

# Mécanique des matériaux solides



Jean Lemaitre, Jean-Louis Chaboche, Ahmed Benallal,  
Rodrigue Desmorat

---

# Mécanique des matériaux solides

3<sup>e</sup> ÉDITION

DUNOD

## Illustration de couverture : Digital Vision

Le pictogramme qui figure ci-contre mérite une explication. Son objet est d'alerter le lecteur sur la menace que représente pour l'avenir de l'écrit, particulièrement dans le domaine de l'édition technique et universitaire, le développement massif du photocopillage.

Le Code de la propriété intellectuelle du 1<sup>er</sup> juillet 1992 interdit en effet expressément la photocopie à usage collectif sans autorisation des ayants droit. Or, cette pratique s'est généralisée dans les établissements

d'enseignement supérieur, provoquant une baisse brutale des achats de livres et de revues, au point que la possibilité même pour

les auteurs de créer des œuvres nouvelles et de les faire éditer correctement est aujourd'hui menacée. Nous rappelons donc que toute reproduction, partielle ou totale, de la présente publication est interdite sans autorisation de l'auteur, de son éditeur ou du Centre français d'exploitation du droit de copie (CFC, 20, rue des Grands-Augustins, 75006 Paris).

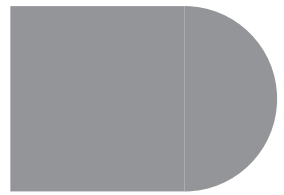


© Dunod, Paris, 1985, 1992, 2009, 2020 pour la nouvelle présentation  
11 rue Paul Bert, 92240 Malakoff  
www.dunod.com  
ISBN 978-2-10-081090-1

Le Code de la propriété intellectuelle n'autorisant, aux termes de l'article L. 122-5, 2<sup>e</sup> et 3<sup>e</sup> a), d'une part, que les « copies ou reproductions strictement réservées à l'usage privé du copiste et non destinées à une utilisation collective » et, d'autre part, que les analyses et les courtes citations dans un but d'exemple et d'illustration, « toute représentation ou reproduction intégrale ou partielle faite sans le consentement de l'auteur ou de ses ayants droit ou ayants cause est illicite » (art. L. 122-4).

Cette représentation ou reproduction, par quelque procédé que ce soit, constituerait donc une contrefaçon sanctionnée par les articles L. 335-2 et suivants du Code de la propriété intellectuelle.

# PRÉFACE DE LA NOUVELLE ÉDITION



Dans la préface de la première édition de ce livre en 1985, Monsieur Germain (1920-2009), l'un des fondateurs de la mécanique moderne et alors secrétaire perpétuel de l'Académie des Sciences, commençait par « Mes jeunes collègues, J. L. et J.L. C. ... » eh bien le temps n'est décidément pas une variable d'état que l'on pourrait modéliser à sa guise car maintenant c'est à notre tour d'écrire : Nos jeunes collègues Ahmed Benallal et Rodrigue Desmorat ont eu le courage de reprendre la rédaction de l'ouvrage en l'expurgeant des parties obsolètes et en l'enrichissant des notions établies au cours des deux dernières décennies.

Tout a été réécrit (d'ailleurs les originaux sont devenus illisibles par les machines des imprimeurs !), c'est dire la somme de travail effectué avec en plus de nombreux ajouts sur les grandes déformations, l'anisotropie, les techniques expérimentales, l'identification, et sur certains matériaux comme les élastomères, le béton, les céramiques, les composites. Et avec surtout trois chapitres supplémentaires sur la visco-élasticité, les instabilités matérielles et la localisation, et les couplages multiphysiques.

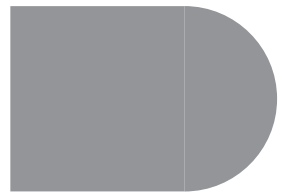
Bien sûr, nous avons participé à de nombreuses discussions à deux, à trois ou à quatre, passionnées comme toujours, elles durent depuis des dizaines d'années et nous sommes toujours amis ! Nous avons assuré le travail ingrat de relecture c'est dire que s'il reste des fautes, nous les assumons ! Il faut aussi souligner que le succès du premier livre (et de celui-ci, nous l'espérons !) doit beaucoup aux éditeurs, Dunod d'abord, Cambridge University Press pour l'édition anglaise et 国防工业出版社 北京 pour l'édition chinoise.

Jean Lemaitre, Jean Louis Chaboche

*Printemps 2009*



# INTRODUCTION



Bravo, cher lecteur, vous avez eu le courage d'ouvrir cet ouvrage ! et vous avez bien fait car vous avez gagné quelques explications :

**Sur le titre d'abord.** Il s'agit de MÉCANIQUE c'est-à-dire de relations entre forces (ou contraintes), déplacements (ou déformations), température et temps. Il s'agit de MATÉRIAUX du génie mécanique et du génie civil : métaux et alliages, polymères, élastomères, bois, bétons, céramiques et leurs composites. Mécanique des solides donc, pour modéliser leurs propriétés de résistance à la déformation et à la rupture et leur durabilité en service, propriétés intrinsèques aux matériaux, définies sur l'élément de volume indépendamment de la géométrie des corps concernés.

**Sur l'esprit.** La rédaction de l'ouvrage est organisée en vue d'un TRANSFERT des connaissances dans l'esprit des Sciences pour l'ingénieur, transfert des connaissances fondamentales vers les applications. Transfert des propriétés microscopiques vers une écriture mésoscopique des lois de comportement. Transfert, ou plutôt synthèse entre les aspects théoriques et expérimentaux. Les progrès récents en mécanique des solides étant dus à la conjonction de développements décisifs dans tous ces domaines.

- Sur le plan fondamental, c'est l'écriture synthétique de la mécanique des milieux continus et de la méthode de l'état local en thermodynamique.
- Sur le plan des applications, c'est la prise de conscience de la nécessité d'assurer une sécurité contrôlée tout en réalisant une plus grande économie dans la construction des systèmes mécaniques.
- Sur le plan des propriétés microscopiques, c'est le développement des moyens d'observation comme les microscopes électroniques à balayage et à transmission.
- Sur le plan expérimental, ce sont les machines d'essais asservies à commande numérique associées aux moyens de mesures par caméras infrarouges et par caméras optiques numériques permettant la mesure des déplacements par corrélation d'images.
- Sur le plan de l'identification des modèles, c'est la possibilité d'utiliser des logiciels d'optimisation et même d'incorporer certains modèles directement dans le dépouillement des expériences.
- Sur le plan numérique enfin, c'est l'avènement des ordinateurs hyper-puissants et des techniques de parallélisation associées qui permettent l'utilisation de modèles sophistiqués avec la possibilité d'évaluation du domaine d'erreur.

**Sur le contenu.** Pour bien marquer cette idée de transfert et dans un esprit pédagogique pour l'enseignement des jeunes et la formation continue des « moins jeunes », l'ouvrage comprend

## Introduction

trois chapitres (1 à 3) qui rappellent les connaissances de base pour une lecture aisée des huit autres chapitres (4 à 11) dédiés chacun à un comportement particulier.




- Le premier chapitre est consacré aux MÉCANISMES PHYSIQUES de déformation et de rupture des différents matériaux en insistant sur la description des propriétés qui justifient les hypothèses utilisées dans la modélisation mésoscopique.
- Le deuxième chapitre présente des rappels de MÉCANIQUE DES MILIEUX CONTINUS et de THERMODYNAMIQUE DES PROCESSUS IRRÉVERSIBLES qui constituent les outils théoriques utilisés dans les autres chapitres.
- Le troisième chapitre présente une CLASSIFICATION RHÉOLOGIQUE des comportements schématiques des solides fondée sur l'expérimentation dont les moyens et les techniques sont décrits en détail.
- Avec le quatrième chapitre débute la modélisation des différents comportements suivant le même plan : domaine de validité délimitant les conditions d'utilisation ; aspects phénoménologiques de l'acquis expérimental ; formulation générale fondée sur la thermodynamique ; détermination de modèles et leur identification pour des matériaux particuliers. Dans cet esprit, le quatrième chapitre présente l'ÉLASTICITÉ, la THERMO-ÉLASTICITÉ et l'HYPER-ÉLASTICITÉ en grandes transformations.
- Le cinquième chapitre concerne la VISCO-ÉLASTICITÉ linéaire et en grandes déformations avec sa formulation par variables internes et sa formulation fonctionnelle par le produit de convolution.
- Le sixième chapitre est consacré à l'ÉLASTO-PLASTICITÉ ; plasticité isotrope formulée à partir du potentiel d'évolution associé au critère d'écoulement ; plasticité à écrouissage anisotrope qui permet de rendre compte des chargements cycliques si importants pour la prévision de la rupture par fatigue ; éléments de plasticité en grandes transformations et de plasticité à gradient.
- Le septième chapitre traite des mêmes questions mais cette fois appliquées aux métaux et alliages sollicités aux températures moyennes et élevées qui engendrent des phénomènes de viscosité : l'ÉLASTO-VISCO-PLASTICITÉ.
- Le huitième chapitre aborde la rupture de l'élément de volume par la théorie de l'ENDOMMAGEMENT CONTINU isotrope et anisotrope. Différents modèles sont établis pour rendre compte et prévoir la rupture fragile, la rupture ductile, la rupture par fluage et la rupture par fatigue à faible et grand nombre de cycles ainsi que les couplages avec les déformations.
- Le neuvième chapitre aborde les phénomènes d'INSTABILITÉS MATÉRIELLES et de LOCALISATIONS souvent précurseurs de l'endommagement et de la rupture. Ils sont abordés par les méthodes de bifurcation et de perturbation avec le rôle important des conditions aux limites et des surfaces.
- Le dixième chapitre traite des solides fissurés. La MÉCANIQUE DE LA RUPTURE PAR FISSURATION est abordée par la méthode énergétique qui introduit logiquement la notion de taux de restitution d'énergie. Cette variable, associée aux facteurs d'intensité des contraintes, est utilisée pour établir des modèles de rupture par instabilité, de rupture ductile et des modèles de croissance de fissures par fatigue.
- Le onzième chapitre (rassurez vous c'est de dernier !) donne des éléments sur les COUPLAGES MULTI-PHYSIQUES pour répondre à une forte demande d'inclure dans les



calculs de sécurité les multiples influences ou agressions de l'environnement sur les matériaux : thermo-hydro-élasticité ; chimio-élasticité ; poro-plasticité ; transformations de phases ; piézo-électricité et magnéto-élasticité... La thermodynamique est, encore là, l'outil fondamental.

