

Jean-Marcel Rax

# Mécanique analytique

Adiabaticité, résonances, chaos

DUNOD

Illustration de couverture : © gojalia – AdobeStock.com

Le pictogramme qui figure ci-contre mérite une explication. Son objet est d'alerter le lecteur sur la menace que représente pour l'avenir de l'écrit, particulièrement dans le domaine de l'édition technique et universitaire, le développement massif du photocopillage.

Le Code de la propriété intellectuelle du 1<sup>er</sup> juillet 1992 interdit en effet expressément la photocopie à usage collectif sans autorisation des ayants droit. Or, cette pratique s'est généralisée dans les établissements

d'enseignement supérieur, provoquant une baisse brutale des achats de livres et de revues, au point que la possibilité même pour

les auteurs de créer des œuvres nouvelles et de les faire éditer correctement est aujourd'hui menacée.

Nous rappelons donc que toute reproduction, partielle ou totale, de la présente publication est interdite sans autorisation de l'auteur, de son éditeur ou du Centre français d'exploitation du

droit de copie (CFC, 20, rue des Grands-Augustins, 75006 Paris).



© Dunod, 2020

11 rue Paul Bert, 92240 Malakoff

[www.dunod.com](http://www.dunod.com)

ISBN 978-2-10-079501-7

Le Code de la propriété intellectuelle n'autorisant, aux termes de l'article L. 122-5, 2<sup>o</sup> et 3<sup>o</sup> a), d'une part, que les « copies ou reproductions strictement réservées à l'usage privé du copiste et non destinées à une utilisation collective » et, d'autre part, que les analyses et les courtes citations dans un but d'exemple et d'illustration, « toute représentation ou reproduction intégrale ou partielle faite sans le consentement de l'auteur ou de ses ayants droit ou ayants cause est illicite » (art. L. 122-4).

Cette représentation ou reproduction, par quelque procédé que ce soit, constituerait donc une contrefaçon sanctionnée par les articles L. 335-2 et suivants du Code de la propriété intellectuelle.

# Table des matières

Avant-propos	VII
<b>1 Configurations, évolutions, variations</b>	1
1. Formalismes lagrangien et hamiltonien	1
2. Variété des configurations	4
3. Variations naturelles et virtuelles	5
4. Formulations variationnelles	7
5. Multiplicateurs de Lagrange, réciprocity, dualité	9
6. Couplages gyroscopiques et dissipatifs	13
7. Couplage champs-particule	15
<b>Les points clés du chapitre</b>	17
<b>2 Problèmes de Kepler et Alfven</b>	18
1. Réductions cinétique et dynamique	19
2. Formules de Binet, théorèmes de Bertrand	24
3. Orbites, hodographes, lois de Kepler	27
4. Vecteur de Laplace-Runge-Lenz	29
5. Équation de Kepler	31
6. Orbite et hodographe de Larmor	36
7. Invariance adiabatique, forces séculaires	37
8. Théorie des dérives d'Alfven	42
<b>Les points clés du chapitre</b>	47
Entraînez-vous	48
Solutions	57
<b>3 Équations d'Euler et Lagrange</b>	60
1. Coordonnées et vitesses généralisées	60
2. Équations d'Euler-Lagrange	64

3.	Identité de Beltrami	65
4.	Couplages gyroscopiques	66
5.	Couplages électrodynamiques	67
	<b>Les points clés du chapitre</b>	69
	Entraînez-vous	70
	Solutions	83
<b>4</b>	<b>Principes variationnels</b>	89
1.	Principe de Hamilton	89
2.	Principe de Maupertuis	92
3.	Principe de Fermat	96
4.	Liaisons et contraintes	100
	<b>Les points clés du chapitre</b>	103
<b>5</b>	<b>Symétries et adiabaticité</b>	104
1.	Invariance de jauge, forces d'inertie	104
2.	Théorème de Noether	106
3.	Lagrangiens lent et rapide	108
4.	Formule d'Airy	110
5.	Invariance adiabatique	112
6.	Dérives séculaires	114
7.	Forces séculaires	118
	<b>Les points clés du chapitre</b>	121
	Entraînez-vous	122
	Solutions	131
<b>6</b>	<b>Équations de Hamilton et Jacobi</b>	135
1.	Équations de Hamilton	135
2.	Actions de Jacobi et Arnold	140
3.	Équations de Hamilton-Jacobi	143
4.	Invariant intégral de Cartan	149

