P/R)}{dt} \right|_R.$$

Cinématique du solide

Vecteur vitesse (resp. accélération) du point P, appartenant au solide S₁ par rapport à R, à l'instant t :

$$\mathbf{V}(P \in S_1/R) \text{ et } \Gamma(P \in S_1/R).$$

Formules de changement de point

- *Formules de changement de point du champ des vecteurs vitesse d'un solide*

$$\forall A, \forall B \in S_1 \quad \mathbf{V}(B \in S_1/R) = \mathbf{V}(A \in S_1/R) + \boldsymbol{\Omega}(S_1/R) \wedge \mathbf{AB}.$$

Le champ des vecteurs vitesses des points du solide S₁ en mouvement par rapport à R, se représente par un torseur, dit **torseur cinématique**

$$\{ \mathcal{V}(S_1/R) \} = \left\{ \begin{array}{c} \boldsymbol{\Omega}(S_1/R) \\ \mathbf{V}(A \in S_1/R) \end{array} \right\}_A.$$

- *Formules de changement de point du champ des vecteurs accélération d'un solide*

$$\Gamma(B \in S_1/R) = \Gamma(A \in S_1/R) + \left. \frac{d\boldsymbol{\Omega}(S_1/R)}{dt} \right|_R \wedge \mathbf{AB} + \boldsymbol{\Omega}(S_1/R) \wedge (\boldsymbol{\Omega}(S_1/R) \wedge \mathbf{AB}).$$

Le champ des vecteurs accélération des points du solide S₁ en mouvement par rapport à R, ne se représente pas par un torseur.

Formules de composition des mouvements

On suppose un point P en mouvement par rapport à un solide S₁ auquel est attaché un repère R₁, lui-même en mouvement par rapport au référentiel du mouvement R. On note P ∈ R₁ le point du solide S₁ qui à l'instant t, coïncide avec P alors :

$$\underbrace{\mathbf{V}(P/R)}_{\text{absolue}} = \underbrace{\mathbf{V}(P/R_1)}_{\text{relative}} + \underbrace{\mathbf{V}(P \in R_1/R)}_{\text{entraînement}}.$$

$$\underbrace{\Gamma(P/R)}_{\text{absolue}} = \underbrace{\Gamma(P/R_1)}_{\text{relative}} + \underbrace{\Gamma(P \in R_1/R)}_{\text{entraînement}} + \underbrace{2 \boldsymbol{\Omega}(R_1/R) \wedge \mathbf{V}(P/R_1)}_{\text{Coriolis}}.$$

Exercices

Ces exercices sont destinés à mettre en application les notions du chapitre. Les solutions détaillées sont données ensuite. Nous utiliserons souvent pour alléger les écritures $\Omega(S_2/S_3) = \Omega(2/3) = \omega_{23}\mathbf{z}$ par exemple. La plupart des exercices de cette partie sont du niveau L2 (à part quelques subtilités liées à l'utilisation des axes centraux peu usités à ce niveau).

2.1 Centrifugeuse de laboratoire

On s'intéresse à une centrifugeuse de laboratoire présentée ci-dessous, composée d'un bâti S_0 , d'un bras S_1 et d'une éprouvette S_2 contenant deux liquides de masses volumiques différentes. Sous l'effet centrifuge dû à la rotation du bras S_1 l'éprouvette S_2 s'incline pour se mettre pratiquement dans l'axe du bras. De fait, le liquide dont la masse volumique est la plus grande est rejeté au fond de l'éprouvette. Paramétrage du système :

- $R(O, \mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z})$ est un repère lié à S_0 .
- S_1 est en liaison pivot d'axe (O, \mathbf{x}) avec S_0 . Le repère $R_1(O, \mathbf{x}_1, \mathbf{y}_1, \mathbf{z}_1)$ est un repère lié à S_1 , on note $\alpha = (y, y_1)$ l'angle mesuré autour de \mathbf{x} .
- S_2 est en liaison pivot d'axe (A, \mathbf{z}_1) avec S_1 . Le repère $R_2(A, \mathbf{x}_2, \mathbf{y}_2, \mathbf{z}_2)$ est un repère lié à S_2 , on note $\beta = (x, x_2)$ l'angle mesuré autour de \mathbf{z}_1 .
- On donne $\mathbf{OA} = a\mathbf{y}_1$ et $\mathbf{AG} = b\mathbf{x}_2$, où a et b sont des constantes positives exprimées en mètres.

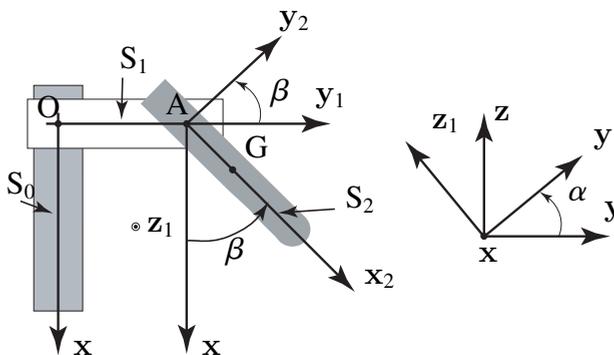


Figure 2.14 Centrifugeuse de laboratoire.

- 1) Calculer la vitesse de S_1 dans son mouvement par rapport à S_0 en O et en A.
- 2) Calculer la vitesse de S_2 dans son mouvement par rapport à S_0 en A et en G, puis dans son mouvement par rapport à S_1 en A et en G.