L'ensemble constitue donc un ouvrage complet de Mécanique des Matériaux mais forcément concis. Pour des études plus approfondies, on pourra se reporter à la bibliographie des principaux ouvrages donnée à la fin de chaque chapitre. Ce livre s'adresse donc à vous, cher lecteur, qui possédez de bonnes connaissances de base en mécanique des milieux continus ou en résistance des matériaux et qui souhaitez vous former pour introduire plus de physique dans la conception, assistée ou non par ordinateur, dans la mise en forme des produits, dans les calculs de sécurité et le contrôle en service des constructions.

Là encore, il s'agit d'une position charnière entre l'enseignement au niveau des années de spécialisation des écoles d'ingénieurs, des masters des universités, des chercheurs et de l'enseignement dans la profession d'ingénieur de recherche, d'études, de fabrication ou d'essais. Pour faciliter l'utilisation du livre en tant que manuel, chaque chapitre est rédigé en vue d'une lecture autonome. De plus, chacun des sous-chapitres est repéré par des pommes :

-  signifie facile à lire, facile à appliquer,
-  signifie à lire avec attention, appliquer avec précaution,
-  signifie une théorie plus complexe d'application délicate.

Le lecteur avisé a d'ores et déjà compris que le domaine couvert par ce livre est très vaste et que, pour ce faire, les auteurs ont largement puisé dans leur environnement humain particulièrement favorable à la Direction des Structures de l'Office National d'Etudes de Recherches Aérospatiales, au Laboratoire de Mécanique et Technologie de Cachan (E.N.S de Cachan, Université Paris 6, C.N.R.S.) au G.R.E.C.O. (C.N.R.S.) Grandes Déformations et Endommagement et à l'Association Mécamat qui lui a succédé. Nombre de mises au point résultent également de cours donnés par les auteurs. Que leurs étudiants, collègues et tous ceux qui ont participé à des discussions souvent passionnées soient ici publiquement remerciés. Enfin cette édition a bénéficié de relectures des nouveautés par nos collègues Nadia Bahlouli, René Billardon, Eric Blond, Jean-Pierre Cordebois, Olivier Hubert, Laurent Gornet, Jean-Jacques Marigo, Patrick Müller, Sylvie Pommier, Nicolas Schmitt et par les doctorants du LMT. Merci à eux pour leurs critiques et conseils.

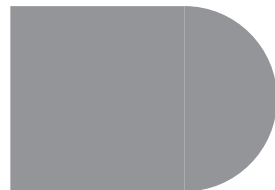
Ahmed Benallal, Rodrigue Desmorat

Jean Lemaitre, Jean Louis Chaboche

*Printemps 2009*



# TABLE DES MATIÈRES



Préface	V
Introduction	VII
Notations	XIX
<b>Chapitre 1 • Éléments sur les mécanismes physiques de déformation et de rupture des solides</b>	<b>1</b>
1.1 Métaux et alliages	2
1.1.1 Structure <sup>o</sup>	2
1.1.2 Mécanismes physiques de déformation <sup>o</sup>	7
1.1.3 Mécanismes physique de rupture <sup>o</sup>	14
1.2 Polymères et élastomères	19
1.2.1 Structures <sup>o</sup>	19
1.2.2 Mécanismes physiques de déformation <sup>o</sup>	22
1.2.3 Mécanismes physiques de rupture <sup>o</sup>	23
1.3 Matériaux granulaires – Béton	23
1.3.1 Constitution du béton hydraulique <sup>o</sup>	23
1.3.2 Mécanismes physiques de déformation et de rupture <sup>o</sup>	26
1.4 Céramiques et verres	29
1.4.1 Céramiques au sens large <sup>o</sup>	29
1.4.2 Structure des céramiques et verres <sup>o</sup>	30
1.4.3 Mécanismes physiques de déformation et de rupture <sup>o</sup>	30
1.5 Composites	31
1.5.1 Composites à Matrices Organiques <sup>o</sup> (CMO)	32
1.5.2 Composites à Matrice Céramique <sup>o</sup> (CMC)	33
1.5.3 Composites à Matrice Métallique <sup>o</sup> (CMM)	33
1.5.4 Mécanismes physiques de déformation et de rupture <sup>oo</sup>	34
1.6 Bois	35
1.6.1 Structure anatomique du bois <sup>o</sup>	35
1.6.2 Mécanismes physiques de déformation et de rupture <sup>o</sup>	37
1.7 Cartes d'Ashby	37
<b>Chapitre 2 • Éléments de mécanique et de thermodynamique des milieux continus</b>	<b>40</b>
2.1 Éléments de mécanique des milieux continus	41
2.1.1 Système de référence et dérivée particulaire <sup>o</sup>	41
2.1.2 Principe des puissances virtuelles <sup>o</sup>	42
2.1.3 Équations d'équilibre <sup>o</sup>	45

## Table des matières

2.1.4	Déformations et déplacements	46
2.1.5	Invariants – Représentations tensorielles	54
2.2	Énoncés fondamentaux de la thermodynamique	56
2.2.1	Lois de conservation	56
2.2.2	Entropie – Second principe	59
2.2.3	Couplage avec d'autres phénomènes de transfert	60
2.3	Méthode de l'état local	61
2.3.1	Variables d'état	61
2.3.2	Potentiel thermodynamique – Lois d'état	63
2.3.3	Dissipation – Lois d'évolution	66
2.4	Éléments de thermique	71
2.4.1	Loi de Fourier	71
2.4.2	Équation de la chaleur	71
2.4.3	Propagation classique de la chaleur	73
2.4.4	Échauffement adiabatique des métaux	73
2.4.5	Premier principe et équation de la chaleur en grandes transformations	74
<b>Chapitre 3 • Classification rhéologique et caractérisation du comportement des solides réels</b>		<b>75</b>
3.1	La méthode phénoménologique globale pour la formulation des lois de comportement	76
3.2	Essais mécaniques de caractérisation	78
3.2.1	Essais caractéristiques homogènes	78
3.2.2	Essais hétérogènes	81
3.3	Éléments sur les techniques d'expérimentation	82
3.3.1	Machines d'essais et éprouvettes	82
3.3.2	Techniques de mesure des variables caractéristiques	94
3.4	Schématisation des comportements réels	100
3.4.1	Solide rigide – Fluide visqueux	101
3.4.2	Solides élastiques	101
3.4.3	Solides plastiques	103
3.4.4	Solides visco-plastiques	104
3.4.5	Vieillessement	105
3.5	Identification	106
3.5.1	Le rapport qualité-prix	107
3.5.2	Dépendance des paramètres à la température	107
3.5.3	Dispersion, paramètres aléatoires	108
3.5.4	Méthodes numériques d'identification	109
3.6	Schématisation des frottements	112
3.6.1	Modèle de Coulomb	112
3.6.2	Modèle de couche limite	113

<b>Chapitre 4 • Élasticité, thermo-élasticité et hyper-élasticité</b>	<b>114</b>
4.1 Aspects phénoménologiques	114
4.2 Élasticité linéaire	115
4.2.1 Domaine de validité et d'emploi <sup>o</sup>	115
4.2.2 Formulation <sup>o</sup>	115
4.2.3 Les huit classes de symétrie des tenseurs d'élasticité <sup>oo</sup>	120
4.2.4 Figures de pôle <sup>oo</sup>	121
4.2.5 Identification <sup>oo</sup>	122
4.2.6 Tableau de caractéristiques d'élasticité de matériaux usuels <sup>o</sup>	126
4.3 Thermo-élasticité	126
4.3.1 Formulation de la thermo-élasticité isotrope linéaire <sup>o</sup>	127
4.3.2 Formulation de la thermo-élasticité anisotrope <sup>o</sup>	128
4.3.3 Identification <sup>o</sup>	130
4.3.4 Caractéristiques de thermo-élasticité de matériaux usuels <sup>o</sup>	131
4.4 Élasticité en grandes transformations	132
4.4.1 Domaine de validité et d'emploi <sup>o</sup>	132
4.4.2 Objectivité <sup>oo</sup>	133
4.4.3 Formulation de l'hyper-élasticité <sup>ooo</sup>	133
4.4.4 Identification <sup>oo</sup>	137
4.4.5 Caractéristiques d'un caoutchouc <sup>o</sup>	138
<b>Chapitre 5 • Visco-élasticité</b>	<b>140</b>
5.1 Domaine de validité et d'emploi	140
5.2 Aspects phénoménologiques	141
5.3 Modélisation avec variables internes	141
5.3.1 Modèles rhéologiques <sup>o</sup>	141
5.3.2 Formulation thermodynamique <sup>o</sup>	145
5.3.3 Couplage thermo-mécanique <sup>ooo</sup>	150
5.4 Formulation fonctionnelle de la visco-élasticité	151
5.4.1 Fonction fluage <sup>o</sup>	151
5.4.2 Fonction relaxation <sup>o</sup>	153
5.4.3 Formulation thermodynamique <sup>ooo</sup>	154
5.4.4 Séries de Prony <sup>o</sup>	156
5.4.5 Équivalence temps-température <sup>ooo</sup>	156
5.4.6 Transformée de Laplace-Carson <sup>ooo</sup>	158
5.5 Éléments de visco-élasticité en grandes transformations	159
5.5.1 Formulation avec variables internes <sup>ooo</sup>	159
5.5.2 Formulations fonctionnelles <sup>ooo</sup>	160
5.6 Identification et caractéristiques de visco-élasticité de matériaux usuels	163
5.7 Hystérésis des élastomères	166
5.7.1 Hystérésis « visqueux » et « non visqueux » – Effet Müllins <sup>oo</sup>	166
5.7.2 Hyper-élasticité avec frottement interne <sup>ooo</sup>	168