5. Invariants de Liouville et Poincaré	151
6. Mécanique quantique, principe de Huygens	156
<b>Les points clés du chapitre</b>	160
Entraînez-vous	161
Solutions	163
<b>7 Méthodes canoniques</b>	164
1. Transformations canoniques	164
2. Angles-actions et tores de KAM	169
3. Invariance adiabatique de l'action	173
4. Crochets de Poisson	176
5. Théorème de Liouville	179
6. Oscillateurs linéaires et non linéaires	181
7. Interactions champs-particule	186
<b>Les points clés du chapitre</b>	191
Entraînez-vous	192
Solutions	203
<b>8 Adiabaticité, résonances, chaos</b>	208
1. Hamiltonien adiabatique	208
2. Hamiltonien pondéromoteur	215
3. Relation d'Einstein	219
4. Hamiltonien résonnant	222
5. Chaos et critère de Chirikov	226
6. Équation cinétique quasi linéaire	229
7. Équation cinétique de Landau	233
<b>Les points clés du chapitre</b>	237
Entraînez-vous	238
Solutions	243
<b>Annexes</b>	247
A. Courbure et torsion euclidiennes	247

## Table des matières

B. Position, vitesse et accélération	249
C. Ellipse, hyperbole et parabole	250
D. Points O et X	253
E. Équation de Fokker-Planck	255
F. Transformée de Legendre	257
<b>Bibliographie</b>	260
<b>Index</b>	261

# Avant-propos

*On ne comprend rien si l'on ne cherche pas à comprendre tout.*

Jacqueline de Romilly, *Ce que je crois.*

La statique, science de l'équilibre des fluides et des solides pesants, s'est constituée dès l'Antiquité avec les travaux d'Archimède, la dynamique, science du mouvement et de ses causes, à partir des travaux de Galilée sur la pesanteur et de Kepler sur la gravitation. L'unification par Newton de la pesanteur et de la gravitation marque l'acte de naissance de la physique classique avec la publication de ses *Principia* en 1687.

La mise en place du cadre mathématique adapté à la formulation des lois de la mécanique s'étale sur tout le XIX<sup>e</sup> siècle à partir du traité de *Mécanique analytique* de Lagrange en 1788, et culmine avec la publication des *Méthodes nouvelles* de Poincaré en 1892. L'un des fils directeurs de ce développement est constitué par la quête d'une réduction de la dynamique à une statique, intuition formulée initialement par d'Alembert.

Cette recherche des invariants et de l'invariance, c'est-à-dire de l'essence au-delà des apparences, permet l'achèvement technique de la mécanique lagrangienne et de la mécanique hamiltonienne dès le début du XX<sup>e</sup> siècle. L'esthétisation de ces acquis fut l'une des multiples sources du tournant algébrique des mathématiques après la période analytique qui va de Newton à Cauchy ; le *Programme d'Erlangen* de Félix Klein, en 1872, constituant l'expression militante de ce tournant structuraliste et le *bourbakisme* sa forme religieuse. Nombre de points de vue exprimés dans le *Programme d'Erlangen* sont partagés par la mécanique analytique, en particulier celui-ci : « Les expressions analytiques qui peuvent se présenter dans l'étude d'une multiplicité au sens d'un groupe doivent être, en raison de leur signification, indépendantes du système de coordonnées ». Mais la mécanique parle du réel à partir du réel, c'est-à-dire, contrairement aux mathématiques, s'appuie sur une dialectique de la *praxis* et du *logos*. Le point de vue formel de la recherche des invariants et de leurs significations algébriques doit donc être complété par des méthodes d'approximations.

L'inefficacité de certaines de ces méthodes d'approximations, dans le cadre du *problème à trois corps* et du *problème des petits diviseurs* en mécanique céleste, conduisit à une révision radicale de l'idéologie du déterminisme, révision entrevue par Poincaré et clairement formulée par Chirikov à la fin des années 1950. Pour prédire l'évolution d'un système, ce dernier doit être déterministe et stable au regard des instabilités *stochastiques*, c'est-à-dire robuste vis-à-vis d'une petite erreur de spécification des conditions initiales. L'étude du régime *chaotique* des systèmes hamiltoniens, durant la seconde moitié du XX<sup>e</sup> siècle, participa au renouveau de cette vieille discipline et confirma les intuitions de Boltzmann et les présupposés de la théorie cinétique classique.

Ces trente dernières années, les allègements successifs des programmes d'analyse, de géométrie et de physique de l'enseignement secondaire, répercutés aux niveaux L1/L2 et Sup/Spé dans l'enseignement supérieur, ont considérablement modifié les cursus de mécanique classique au sein des facultés et des écoles aux niveaux Licence 3 et Master. L'évolution de notre système éducatif, à travers le renversement idéologique entre (i) la volonté d'abstraction et d'axiomatisation systématique des années 1970 et (ii) l'actuel refus de l'abstraction et de l'axiomatisation, semble être condamnée aux positions extrêmes ; extrêmes qui présentent de nombreuses difficultés pour l'apprentissage d'une discipline offrant la puissance conceptuelle, la pertinence pratique et la profondeur historique de la mécanique analytique. Ainsi est apparue la nécessité d'un cours rénové de mécanique analytique où nous avons renoncé à l'usage du cadre de la géométrie symplectique mais gardé l'intuition historique que les invariants sont plus aptes à révéler l'identité du réel que les lois d'évolutions.

Ces notes de cours, exercices et problèmes, ordonnés et présentés ici, sont issus de plusieurs cours enseignés aux niveaux L3, M1 et M2 ces vingt dernières années, principalement à l'École polytechnique et à la faculté des sciences de l'université de Paris XI.

Ce cours s'adresse aux physiciens et aux mécaniciens : enseignants et ingénieurs, futurs enseignants et futurs ingénieurs, étudiants des facultés des sciences et élèves des écoles d'ingénieurs. Il pourra aussi être consulté avec profit par les chercheurs confrontés à des problèmes complexes de dynamique des particules.

Orsay, Palaiseau, Barribas, décembre 2019.



# Configurations, évolutions, variations

*Et la complication croissante exige des signes de signes.*

Simone Weil *La Pesanteur et la Grâce*.

## Objectifs

- Présenter** les trois formalismes utilisés pour résoudre les problèmes de mécanique.
- Introduire** l'espace des configurations d'un système.
- Distinguer** les évolutions naturelles et les variations virtuelles.

## Plan

- 1 Formalismes lagrangien et hamiltonien
- 2 Variété des configurations
- 3 Variations naturelles et virtuelles
- 4 Formulations variationnelles
- 5 Multiplicateurs de Lagrange, réciprocity, dualité
- 6 Couplages gyroscopiques et dissipatifs
- 7 Couplage champs-particule

La mécanique analytique est constituée par un ensemble de principes, de méthodes et de résultats permettant de décrire, prédire et analyser l'évolution, dans l'espace en fonction du temps, d'un système de points matériels caractérisés par des masses et des charges. Le lieu géométrique décrit dans l'espace par chacun de ces points est appelé l'**orbite** et le lieu des points correspondants dans l'espace des vitesses l'**hodographe**.