<b>Chapitre 6 • Élasto-plasticité</b>	<b>170</b>
6.1	Domaine de validité et d'emploi 170
6.2	Aspects phénoménologiques 171
6.2.1	Observations sous chargement uniaxial <sup>o</sup> 171
6.2.2	Observations en multiaxial – Rôle de la direction de la sollicitation <sup>oo</sup> 181
6.3	Critères tridimensionnels de limite d'élasticité 185
6.3.1	Critères isotropes <sup>o</sup> 186
6.3.2	Critères anisotropes <sup>oo</sup> 191
6.3.3	Validité expérimentale <sup>o</sup> 193
6.4	Formulation thermodynamique 194
6.4.1	Résultats tirés des observations expérimentales <sup>o</sup> 194
6.4.2	Partition de la déformation <sup>o</sup> 195
6.4.3	Incompressibilité plastique <sup>o</sup> 196
6.4.4	Cadre thermodynamique <sup>oo</sup> 196
6.4.5	Surface de charge – Critères tridimensionnels de plasticité <sup>oo</sup> 199
6.4.6	Évolution du domaine d'élasticité – Lois d'érouissage <sup>oo</sup> 202
6.5	Lois de plasticité particulières 206
6.5.1	Cas de la plasticité parfaite <sup>o</sup> 206
6.5.2	Modèles à érouissage isotrope <sup>o</sup> 206
6.5.3	Modèles à érouissage cinématique <sup>oo</sup> 211
6.5.4	Lois à érouissage combiné <sup>oo</sup> 225
6.5.5	Modélisation d'effets particuliers <sup>ooo</sup> 230
6.5.6	Lois de plasticité anisotrope <sup>ooo</sup> 240
6.6	Éléments de plasticité en grandes transformations 244
6.6.1	Lagrangien réactualisé <sup>oo</sup> 244
6.6.2	Décomposition de la déformation <sup>ooo</sup> 246
6.6.3	Objectivité des lois de plasticité <sup>ooo</sup> 247
6.6.4	Lois de plasticité en grandes transformations <sup>ooo</sup> 247
6.6.5	Loi de plasticité anisotrope à érouissage isotrope <sup>oo</sup> 251
6.7	Éléments sur la plasticité à gradient 253
6.7.1	Effets des gradients de déformation plastique – Nécessité de modèles généralisés <sup>ooo</sup> 254
6.7.2	Tenseur densité de dislocation géométrique – Tenseur d'incompatibilité <sup>ooo</sup> 254
6.7.3	Modélisation de la plasticité à gradient <sup>ooo</sup> 258
<b>Chapitre 7 • Élasto-visco-plasticité</b>	<b>261</b>
7.1	Domaine de validité d'emploi 261
7.2	Aspects phénoménologiques 262
7.2.1	Résultats tirés des essais d'érouissage <sup>o</sup> 262
7.2.2	Résultats tirés des essais de fluage <sup>o</sup> 264
7.2.3	Résultats tirés des essais de relaxation <sup>o</sup> 266
7.2.4	Loi d'érouissage-viscosité <sup>o</sup> 267
7.2.5	Influence de la température <sup>o</sup> 269

7.2.6	Résultats tirés d'essais cycliques	271
7.2.7	Résultats tirés d'essais multiaxiaux	273
7.3	Formulation thermodynamique	274
7.3.1	Partition des déformations	274
7.3.2	Choix des variables thermodynamiques	274
7.3.3	Lois d'évolution : écoulement et écrouissage, règle de normalité	276
7.4	Lois de comportement particulières	278
7.4.1	Lois de visco-plasticité parfaite	278
7.4.2	Lois de visco-plasticité à écrouissage isotrope	282
7.4.3	Loi de visco-plasticité à écrouissages cinématique et isotrope	291
7.5	Modélisation d'effets particuliers	301
7.5.1	Loi de visco-plasticité anisotherme	302
7.5.2	Effets de recouvrance et de restauration statique	306
7.5.3	Effets de vieillissement	308
7.5.4	Couplage plasticité/visco-plasticité	309
7.5.5	Effets de chargements non proportionnels	311
<b>Chapitre 8 • Endommagement</b>		<b>315</b>
8.1	Domaine de validité et d'emploi	315
8.2	Aspects phénoménologiques	316
8.2.1	Schématisation de la rupture par endommagement de l'élément de volume	316
8.2.2	Variable d'endommagement	318
8.2.3	Contrainte effective	320
8.2.4	Mesures d'endommagement	322
8.3	Lois d'endommagement	330
8.3.1	Loi d'endommagement unifiée	330
8.3.2	Endommagement plastique	333
8.3.3	Endommagement de fluage	335
8.3.4	Endommagement de fatigue	337
8.3.5	Effet d'interaction des endommagements de fatigue et de fluage	349
8.3.6	Interaction Fatigue-Oxydation-Fluage	352
8.3.7	Anisotropie de l'endommagement	353
8.4	Critères d'endommagement	354
8.4.1	Critères en contrainte et en déformation	355
8.4.2	Critères de limite de fatigue	357
8.4.3	Critères énergétiques	361
8.5	Formulation thermodynamique	364
8.5.1	Représentation tridimensionnelle de l'endommagement	364
8.5.2	Théorie de l'endommagement isotrope	367
8.5.3	Une théorie de l'endommagement anisotrope d'ordre 4	371
8.5.4	Une théorie de l'endommagement anisotrope d'ordre 2	373
8.6	Modèles d'endommagement particuliers	378

## Table des matières

8.6.1	Élasticité couplée à l'endommagement <sup>rr</sup>	378
8.6.2	Élasto-(visco-)plasticité couplée à l'endommagement <sup>rrr</sup>	382
8.6.3	Modèle d'endommagement et de délaminage de composites stratifiés <sup>rr</sup>	388
8.6.4	Modèle d'endommagement de composites tissés céramique/céramique <sup>rrr</sup>	391
8.7	Endommagement et calculs de structures	395
8.7.1	Endommagement initial <sup>r</sup>	395
8.7.2	Taille et orientation de la fissure mésoscopique amorcée <sup>r</sup>	395
8.7.3	Calcul de l'endommagement aux points ou dans les zones critiques <sup>r</sup>	397
8.7.4	Calculs couplés – Approche locale <sup>rr</sup>	399
<b>Chapitre 9 • Instabilités et localisation de la déformation et de l'endommagement</b>		<b>405</b>
9.1	Aspects phénoménologiques et observations	406
9.2	Introduction au phénomène de localisation	409
9.3	Localisation dans les matériaux à comportement indépendant du temps	413
9.3.1	Bifurcation en bandes – Perte d'ellipticité <sup>rrr</sup>	414
9.3.2	Interactions des bandes de localisation avec la frontière <sup>rrr</sup>	419
9.3.3	Localisation en modes harmoniques <sup>rr</sup>	421
9.4	Approche de la localisation par perturbation	422
9.4.1	Matériaux à comportement indépendant du temps <sup>rr</sup>	422
9.4.2	Matériaux à comportement dépendant du temps – Viscoplasticité <sup>rr</sup>	422
9.4.3	Effets thermomécaniques – Couplages <sup>rrr</sup>	423
9.4.4	Couplages hydro-mécaniques – Milieux poreux saturés <sup>rrr</sup>	424
9.5	Résolution de la condition de localisation	425
9.5.1	Mode de localisation <sup>rrr</sup>	426
9.5.2	Conditions critiques – Orientations critiques des bandes de localisation <sup>rrr</sup>	426
9.6	Illustrations et applications	431
9.6.1	Notations <sup>r</sup>	431
9.6.2	Localisation en plasticité <sup>rrr</sup>	432
9.6.3	Localisation en thermo-plasticité <sup>rrr</sup>	434
9.6.4	Localisation dans les milieux poreux saturés <sup>rrr</sup>	437
9.6.5	Localisation dans les milieux endommagés <sup>rrr</sup>	440
9.6.6	Interactions des bandes de localisation avec la frontière <sup>rrr</sup>	441
9.6.7	Pertinence des conditions de localisation pour les solides finis	442
9.7	Modélisation non locale	442
9.7.1	Modèle local/Modèle non local <sup>rr</sup>	443
9.7.2	Analyse de localisation <sup>rrr</sup>	444
9.7.3	Une application : propagation de fissures dans le béton <sup>r</sup>	446

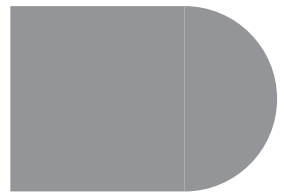


<b>Chapitre 10 • Fissuration</b>	<b>449</b>	
10.1	Domaine de validité d'emploi	450
10.2	Aspects phénoménologiques	450
10.2.1	Rupture fragile	450
10.2.2	Rupture ductile	451
10.2.3	Rupture par fatigue	451
10.2.4	Modes de sollicitation	452
10.2.5	Fissures initiales	453
10.3	Analyse élastique linéaire des milieux fissurés	453
10.3.1	Contraintes en fond de fissure dans les problèmes plans – Singularité des contraintes	453
10.3.2	Intégrales de contour en élasticité	463
10.3.3	Taux de restitution d'énergie	465
10.3.4	Extraction des facteurs d'intensité des contraintes par mesure de champs	468
10.3.5	Critères de propagation en élasticité linéaire	469
10.3.6	Modes mixtes – Critères de bifurcation	471
10.3.7	Problèmes tridimensionnels en élasticité	474
10.3.8	Validité de l'analyse linéaire	475
10.4	Analyse non linéaire des milieux fissurés	477
10.4.1	Plasticité généralisée	477
10.4.2	Le cas de la visco-plasticité – Intégrale $C^*$	482
10.4.3	Prise en compte de l'adoucissement en mode I	483
10.5	Formulation thermodynamique	485
10.5.1	Thermodynamique du solide fissuré	485
10.5.2	Choix des variables – Lois d'état	486
10.5.3	Taux de restitution d'énergie élastique	489
10.5.4	Variable seuil de fissuration	494
10.5.5	Étude de la dissipation	497
10.5.6	Cas des structures fissurées tridimensionnelles	499
10.6	Modèles de propagation de fissures	502
10.6.1	Fissuration par rupture fragile	502
10.6.2	Fissuration par rupture ductile	503
10.6.3	Fissuration par fluage	505
10.6.4	Fissuration par fatigue	506
10.6.5	Fissuration en fatigue-oxydation-fluage	515
10.7	Éléments de calcul de fissuration des structures par l'approche globale	517
10.7.1	Intégration des modèles dans le cas du chargement proportionnel	517
10.7.2	Analyses par éléments finis pour les problèmes 2D	519
10.7.3	Cas des fissures tridimensionnelles	520
10.8	Approches locales de la fissuration	527
10.8.1	Principe des approches locales	527
10.8.2	Approche locale de la fissuration par la mécanique de l'endommagement	529

## Table des matières

10.8.3	Approche locale de la fissuration par emploi de zones cohésives	530
10.9	Approche variationnelle de la fissuration	531
10.10	Approche par éléments discrets	532
<b>Chapitre 11 • Éléments de thermodynamique des couplages multi-physiques</b>		<b>534</b>
11.1	Aspects phénoménologiques	535
11.2	Thermodynamique des couplages multi-physiques	538
11.2.1	Conservation de la masse dans le repère barycentrique	538
11.2.2	Vitesses de référence et flux de diffusion	539
11.2.3	Premier principe	540
11.2.4	Second principe et dissipation	541
11.2.5	Enthalpie libre $g_k$ et potentiel chimique $\mu_k^*$	542
11.2.6	Lois de diffusion – Cadre général et couplages	543
11.3	Hydro-élasticité et thermo-hydro-élasticité	547
11.3.1	Domaine de validité et d'emploi	547
11.3.2	Formulation	547
11.4	Milieux poreux saturés	548
11.4.1	Domaine de validité et d'emploi	548
11.4.2	Formulation de la poro-élasticité linéaire	548
11.4.3	Un modèle de poro-plasticité	550
11.4.4	Opérateurs tangents drainé et non drainé	552
11.5	Chimio-élasticité	553
11.5.1	Domaine de validité et d'emploi	553
11.5.2	Formulation	553
11.6	Transformations de phases	556
11.6.1	Domaine de validité et d'emploi	556
11.6.2	Formulation en thermo-élasticité	557
11.6.3	Cinétiques de transformation	560
11.6.4	Équation de la chaleur en thermo-élasticité avec transformations de phases	560
11.6.5	Relations de Clapeyron	561
11.6.6	Plasticité de transformation	562
11.7	Couplages électro-magnéto-mécaniques	563
11.7.1	Domaine de validité et d'emploi	564
11.7.2	Formulation des forces électromagnétiques	564
11.7.3	Part d'énergie électromagnétique transmise à la matière	566
11.7.4	Formulation thermodynamique	567
11.7.5	Piezo-électricité	568
11.7.6	Magnéto-élasticité	569
<b>Index</b>		<b>573</b>

# NOTATIONS



## OPÉRATEURS

Opérateur	Signification	Opérateur	Signification
$f, g$	fonctions non identifiées	$\delta_{ij}$	symbole de Kronecker, $\delta_{ij} = 1$ si $i = j$ , $\delta_{ij} = 0$ si $i \neq j$
$X$	scalaire	$\mathcal{H}$	fonction de Heaviside $\mathcal{H}(x) = 1$ si $x \geq 0$ , $\mathcal{H}(x) = 0$ si $x < 0$
$\vec{X}$	vecteur de composantes $X_i$	$\varepsilon_{ijk}$	composante du tenseur d'orientation, $\begin{cases} 0 & \text{si 2 indices égaux} \\ 1 & \text{si permutation} \\ & \text{directe de } i, j, k \\ -1 & \text{si permutation} \\ & \text{indirecte} \end{cases}$
$\mathbf{X}$	tenseur d'ordre 2 de composantes $X_{ij}$	$\mathbf{1}$	tenseur unité d'ordre 2 de composantes $\delta_{ij}$
$\mathbf{X}$	tenseur d'ordre 4 de composantes $X_{ijkl}$	$\mathbf{I}$	tenseur unité dans l'ensemble des tenseurs symétrique d'ordre 4, de composantes $I_{ijkl}$
$\dot{X}$	quantité virtuelle	$X_1 = \text{tr } \mathbf{X}$	premier invariant de $\mathbf{X}$
$[X]$	matrice	$X_{II} = \frac{1}{2} \text{tr } \mathbf{X}^2$	deuxième invariant de $\mathbf{X}$
$\{X\}$	colonne	$X_{III} = \frac{1}{3} \text{tr } \mathbf{X}^3$	troisième invariant de $\mathbf{X}$
$\dot{f}$	dérivée temporelle de $f$ ( $= \frac{df}{dt}$ )	$X_H = \frac{1}{3} \text{tr } \mathbf{X}$	partie hydrostatique du tenseur $\mathbf{X}$
$\mathbf{X}^T, [X]^T, \{X\}^T, \mathbf{X}^T$	transposés de $\mathbf{X}, [X], \{X\}, \mathbf{X}$	$\mathbf{X}' = \mathbf{X} - \frac{1}{3} \text{tr } \mathbf{X} \mathbf{1}$	partie déviatorique du tenseur $\mathbf{X}$
$f^+$	transformée de Laplace-Carson	$I_1$	$I_1(\mathbf{X}) = X_1 = \text{tr } \mathbf{X}$
$\mathcal{L}(f)$	transformée de Laplace	$I_2$	$I_2(\mathbf{X}) = \frac{1}{2} ((\text{tr } \mathbf{X})^2 - \text{tr } \mathbf{X}^2)$
$\text{Re } X$	partie réelle de $X$	$I_3$	$I_3(\mathbf{X}) = \det \mathbf{X}$
$\text{Im } X$	partie imaginaire de $X$	$J_1$	$J_1(\mathbf{X}) = X'_1 = 0$
$\text{sgn}(X)$	signe + ou - du scalaire $X$	$J_2$	$J_2(\mathbf{X}) = \sqrt{3X_{II}} = \sqrt{\frac{3}{2} \mathbf{X}' : \mathbf{X}'}$
$\langle X \rangle = \max(X, 0)$	partie positive d'un scalaire $X$	$J_3$	$J_3(\mathbf{X}) = \left(\frac{27}{2} X_{III}\right)^{1/3}$
$\langle \mathbf{X} \rangle_+, \langle \mathbf{X} \rangle_-$	partie positive, partie négative d'un tenseur $\mathbf{X}$	$X_M = X_{Max}$	valeur maximale de $X$
$\vec{X} \cdot \vec{Y}, \mathbf{X} \cdot \mathbf{Y}$	produit contracté sur un indice (scalaire, matricel) $X_k Y_k, X_{ik} Y_{kj}$	$X_m = X_{min}$	valeur minimale de $X$
$f \otimes g = g \otimes f$	produit de convolution de la fonction $f(t)$ par la fonction $g(t)$ $f \otimes g = \int_0^\infty f(t - \tau)g(\tau)d\tau$	$\bar{X} = \frac{1}{2}(X_m + X_M)$	valeur moyenne de $X$
$\mathbf{X} \otimes \mathbf{Y}$	produit tensoriel de deux tenseurs, de composantes $X_{ij} Y_{kl}$	$\Delta X = X_M - X_m$	amplitude crête-crête de $X$
$\mathbf{X} \otimes \mathbf{Y}$	produit tensoriel de deux tenseurs, de composantes $X_{ik} Y_{lj}$	$X_a = \frac{\Delta X}{2}$	amplitude de $X$
$\mathbf{X} \otimes \mathbf{Y}$	produit tensoriel symétrisé de composantes $\frac{1}{2}(X_{ik} Y_{lj} + X_{il} Y_{kj})$		
$\mathbf{X} : \mathbf{Y}, \mathbf{X} \cdot \mathbf{Y}$	produit contracté sur deux indices $X_{ij} Y_{ij}, X_{ijkl} Y_{kl}$		
$\delta$	distribution de Dirac		

## LISTE DES SYMBOLES EMPLOYÉS COMME PARAMÈTRES OU COEFFICIENTS DÉFINIS À CHAQUE UTILISATION

$a$	$c$	$e$	$k$	$M$	$Q$	$S$	$\alpha$	$\eta$	$\nu$
$A$	$C$	$F$	$K$	$n$	$r$	$v$	$\beta$	$\theta$	$\tau$
$b$	$d$	$G$	$L$	$N$	$R$	$V$	$\gamma$	$\lambda$	
$B$	$D$	$H$	$m$	$P$	$s$	$w$	$\delta$	$\mu$	

La modélisation est la gangrène des notations : les auteurs n'ont malheureusement pas pu éviter d'utiliser plusieurs fois chacune de ces lettres pour désigner des quantités différentes