On considérera qu'un problème de mécanique est résolu, au sens de Poincaré, à travers la description de ces deux courbes, orbite et hodographe, pour chaque point matériel d'un système, quelles que soient les conditions initiales. Cette description pouvant être de nature analytique (Lagrange, Euler...), géométrique (Kepler, Newton...) ou topologique (Poincaré, Birkhoff...).

## 1 Formalismes lagrangien et hamiltonien

Le formalisme newtonien constitue la formulation la plus répandue des lois de la mécanique. Ce formalisme s'articule autour des concepts de force et de couple, l'accélération d'une particule est égale à la somme des forces appliquées divisée par sa masse, ces forces quantifiant (i) des interactions à distance, (ii) des actions de contact ou (iii) des

effets d'inertie. On notera que la force est un objet algébrique assimilable à une forme, car le travail est un scalaire, alors que l'accélération est un vecteur. La deuxième loi de Newton nécessite donc quelques commentaires sur la dualité algébrique entre formes et vecteurs.

Ce formalisme dynamique fut développé par Newton (la notation vectorielle actuelle fut introduite par Gibbs) à la même époque que le formalisme énergétique introduit par Leibniz qui identifia la *vis viva*, égale, à un facteur deux près, à l'énergie cinétique. Ces deux traditions, newtonienne et leibnizienne, sont à l'origine des différentes formulations des lois de la mécanique.

Le formalisme newtonien, construit sur la base du concept de force, est particulièrement bien adapté au développement d'une intuition mécanique. Il est donc généralement utilisé pour introduire les bases de la mécanique. Les formalismes lagrangien et hamiltonien, issus de la tradition leibnizienne, sont en général considérés comme des chapitres de mécanique avancée et permettent de traiter des problèmes complexes pour lesquels le cadre newtonien est inadapté.

Une formulation lagrangienne est bien adaptée aux problèmes où certains degrés de liberté sont contraints, ainsi qu'aux systèmes possédant des symétries.

La formulation hamiltonienne est, quant à elle, particulièrement bien adaptée à l'étude des mouvements possédant des échelles de temps rapides et lentes tels que les mouvements multiples périodiques. Ce formalisme permet aussi la construction d'une théorie de perturbations remarquablement efficace. L'étude de la transition vers le chaos dans les systèmes multiples périodiques nécessite aussi un formalisme hamiltonien et la description du régime chaotique des systèmes mécaniques conservatifs se formule également en termes de variables hamiltoniennes. Enfin, le formalisme hamiltonien permet de considérer la dynamique d'un système, soit comme un problème aux conditions initiales à l'aide des équations de Hamilton, soit comme un problème de type conditions aux limites à travers l'équation de Hamilton-Jacobi, renouvelant ainsi radicalement notre vision de la dynamique des systèmes de particules.

La mécanique lagrangienne et la mécanique hamiltonienne ne sont pas simplement enseignées au regard de leurs puissances opérationnelles dans le contexte de certains problèmes particuliers de mécanique céleste ou de dynamique des systèmes de solides articulés : elles constituent les fondements méthodologiques des deux grandes conquêtes cognitives de la physique moderne relative à la structure de la matière à petite échelle et à la structure de l'Univers à grande échelle.

- Notre conception actuelle de la structure de la matière est construite sur une dialectique du microscopique et du macroscopique, dialectique rendue opérationnelle par la physique quantique et la physique statistique. Or ces deux disciplines sont articulées autour de la description hamiltonienne de la dynamique microscopique. Cette remontée du microscopique au macroscopique est donc intimement liée aux méthodes et concepts hamiltoniens.

- Notre conception actuelle de la structure à grandes échelles de l'Univers, le terme «grandes échelles» impliquant les échelles de longueurs (cosmologie) mais aussi de temps (cosmogonie), est construite sur la base d'une description lagrangienne de la dynamique de l'espace, du temps et de la matière et le lagrangien est l'outil privilégié d'élaboration des modèles de structures ultimes de l'espace, du temps et de la matière.

Le formalisme lagrangien constitue le cadre méthodologique de la relativité et le formalisme hamiltonien est l'outil de prédilection des descriptions statistique et quantique, positionnant ainsi la mécanique analytique en amont de la physique fondamentale. Les méthodes lagrangienne et hamiltonienne, au-delà de leurs vertus pratiques, constituent la superstructure conceptuelle de la physique moderne, permettant de formuler le déploiement spatiotemporel de la masse, de la charge et du moment angulaire à petite et grande échelles. Ce rôle fondateur justifie le caractère impératif de leurs maîtrises pour aborder un cursus de physique fondamentale.

Pour décrire notre environnement, le physicien distingue trois niveaux : (i) les objets appartenant au réel sensible, (ii) les concepts idéalisant ces objets (vecteurs, tenseurs, *bra*, *ket* ...) et (iii) les représentations de ces concepts. Par exemple, un vecteur, qui est un élément d'un espace vectoriel, est représenté par un ensemble de nombres qui constituent ses composantes sur une base. Cette distinction entre idéalisation (géométrique/algébrique) du réel et représentation numérique de l'idéalisation géométrique/algébrique du réel, en apparence triviale, devient essentielle lorsqu'il est question de transformation. Deux types de transformations sont alors possibles : (i) les changements de représentations de l'objet et (ii) les transformations de l'objet lui-même. On parle alors de transformations **passive** et **active**. Les transformations, actives ou passives, doivent être composables pour être physiquement recevables, elles possèdent alors nécessairement une structure de groupe.

La complémentarité de ces deux types de points de vue, actif et passif, se révèle dans le cadre d'une conception dialectique de la physique où ce ne sont plus l'espace, le temps et la matière qui sont les sujets d'étude, mais la relation entre un sujet observateur et un objet, dynamique ou statique, qui constitue le questionnement de la physique. Le physicien doit toujours garder à l'esprit l'origine des trois grandes ruptures épistémologiques du vingtième siècle, (i) la physique statistique ( $S = k_B \ln \Omega(E)$ ...), (ii) la mécanique quantique ( $H\Psi = E\Psi$ ...) et (iii) la relativité ( $E = Mc^2$ ...). C'est le questionnement et l'analyse de l'**acte de mesure** : (i) **impossibilité de la mesure** des  $10^{23}$  vitesses et positions au sens de Boltzmann, (ii) **incertitude de la mesure** de variables conjuguées au sens de Heisenberg et (iii) pertinence des **mesures simultanées** au sens d'Einstein, qui révéla les conceptions erronées de la physique classique et permit de dépasser les contradictions des modèles classiques pour résoudre ainsi les crises épistémologiques fondatrices de la fin du dix-neuvième siècle et du début du vingtième siècle.

Au-delà de la structure de **groupe de transformations**, l'étude des phénomènes physiques nécessite une certaine intimité avec les outils classiques de l'algèbre, de

la géométrie et de l'analyse. Historiquement, un grand nombre de ces concepts, algébriques, géométriques et analytiques, sont issus directement des problèmes posés par la mécanique analytique. On gardera toujours présent à l'esprit que généraliser une notion revient à s'affranchir de certains concepts posés consciemment a priori, ou induit inconsciemment à partir d'un sens primitif. Historiquement, la généralisation, à partir de la mécanique analytique, des outils de l'algèbre et de la géométrie élémentaires offre un exemple remarquable de cet affranchissement.

## 2 Variété des configurations

La première question qui doit être posée lorsque l'on aborde l'étude d'un système dynamique, est celle du nombre de degrés de liberté et de l'identification des paramètres de contrôle structurels du système. Les paramètres de contrôle ne sont pas des degrés de liberté, mais des variables de structure, et non de configuration, ajustables par l'opérateur extérieur. Les degrés de liberté déterminent la structure de l'espace des configurations. Ces questions sont en apparence simples mais se révèlent parfois subtiles. En particulier, la topologie de l'espace des configurations d'un système mécanique est une question importante.