SYMBOLES

Symboles	Signification	Symboles	Signification
$a$	longueur ou demi-longueur de fissure	$f$	fonction critère
$\frac{\Delta a}{\Delta N}$	incrément de fissure par cycle	$f_t, f_c$	résistances en traction et en compression
$\mathbf{A}$	tenseur de localisation des déformations	$\vec{f}$	densité de force
$A_{II}$	amplitude de cisaillement octaédral	$f_i$	énergie libre spécifique du fluide $f$
$A_K$	variable thermodynamique associée	$F$	potentiel d'évolution
$\mathcal{A}, \mathcal{A}_r$	affinité de réaction chimique	$F_X$	potentiel d'écroûissage cinématique
$\vec{b}$	vecteur de Burgers	$F_D$	potentiel d'endommagement
$\vec{B}$	induction magnétique	$\vec{F}$	vecteur force
$\mathbf{B}$	tenseur de localisation des contraintes	$\vec{F}^d$	vecteur force ou force surfacique imposé sur la frontière $\partial S_F$
$\mathbf{B} = \mathbf{F} \cdot \mathbf{F}^T$	tenseur de Cauchy-Green gauche	$\mathbf{F}, \mathbf{F}^e, \mathbf{F}^p$	tenseurs gradients de la transformation (total, élastique, inélastique)
$c (c_L, c_T)$	célérité des ondes (longitudinales et transverses)	$g$	fonction d'écroûissage
$C$	cohésion	$g_k$	enthalpie libre partielle spécifique de l'espèce $k$
$C, C_e$	chaleur spécifique	$\vec{q}_q = -\frac{1}{T} \text{grad } T$	variable associée au flux de chaleur
$C^*$	intégrale de contour	$G$	module de cisaillement élastique
$\mathbf{C} = \mathbf{F}^T \cdot \mathbf{F}$	tenseur de Cauchy-Green droit	$G$	taux de restitution d'énergie (chap. 10)
$c_k$	concentration molaire de l'espèce $k$	$G_c$	taux de restitution d'énergie critique
COD	ouverture de fissure	$G_r$	taux de restitution d'énergie réduit
CTOD	ouverture en fond de fissure	$G_S$	taux de restitution d'énergie seuil
$\mathbf{d}$	tenseur vitesse de déformation	$\Delta_r G$	enthalpie libre de réaction
$d_e$	endommagement actif	$h$	module d'écroûissage
$\vec{D}$	déplacement électrique	$h_c$	module d'écroûissage critique
$D$	endommagement isotrope (scalaire)	$h$	paramètre de refermeture des micro-défauts (chap. 8)
$\mathbf{D}$	tenseur d'endommagement d'ordre 2	$h_k$	enthalpie partielle spécifique de l'espèce $k$
$\mathbf{D}$	tenseur d'endommagement d'ordre 4	$H$	dureté
$D_c$	endommagement critique	$\Delta H$	énergie d'activation
$D_{Cr}$	dommage de fluage	$\Delta_r H, \Delta_t H$	enthalpie de réaction, de tranformation
$D_F$	dommage de fatigue	$\vec{H}$	champ magnétique
$D_{ox}$	dommage dû à l'oxydation	$\mathbf{H} = (\mathbf{1} - \mathbf{D})^{-1/2}$	tenseur d'intégrité
$D_u$	ductilité	$H, \mathbf{H}$	module et opérateur tangent
$D^{\text{Fick}}$	coefficient de diffusion	$H$	dureté
$\frac{\Delta D}{\Delta N}$	incrément d'endommagement par cycle	$I$	intégrale de Bui
$e$	énergie interne spécifique	$I_1, I_2, I_3$	invariants issus du polynôme caractéristique
$E$	énergie interne	$\mathbf{J}(\mathbf{J})$	fonction (tenseur) fluage visco-élastique
$E$	module d'Young	$J$	intégrale de Rice
$E' = E/(1 - \nu^2)$	module en déformation plane	$\vec{J}$	vecteur densité de courant de conduction
$E^*$	module complexe	$\vec{J}_e$	vecteur flux d'énergie interne
$E' = \text{Re}(E^*)$	module de conservation	$\vec{J}_s$	vecteur flux d'entropie
$E'' = \text{Im}(E^*)$	module de perte	$\vec{J}_k^*$	vecteur flux massique d'espèce
$\vec{E}$	champ électrique	$J_2, J_3$	invariants du déviateur des contraintes
$\mathbf{E}$	tenseur d'élasticité	$k$	conductivité thermique
$\mathbf{E} = \frac{1}{2}(\mathbf{F}^T \cdot \mathbf{F} - \mathbf{1})$	tenseur de déformation de Green-Lagrange	$k_B$	constante de Boltzmann
$E^a, \mathbf{E}^a$	module et tenseur d'élasticité en conditions adiabatiques	$K$	énergie cinétique
$E^d, \mathbf{E}^d$	module et tenseur d'élasticité en conditions drainées	$K$	module de compressibilité élastique
$E^i, \mathbf{E}^i$	module et tenseur d'élasticité en conditions isothermes	$K, K_I, K_{II}, K_{III}$	facteurs d'intensité des contraintes
$E^u, \mathbf{E}^u$	module et tenseur d'élasticité en conditions non drainées	$K_{Ic}$	ténacité
$\mathcal{E}_{ech}$	énergie d'échange	$\mathfrak{L}(x) = \coth x - \frac{1}{x}$	fonction de Langevin
		$\mathbf{L}$	gradient des vitesses

Symboles	Signification	Symboles	Signification
$\bar{m}$	coefficient de frottement d'une couche limite	$t$	temps
$M$	point matériel	$t_C$	temps à rupture en fluage pur
$\vec{M}, \mu_0 \vec{M}$	aimantation et polarisation magnétique	$t_D$	temps à apparition de l'endommagement
$M_k$	masse molaire de l'espèce $k$	$t_R$	temps à rupture
$\vec{n}$	vecteur normal unitaire	$\vec{i}$	vecteur unitaire
$\mathbf{n} = \mathbf{P}/\ \mathbf{P}\  = \dot{\epsilon}^p/\ \dot{\epsilon}^p\ $	direction unitaire du taux de déformation plastique	$T$	température absolue
$n$	exposant de la loi de Norton avec écrouissage	$T$	contrainte $T$
$N^*$	exposant de la loi de Norton sans seuil	$T_M$	température de fusion
$N, M$	exposants de la loi de visco-plasticité multiplicative	$\vec{T}$	vecteur contrainte
$N_R$	nombre de cycles à rupture	$\mathbf{T} = \mathbf{\Pi}^T$	tenseur nominal des contraintes
$N_F$	nombre de cycles à rupture en fatigue pure	$u$	déplacement unidimensionnel
$p = \int (\frac{2}{3} \dot{\epsilon}^p : \dot{\epsilon}^p)^{1/2} dt$	déformation plastique cumulée	$u_e$	déplacement élastique sur un bord
$p_f$	pression du fluide $f$	$u_p$	déplacement plastique sur un bord
$p_R$	déformation plastique cumulée à rupture	$\vec{u}$	vecteur déplacement
$P$	puissance	$\llbracket \vec{u} \rrbracket$	saut de déplacement, ex : $\llbracket \vec{u}(x_1) \rrbracket = \vec{u}(x_1, 0^+) - \vec{u}(x_1, 0^-)$
$\vec{P}$	polarisation électrique	$\vec{u}^d$	vecteur déplacement imposé sur la frontière $\partial S_U$
$\mathbf{P}$	tenseur direction de la vitesse de déformation plastique	$\mathcal{U}$	énergie potentielle
$\mathbf{P}, \mathbf{P}^H$	tenseurs de Hill	$\mathbf{U}$	tenseur de déformation pure droit
$q$	variable d'écrouissage	$\vec{v}$	vecteur vitesse
$\vec{q}$	vecteur flux de chaleur	$V$	volume
$Q$	taux de chaleur reçue	$\mathbf{V}$	tenseur de déformation pure gauche
$Q$	variable mémoire de l'écrouissage normale à la surface de charge	$V_K$	variable interne
$\mathbf{Q}, \mathbf{Q}$	tenseur direction du taux d'endommagement anisotrope	$\mathbf{V}$	tenseur de viscosité
$\mathbf{Q}$	opérateur rotation	$w$	densité d'énergie de déformation
$r$	source volumique de chaleur	$w_e$	densité d'énergie de déformation élastique
$r$	variable d'écrouissage isotrope (homogène à une déformation)	$w_p$	densité d'énergie plastique
$r_e$	source volumique d'énergie interne	$w_s$	densité d'énergie stockée
$r_s$	source volumique d'entropie	$w^* (w_e^*)$	densité d'énergie complémentaire (élastique)
$r_y$	dimension de zone plastique	$\mathbf{w}$	tenseur taux de rotation
$r_{\chi_k}$	source volumique d'espèce $k$	$W$	densité d'énergie hyper-élastique
$R$	raideur	$W_{ext}$	travail de efforts extérieurs
$R(\mathbb{R})$	fonction (tenseur) relaxation visco-élastique	$\mathcal{W}(\vec{x} - \vec{s})$	fonction de poids
$R$	résistance à la déchirure ductile	$X = \frac{1}{2} X_{11}$	variable d'écrouissage cinématique uniaxiale
$R$	variable d'écrouissage isotrope	$\mathbf{X}$	tenseur variable d'écrouissage cinématique
$R_\infty$	valeur à saturation de l'écrouissage isotrope	$X_\infty$	valeur à saturation de l'écrouissage cinématique
$\mathbf{R}$	rotation de la décomposition polaire	$Y$	taux de restitution de densité d'énergie
$s$	entropie spécifique	$z$	variable complexe
$\vec{s}$	vecteur tangent unitaire	$z(p)$	fonction de correction de l'énergie stockée
$s_i^*$	taux de production interne d'entropie	$\alpha$	phase d'un métal
$h_k$	enthalpie partielle massique de l'espèce $k$	$\alpha, \alpha$	coefficient et tenseur de dilatation thermique
$S$	entropie	$\alpha$	variable interne d'écrouissage cinématique
$S$	section d'éprouvette	$\alpha_E = \frac{1+\nu}{3(1-\nu)}$	paramètre d'Eshelby
$S_0$	section nominale d'éprouvette	$\beta$	angle de frottement
$S, s$	paramètres (résistance et exposant) d'endommagement	$\beta_E = \frac{2}{15} \frac{4-5\nu}{1-\nu}$	paramètre d'Eshelby
$S$	coefficient de Seebeck	$\beta_T$	biaxialité de la fissuration
$\vec{S} = \vec{E} \wedge \vec{H}$	vecteur de Poynting	$\gamma$	phase d'un métal
$\mathbf{S}$	tenseur des contraintes de Piola-Kirchhoff 2	$\gamma$	densité d'énergie de décohesion
$\mathbf{S}$	tenseur de souplesse	$\gamma, \gamma_{ij} = 2\epsilon_{ij}$	distorsion de cisaillement
		$\gamma$	coefficient de dilatation hydrique
		$\vec{\gamma}$	vecteur accélération
		$\Gamma$	front de fissure
		$\delta$	exposant de la singularité des contraintes
		$\delta_0$	taille de fissure macroscopique amorcée

## Notations

Symboles	Signification	Symboles	Signification
$\epsilon$	déformation uniaxiale	$\sigma$	contrainte uniaxiale
$\epsilon^v$	déformation vraie	$\sigma_{eq}$	contrainte équivalente de von Mises
$\epsilon_e$	déformation élastique	$\sigma_f, \sigma_f^{\infty}$	limite de fatigue, limite de fatigue asymptotique
$\epsilon_{eq} = (\frac{2}{3} \epsilon' : \epsilon')^{1/2}$	déformation équivalente au sens de von Mises	$\sigma_H$	contrainte hydrostatique
$\epsilon_H$	déformation hydrostatique	$\sigma_l$	limite de fatigue
$\epsilon_p$	déformation plastique	$\sigma_s$	contrainte seuil de plasticité
$\epsilon_{pD}$	déformation seuil d'endommagement	$\sigma_u$	contrainte ultime de rupture
$\hat{\epsilon}$	déformation équivalente de Mazars	$\sigma^p$	contrainte vraie
$\epsilon_R$	déformation à rupture	$\sigma_y$	contrainte limite d'élasticité
$\epsilon$	tenseur des déformations	$\sigma_y^t, \sigma_y^c$	limites d'élasticité en traction et en compression
$\epsilon'$	tenseur déviateur des déformations	$\tilde{\sigma}$	contrainte effective
$\epsilon^e$	tenseur des déformations élastiques	$\sigma^*$	contrainte équivalente d'endommagement
$\epsilon^p$	tenseur des déformations plastiques	$\sigma$	contrainte et tenseur des contraintes
$\epsilon_0$	permittivité diélectrique du vide	$\tilde{\sigma}$	tenseur des contraintes effectives
$\zeta = \Delta\phi, \zeta^p$	variation de volume fluide totale et plastique	$\sigma^{eff}$	tenseur des contraintes effectives dans les milieux poreux
$\eta$	paramètre de sensibilité hydrostatique à l'endommagement	$\tilde{\sigma}$	tenseur des contraintes effectives en électromagnétisme
$\eta$	exposant de la loi de fissuration de Paris	$\sigma'$	tenseur déviateur des contraintes
$\eta$	viscosité	$\nabla$	dérivée objective de $\sigma$ (de Jaumann par exemple)
$\theta$	écart à une température de référence	$\sigma$	dérivée objective de $\sigma$ (de Jaumann par exemple)
$\kappa^{Darcy}$	perméabilité du milieu	$\sigma_{ij}$	composantes de $\sigma$
$\lambda, \Lambda$	coefficient d'élasticité de Lamé	$\sigma_i$	composantes principales de $\sigma$
$\lambda, \lambda_i$	élongation, élongation principale	$\sigma_{Ohm}$	conductivité électrique
$\tilde{\lambda}$	multiplicateur	$\tau$	temps
$\mu$	coefficient de cisaillement élastique de Lamé	$\tau$	contrainte de cisaillement
$\mu_f$	coefficient de frottement de Coulomb	$\tau$	coefficient de Thomson
$\mu_k$	potentiel chimique molaire de l'espèce $k$	$\tau$	taux massique d'eau
$\mu_k^*$	potentiel chimique massique de l'espèce $k$	$\tau_y$	limite d'élasticité en cisaillement
$\mu_0$	perméabilité magnétique du vide	$\tau_R$	contrainte limite de rupture en cisaillement
$\dot{\mu}$	multiplicateur	$\tau$	tenseur des contraintes de Kirchhoff
$\nu$	coefficient de contraction de Poisson	$\phi$	angle de frottement
$\nu^*$	coefficient de contraction	$\phi$	porosité
$\nu_{kr}$	coefficients stoechiométriques de la réaction $r$	$\varphi$	potentiel de dissipation
$\xi$	variable mémoire d'écrouissage	$\varphi^*$	potentiel dual
$\xi, \xi_k$	fraction volumique	$\Phi$	puissance spécifique dissipée
$\xi$	nombre d'onde	$\Phi_1$	dissipation intrinsèque
$\xi, \xi_r$	avancement d'une réaction chimique	$\Phi_2$	dissipation par diffusion (de la chaleur, d'espèces)
$\pi$	mesure du glissement interne cumulé	$\chi$	fonction d'Airy
$\Pi$	coefficient de Peltier	$\chi$	contrainte équivalente de fluage
$\mathbf{\Pi}$	premier tenseur de Piola-Kirchoff	$\chi_k$	fraction massique de l'espèce $k$
$\mathbf{\Pi}, \mathbf{\Pi}$	coefficient et tenseur de diffusion hydrique	$\chi_E, \chi_E$	susceptibilité et tenseur de susceptibilité électriques
$\rho$	masse volumique	$\chi_H, \chi_H$	susceptibilité et tenseur de susceptibilité magnétiques
$\rho_e$	densité volumique de charge électrique	$\psi$	angle de dilatance
$\rho_k^*$	masse volumique partielle de l'espèce $k$	$\psi$	énergie libre spécifique de Helmholtz
$\rho_f, \rho_f^*$	masse volumique et masse volumique partielle du fluide $f$	$\psi^*$	enthalpie libre spécifique de Gibbs
$\omega$	pulsation (= $2\pi f$ si $f$ est la fréquence)	$\Psi$	énergie libre ou énergie libre volumique
$\omega$	partie antisymétrique du gradient de déplacement		

# ÉLÉMENTS SUR LES MÉCANISMES PHYSIQUES DE DÉFORMATION ET DE RUPTURE DES SOLIDES

1

*« Lorsqu'un théoricien trouve un résultat nouveau,  
personne n'y croît, sauf lui !  
Lorsqu'un expérimentateur trouve un résultat nouveau,  
tout le monde y croît, sauf lui ! »*

Ce premier chapitre est destiné à donner les éléments de physique et de métallurgie permettant aux non-spécialistes de se faire une idée schématique de la structure et des mécanismes de déformation et de rupture des principaux matériaux solides utilisés en constructions courantes. Il s'agit donc d'un résumé succinct de connaissances classiques que l'on trouve dans les ouvrages spécialisés dont les principaux sont indiqués en références bibliographiques. La connaissance de ces mécanismes physiques élémentaires est nécessaire pour la formulation des hypothèses sur lesquelles reposent les théories phénoménologiques mésoscopiques de déformation et de rupture ainsi que les théories multi-échelles plus récentes. Les théories formulées à l'échelle de l'élément de volume de la mécanique des milieux continus, exposées dans les chapitres 4 à 11, doivent en effet intégrer au niveau de modèles homogénéisés continus des phénomènes qui se situent à des échelles plus petites : atomes, cristaux, hétérogénéités, molécules, cellules... Pour les métaux, c'est l'introduction du concept de dislocation par Taylor et quelques autres en 1934 qui constitue le pas décisif pour l'explication des phénomènes de déformation plastique. D'une manière plus générale, c'est l'invention de la microscopie électronique à transmission et à balayage qui a permis dans les années 1960-70 de comprendre les principaux mécanismes de déformation et de rupture. C'est depuis les années 1990 que se sont systématisées les mesures globales par corrélation d'images, énergétiques ou de champs de déplacements et de déformations, 2D et bientôt 3D avec la tomographie, apportant un éclairage précieux pour la compréhension fine des phénomènes mis en jeu.

Malgré la grande différence de nature et de structures des matériaux tels que les métaux et alliages, les polymères et composites, les céramiques et bétons, les bois, paradoxalement, on observe une grande unité dans leurs comportements macroscopiques. Avec des ordres de grandeurs différents, les termes d'élasticité, de viscosité, de déformation plastique ou permanente, de consolidation ou d'écrouissage, de rupture fragile, de rupture ductile s'appliquent à tous ces matériaux. Eh bien ! c'est ce qui justifie *a priori* l'approche globale de la mécanique des maté-

riaux qui, à l'aide des concepts de mécanique des milieux continus et de thermodynamique du chapitre 2 et de rhéologie du chapitre 3, permet de construire des modèles indépendants dans leurs fondements (mais pas dans leurs formulations analytiques) de la nature des matériaux.

## 1.1 MÉTAUX ET ALLIAGES

### 1.1.1 Structure<sup>♣</sup>

#### a) Éléments de cristallographie

**Atomes.** Les métaux et alliages sont constitués d'atomes liés entre eux par des forces électromagnétiques délocalisées (gaz d'électrons) entre atomes. Ils ont une structure cristalline. Rappelons que l'ordre de grandeur du « rayon » d'un atome est de  $10^{-7}$  à  $10^{-6}$  mm (1 à 10 Å).

Les empilements stables d'atomes sont déterminés par des aspects énergétiques (minimum de l'énergie de cohésion du cristal). Les liaisons des arrangements métalliques correspondent à une mise en commun d'électrons des couches externes d'un grand nombre d'atomes.

Les métaux et alliages se présentent normalement à l'état *polycristallin* (sous forme d'agrégat de cristaux ou de *grains*). L'état *amorphe*, comme l'état monocristallin, n'est obtenu qu'au prix de procédures complexes qui nécessitent des refroidissements ultra-rapides.

**Monocristaux.** L'état cristallin est caractérisé par la régularité de l'empilement : un motif élémentaire ou *maille*, se répète périodiquement dans les trois directions pour constituer le cristal.

La plupart des mailles périodiques correspondent à l'un des trois systèmes suivants :

- cristal Cubique Centré (CC, Fig. 1.1a), système le moins compact,  
*Exemples : Fe $\alpha$ , Cr, Mo*
- cristal Cubique à Faces Centrées (CFC, Fig. 1.1b),  
*Exemples : Cu, Ag, Al, Ni*
- cristal Hexagonal Compact (HC, Fig. 1.1c),  
*Exemples : Mg, Zn, Ti $\alpha$ , Co $\alpha$*

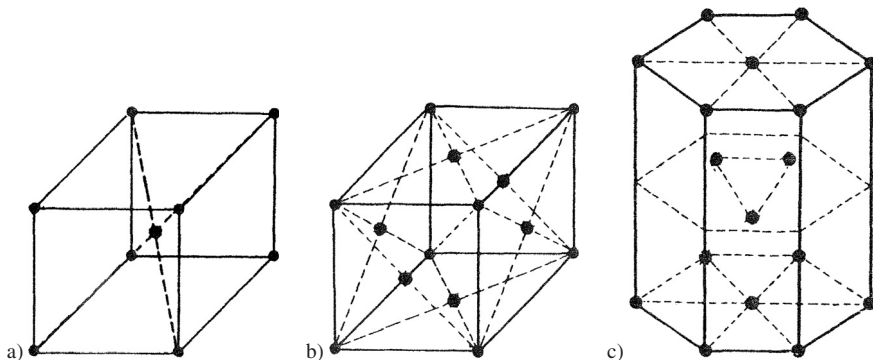


Figure 1.1 - a) Cristal CC, b) Cristal CFC, c) Cristal HC.



Ces mailles possèdent des axes et des plans de symétrie qui sont en général des plans de densité maximale d'atomes (encore dénommés plans de plus grande équidistance ou plans denses), offrant une moindre résistance au cisaillement (entre lesquels la cohésion est la plus faible), d'équation

$$\frac{x_1}{a_1} + \frac{x_2}{a_2} + \frac{x_3}{a_3} = 1$$

où les inverses des coefficients  $a_1, a_2, a_3$  sont des multiples entiers de la distance interatomique. Cela permet de réécrire l'équation des plans denses sous la forme synthétique

$$hx_1 + kx_2 + lx_3 = \text{constante entière}$$

les plus petits entiers ( $h, k, l$ ) sont les indices de Miller d'une famille de plans parallèles.