Si nous considérons le pendule pesant, représenté sur la figure 1.1, il présente un degré de liberté unique, et l'espace des configurations  $V$  est le cercle : à chaque point du cercle correspond une configuration unique du pendule. La longueur du pendule constitue un paramètre de contrôle.

Si nous considérons un disque en translation suivant une direction, le nombre de degrés de liberté est aussi égal à un, mais la topologie de l'espace des configurations est celle de la droite réelle. Si une rotation autour d'un axe complète cette dynamique, l'espace des configurations  $V$  est un cylindre, représenté sur la figure 1.1.

Considérons à présent le pendule sphérique et le double pendule pesant, illustrés sur la figure 1.2. Ces deux systèmes sont décrits par deux variables réelles, mais dans un cas l'espace des configurations  $V$  est un tore, et dans l'autre une sphère, ces deux surfaces, représentées sur la figure 1.2, étant continûment irréductibles l'une à l'autre.

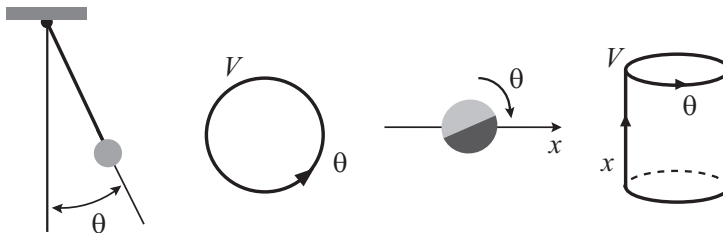


Figure 1.1 – Variété des configurations  $V$  du pendule pesant et d'un disque.

D'un point de vue mathématique la structure de l'espace des configurations présente toutes les propriétés d'une **variété différentiable** et l'on parle de la **variété des configurations**. À chaque point de la variété des configurations correspond un état statique du système. Pour étudier la dynamique il nous faut aussi considérer les vitesses généralisées, c'est-à-dire le taux de variation temporel des variables décrivant la variété des configurations. Techniquement, l'on construit ainsi le **fibré vectoriel tangent** associé à la variété des configurations et l'on double la dimension de la variété des états statiques (configurations) en considérant le fibré (configuration + vitesse).

L'espace des configurations et vitesses (moment canoniquement conjugué) est appelé **espace des phases**.

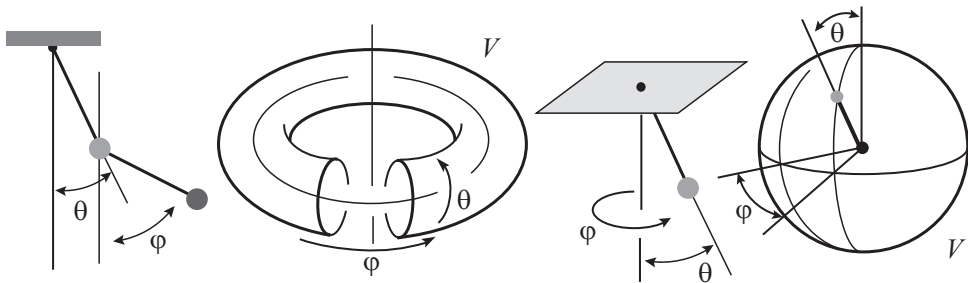


Figure 1.2 – Variété des configurations  $V$  des pendules double et sphérique.

La donnée d'un point dans l'espace des phases définit un état de configuration et de mouvement. Il va sans dire que position et vitesse sont des variables indépendantes, c'est un fait expérimental, nous pouvons fixer arbitrairement et indépendamment, à un instant donné, la position et la vitesse d'un point matériel.