Une direction cristallographique est caractérisée par une droite issue de l'origine du repère et passant par la position d'un atome. Elle est désignée par les coordonnées de cet atome exprimées en nombre de distances interatomiques. Par exemple, on a pour une structure CFC quatre familles de plans denses de normale les vecteurs  $(hkl) = (111)$  ou  $(\bar{1}11)$  ou  $(1\bar{1}1)$  ou encore  $(11\bar{1})$ , la notation  $\bar{1}$  signifiant  $-1$ . Les directions denses correspondantes (vecteurs appartenant aux plans denses) sont notées entre crochets, par exemple  $\langle \bar{1}10 \rangle$ .

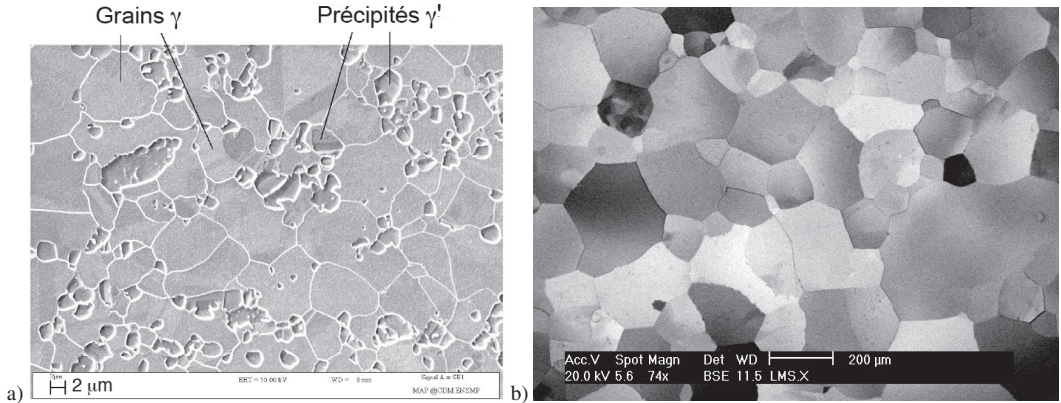
La structure des alliages peut être celle de l'un de ses éléments constitutifs ou bien une structure cristalline différente.

- Dans le cas des solutions solides (des atomes d'un matériau donné sont en solution dans un autre), il peut y avoir substitution d'un atome de la maille (exemple : Al dans Fe) ou insertion d'atomes de faible « volume » dans le réseau du solvant (exemple : C dans Fe pour l'austénite). L'austénite est ainsi une solution solide de carbone dans l'allotrope  $\gamma$  du fer.
- Les métaux peuvent se présenter sous différentes formes ou phases, suivant le niveau de température et de pression. Celles-ci correspondent à des variétés dites allotropiques. Par exemple, les phases les plus courantes dans les aciers sont les phases  $\gamma$  et  $\alpha$  (respectivement CFC pour l'austénite et CC pour la ferrite du système fer-carbone). Dans la structure  $Fe\alpha$ , chaque atome de fer a 8 voisins tandis qu'il en a 12 dans la structure  $Fe\gamma$ . L'empilement des atomes devient donc plus compact au passage de la forme  $\alpha$  à la forme  $\gamma$ .

Des phases secondaires stables ou instables peuvent exister : phases dénommées  $\beta, \delta, \epsilon, \sigma$ . On distingue aussi, pour une même phase, les cas où les atomes se présentent de façon désordonnée (exemple : phase  $\gamma$ ) ou de façon ordonnée (ajout d'un prime ' après la lettre grecque, exemple : phase  $\gamma'$ ). La martensite (fer  $\alpha'$ ) est une phase métastable ordonnée issue de la transformation sans diffusion de l'austénite en dessous d'une certaine température (dite température martensitique), dans laquelle le carbone forme une solution solide ordonnée.

**Polycristaux.** Les métaux et alliages sont généralement obtenus à l'état liquide, la structure se formant par solidification lors du refroidissement. La température du liquide diminuant, les distances interatomiques décroissent ; la distance critique, pour laquelle les liaisons s'établissent, est atteinte en quelques points répartis le plus souvent en surface qui constituent les premiers germes de croissance des cristaux. Chaque germe donne lieu à un monocristal ou grain dont la croissance est limitée par les cristaux voisins et dont l'orientation est variable. L'ensemble des grains orientés au hasard est un polycristal. La taille des grains dans les polycristaux varie de quelques microns ( $10^{-3}$  mm) à quelques millimètres suivant la nature des éléments constitutifs du métal et les traitements thermiques et mécaniques qu'ils ont subis (des

exemples sont donnés figure 1.2). Cette longueur est intrinsèque au matériau et son existence sert d'argument pour l'introduction d'une longueur caractéristique ou interne dans les modèles récents de comportement. On comprend également qu'un polycristal formé de nombreux monocristaux, anisotropes par essence, puisse souvent être considéré comme macroscopiquement isotrope, c'est-à-dire sans direction privilégiée pour les propriétés considérées.



**Figure 1.2 - Exemple de cristaux. (a) Microstructure du superalliage base nickel Udimet 720. Observation MEB (d'après M. Mazière). (b) Observation MEB en imagerie d'électrons rétrodiffusés d'un polycristal de zirconium après polissage mécanique et électrolytique (d'après D. Cademaison).**

**Alliages à mémoire de forme ou AMF.** Les AMF ont deux phases cristallographiques, appelées par analogie avec les aciers « phase martensitique » (en deçà d'une température dite de transition) et « phase austénitique » (au-delà de la température de transition). Le passage d'une phase à une autre se fait soit par changement de température (une variation de seulement 10 °C est suffisante), soit par application d'une contrainte. Il se fait à volume constant et est dit displacif : il correspond à de faibles déplacements globaux d'atomes, sans diffusion, sans changement – même local – de la composition chimique. Il est cristallographiquement réversible et peut conduire à d'importantes déformations « élastiques » (plusieurs %, voir figure 11.3 du chapitre 11). Le laiton, le titane-nickel, certains alliages cuivre-aluminium possèdent des propriétés de mémoire de forme, que les illusionnistes connaissent bien.

## b) Défauts cristallins

Le schéma du cristal parfait qui vient d'être décrit ne peut rendre compte que des déformations élastiques et de la rupture dite fragile dans laquelle la décohésion intervient sans déformation macroscopique appréciable. Les déformations plastiques et la rupture ductile ne s'expliquent que par la présence de défauts qui viennent perturber le réseau cristallin.

**Défauts ponctuels et surfaciques.** Les défauts ponctuels atomiques sont constitués par les atomes de substitution ou d'insertion des solutions solides et par les lacunes (nœuds du réseau cristallin où il manque des atomes). Ils provoquent une distorsion locale du réseau.

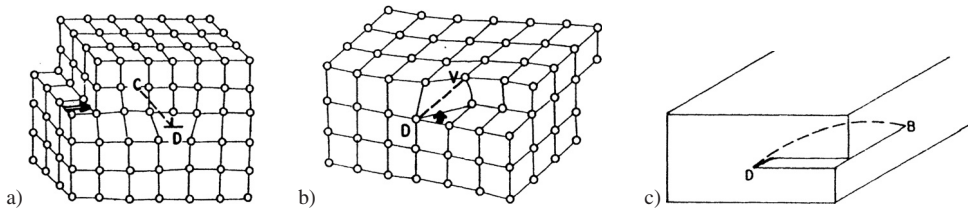
Les défauts surfaciques sont les surfaces de séparation entre cristaux ou parties de cristaux différents par les orientations ou la nature des phases :

- joints de grains (ou de cristaux) dans les polycristaux ;
- joints de macles ;
- interfaces entre deux phases.

Ces défauts de décohésion engendrent des micro-fissures et des cavités qui finissent par se rejoindre en une surface de séparation de la matière ou faciès de rupture.

**Dislocations (défauts linéiques).** Ce sont les défauts qui sont principalement responsables de la plasticité des métaux. Une ligne de dislocation est un défaut d'empilement mobile des atomes. On peut en donner une représentation schématique dans le cas du cristal cubique simple.

- *Dislocation coin* ou défaut fictivement créé par la translation incomplète de la partie supérieure du cristal par rapport à sa partie inférieure d'une quantité que l'on notera  $\vec{b}$  (Fig. 1.3a).
- *Dislocation vis* ou défaut fictivement créé par une rotation incomplète locale de la partie supérieure du cristal (Fig. 1.3b).
- *Boucle de dislocation* ou ligne qui, par exemple, rejoint une dislocation coin pure à une dislocation vis pure (Fig. 1.3c).



**Figure 1.3** - a) Dislocation coin de ligne DC de vecteur unitaire  $\vec{t} = \vec{DC}/DC$ . b) Dislocation vis de ligne DV de vecteur unitaire  $\vec{t} = \vec{DV}/DV$ . c) Boucle de dislocation de ligne BD.

Les dislocations se créent dès la formation des cristaux ; leur densité, très élevée dans la plupart des métaux et alliages, varie de  $10 \text{ km/cm}^3$  pour les cristaux recuits à  $10^7 \text{ km/cm}^3$  pour les échantillons très écrouis. La figure 1.4 donne une image d'une configuration de dislocation obtenue par microscopie électronique à transmission (MET).

Des traitements thermiques prolongés favorisent l'organisation des dislocations en cellules tridimensionnelles quasi régulières formées de facettes et de nœuds : les réseaux de Frank.

- **Vecteur de Burgers.** On peut caractériser une dislocation par le vecteur « défaut de fermeture » d'un contour entourant la ligne de dislocation.

Considérons un cristal cubique simple parfait et le même cristal avec une dislocation coin de trace  $L$  (Fig. 1.5). Dans ce dernier, considérons un contour fermé  $ABCD$  entourant le point  $L$  dans le sens direct par rapport à un repère orthonormé. Dans le cristal parfait reproduisons ce circuit en comptant le même nombre de distances interatomiques :  $A'B'C'D'E'$ . Pour fermer ce contour, il faut alors ajouter le vecteur  $E'\vec{A}$  qui, par définition, est le vecteur de Burgers  $\vec{b}$ .

Les propriétés du vecteur de Burgers sont les suivantes :

- Il est indépendant du contour choisi.

- Son module définit la translation fictive nécessaire pour créer la dislocation.
- Il est identique sur toute la ligne de dislocation. On note  $\vec{t}$  le vecteur unitaire tangent à la ligne de dislocation,
  - si  $\vec{t}$  et  $\vec{b}$  sont perpendiculaires, la dislocation est une dislocation coin,
  - si  $\vec{t}$  et  $\vec{b}$  sont parallèles, la dislocation est une dislocation vis,
  - si  $\vec{t}$  et  $\vec{b}$  sont quelconques, la dislocation est mixte.
- Le vecteur de fermeture d'un contour entourant plusieurs dislocations est la somme des vecteurs de Burgers de ces dislocations.

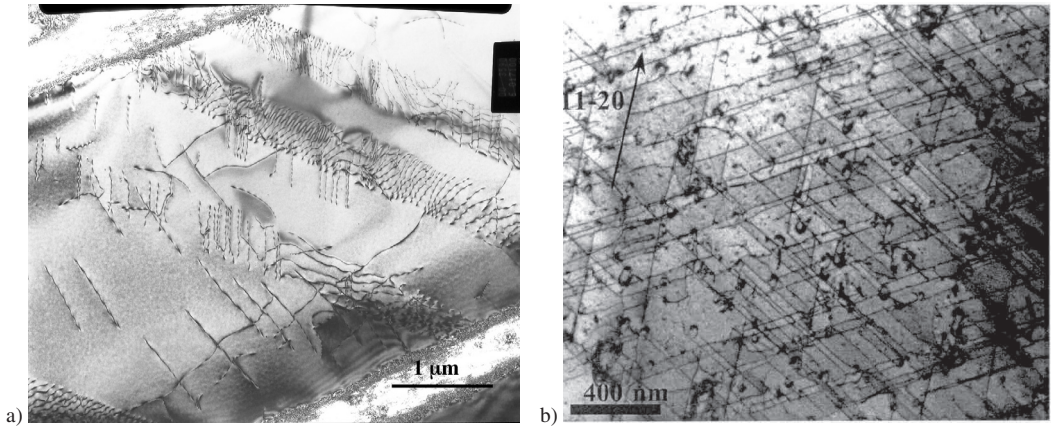


Figure 1.4 - (a) Microstructure de dislocations dans l'alliage Ti 6242-Si déformé en relaxation de contrainte puis recuit 24h (MET, champ clair en contraste sur deux ondes, d'après H. Jousset et L. Nasé). (b) Observation des trois familles de dislocation vis de vecteur de Burgers  $\langle a \rangle$  dans le zirconium alpha (d'après F. Ferrer).

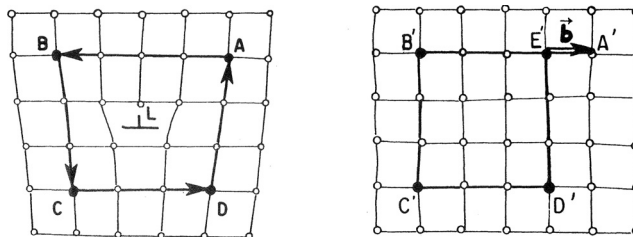


Figure 1.5 - Vecteur de Burgers. Le vecteur unitaire  $\vec{t}$  est la normale à cette page.

- *Champ de déplacement et énergie associée aux dislocations.* En considérant que les dislocations engendrent des distorsions purement élastiques du réseau et en assimilant le voisinage d'une dislocation à un milieu continu élastique linéaire, on peut calculer le champ de déplacement  $\vec{u}$  et l'énergie élastique  $w_e$  stockée dans la matière sous forme de contraintes et de déformations internes.

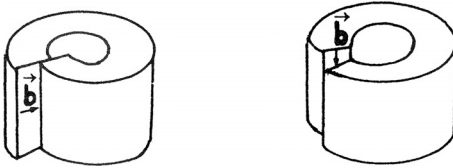
Par exemple pour une déformation coin de vecteur de Burgers  $\vec{b} = b\vec{x}_1$ , le champ de déplacement obtenu pour un milieu isotrope 2D de coefficient de Poisson  $\nu$  est :

$$u_1 = \frac{b}{2\pi(\kappa + 1)} \left[ (\kappa + 1)\theta + \frac{2x_1x_2}{r^2} \right] \quad u_2 = -\frac{b}{2\pi(\kappa + 1)} \left[ (\kappa - 1) \log r + \frac{2x_1^2}{r^2} \right]$$

où  $x_1 = r \cos \theta$  et  $x_2 = r \sin \theta$  et  $\kappa = \frac{3-\nu}{1+\nu}$  en contraintes planes,  $\kappa = 3 - 4\nu$  en déformations planes.

Pour une dislocation coin ou vis (Fig. 1.6) dont le module du vecteur de Burgers est  $b$  et de longueur unité, dans un milieu de module de cisaillement  $\mu$ , on trouve que cette énergie est de l'ordre de :

$$w_e = \mu b^2 \text{ en J/m}$$



**Figure 1.6 - Déplacements générant une énergie associée aux dislocations (la ligne de dislocation est l'axe du cylindre, dislocation coin à gauche, dislocation vis à droite).**

On peut calculer la force fictive par unité de longueur de dislocation  $\vec{F}_D$  exercée sur une dislocation de vecteur unitaire  $\vec{t}$  et de vecteur de Burgers  $\vec{b}$  par un champ de contrainte uniforme de tenseur  $\sigma$  : c'est la force de Peach et Koehler,

$$\vec{F}_D = (\sigma \cdot \vec{b}) \wedge \vec{t}$$

## 1.1.2 Mécanismes physiques de déformation<sup>o</sup>

### a) Déformation élastique

Les déformations élastiques proviennent des interactions atomiques. L'effet macroscopique constaté est le résultat des variations des espaces interatomiques nécessaires pour équilibrer les sollicitations extérieures, ainsi que de mouvements réversibles de dislocations. Ces modifications géométriques sont essentiellement réversibles. Dans une déformation élastique pure, la configuration initiale des atomes est retrouvée après cessation de la sollicitation.

### b) Dilatation thermique

Une augmentation de température dilate le réseau cristallin. D'un point de vue macroscopique cela se traduit par une déformation ou dilatation thermique sans effort mécanique appliqué linéaire en fonction de variations modérées de température. Un retour à la température initiale (de référence) annule cette dilatation thermique. En général le système cristallin reste inchangé, sauf dans le cas de transformations de phases (cas des AMF par exemple).

### c) Déformations permanentes

Les déformations permanentes plastiques ou visco-plastiques se situent au niveau cristallin et se superposent aux déformations élastiques. Elles correspondent à des déplacements relatifs d'atomes, stables après cessation de la sollicitation. Suivant les cas, ces déformations sont purement intragranulaires (intérieures aux grains) ou font intervenir des déplacements intergranulaires. Dans les matériaux métalliques, le rapport déformation aux joints/déformation des grains reste faible mais il augmente avec la température et lorsque la vitesse de déformation et/ou la taille de grain diminuent.

Les mécanismes décrits ci-après, maillage et glissements, constituent des déformations hétérogènes à l'échelle du cristal mais que l'on considérera comme homogènes à l'échelle macroscopique.



**Maclage.** Le maclage est plutôt caractéristique des déformations aux températures ambiantes et moyennes et des grandes vitesses de déformation. Il correspond à une déformation par mise en symétrie du cristal par rapport à un plan, dit plan de macle. Cette mise en symétrie induit un déplacement relatif parallèlement à ce plan, selon une direction de maclage. On l'observe dans les cristaux CC et HC concurremment avec des glissements, mais aussi dans des cristaux CFC à faible énergie de faute d'empilement.

**Déformation par mouvement de dislocations.** La présence de dislocations réduit considérablement la stabilité du réseau cristallin. Leur mobilité est la cause essentielle des déformations permanentes à l'échelle macroscopique.

- **Déplacement par glissement :** lorsque, sous l'action d'une sollicitation extérieure, une dislocation coin ou vis se déplace et traverse un cristal, elle engendre un déplacement irréversible de vecteur égal au vecteur de Burgers.

La figure 1.7 en donne le schéma pour une dislocation coin dans un cristal cubique soumis à une contrainte tangentielle  $\sigma_{12}$ . Le plan de glissement est le plan défini par le vecteur tangent unitaire  $\vec{r}$  à la ligne de dislocation et le vecteur de Burgers  $\vec{b}$ , la normale à ce plan étant ainsi

$$\vec{r} \wedge \frac{\vec{b}}{b}$$

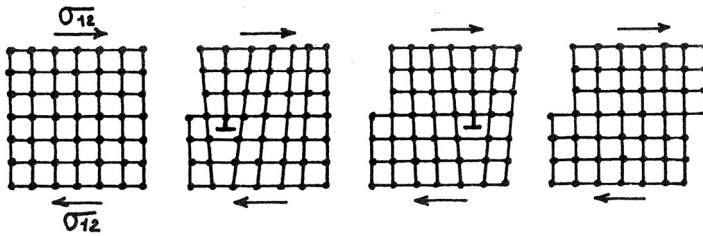


Figure 1.7 - Déplacement par glissement d'une dislocation.

Ce mécanisme de déplacement n'exige la reconfiguration de liaisons qu'au voisinage de la ligne de dislocation et successivement d'un atome à l'autre. Dans le cas plus complexe d'une boucle de dislocation qui se développe dans un milieu tridimensionnel, la boucle peut dévier pour éviter un obstacle (une impureté par exemple) ; c'est le glissement dévié.

- **Déplacement par montée :** une dislocation coin peut se déplacer perpendiculairement à son plan de glissement avec transport de matière. Une lacune étant proche d'une ligne de dislocation, une distorsion du réseau engendrée par une sollicitation extérieure peut provoquer le saut d'un atome du demi-plan supplémentaire sur le site cristallin inoccupé et la permutation de toute la rangée d'atomes. Selon ce mécanisme, la dislocation a monté d'un espace interatomique (Fig. 1.8).

Ce mécanisme de déplacement lié à la diffusion des lacunes ou d'atomes étrangers est favorisé par l'activation thermique ; il intervient donc plutôt aux températures élevées ( $T > \frac{1}{3}T_M$ , en Kelvin,  $T_M$  étant la température de fusion).

La vitesse de déplacement des dislocations par glissement ou par montée peut être très faible ou très élevée selon la contrainte appliquée mais elle ne dépasse jamais la vitesse du son dans le milieu considéré.