### 3 Variations naturelles et virtuelles

La description dynamique d'un système peut être considérée (i) localement ou (ii) globalement.

Un point de vue **local** s'attachera à la construction d'un bilan d'évolution sur une durée infinitésimale et débouchera sur une formulation en termes d'équations différentielles. Un point de vue **global** embrassera orbite et hodographe dans leurs déploiements temporels sur une durée finie et débouchera sur une formulation en termes de propriétés d'une fonctionnelle associée à ces trajectoires. Lorsque cette propriété est constituée par l'occurrence d'un optimum, il s'agit d'un **principe variationnel**.

L'angle d'attaque du réel suivi par la mécanique analytique diffère radicalement de la posture cartésienne classique consistant à offrir un dévoilement analytique de l'essence simple de notre environnement physique au-delà de ses apparences complexes.

Dans le contexte de la mécanique analytique, nous imaginerons des **évolutions virtuelles** d'un système, évolutions non réalisées par la nature, et nous caractériserons l'**évolution réelle**, c'est-à-dire celle observée dans la nature, par une propriété d'extremum parmi l'infinité des virtualités imaginables.

C'est donc une **complexification spéculative** du réel, et non une **simplification**, qui permet de formuler les lois de la nature dans toutes leurs généralités. Le réel n'est pas donné, puis dévoilé dans sa simplicité ; il devient une réalisation particulière de l'infinité des possibles imaginables. C'est donc plus Leibniz que Descartes qui offre le fil directeur idéologique de la mécanique analytique.

Cette méthode, qui est reprise dans tous les domaines de la physique théorique, et qui diffère d'une simple modélisation associée à l'observation, nécessite donc l'introduction de **variations virtuelles des variables**, que nous noterons  $\delta$  pour les distinguer des **évolutions dynamiques naturelles** que nous noterons  $d$ .

Par exemple, cette formulation des lois de la nature en termes d'évolutions virtuelles est adoptée en thermodynamique classique où la fonction caractéristique entropie de Clausius  $S_C(U, V, N)$  est donnée, à l'équilibre, en fonction de l'énergie interne  $U$ , du volume  $V$  et du nombre de moles  $N$ . L'équilibre conforme au second principe est caractérisé par  $\delta S_C = 0$  (et non pas par  $dS_C = 0$ ). Les états virtuels d'entropie  $S_c \rightarrow S_c + \delta S_C$  étant des états de non-équilibre voisins de l'équilibre alors que les états impliqués dans une variation  $S_c \rightarrow S_c + dS_C$  sont des états d'équilibre, donc vérifiant tous  $\delta S_C = 0$ .

Soit  $\mathbf{q} = [q_1, q_2, q_3 \dots]$  les variables de description d'un système mécanique illustrées sur la figure 1.3, soit  $\mathbf{q}(t) = [q_1(t), q_2(t), q_3(t) \dots]$  son évolution temporelle naturelle au sein de la variété des configurations du système.

Introduisons des évolutions virtuelles  $\mathbf{q}(\alpha, t)$  paramétrées par  $\alpha \in \mathbb{R}$ . Le réel observable, conforme aux lois de la nature, est restreint à une valeur unique  $\alpha^* \in \mathbb{R}$ .

Le schéma de la figure 1.3, en suivant le circuit  $\mathbf{q}(\alpha^*, t) \rightarrow \mathbf{q}(\alpha^* + \delta\alpha, t) \rightarrow \mathbf{q}(\alpha^* + \delta\alpha, t + dt) \rightarrow \mathbf{q}(\alpha^*, t + dt)$  suivant deux parcours conduit directement à la propriété importante de commutativité des variations virtuelles infinitésimales et des évolutions dynamiques infinitésimales.

$$\delta\mathbf{q} + d\mathbf{q} + d\delta\mathbf{q} = d\mathbf{q} + \delta\mathbf{q} + \delta d\mathbf{q} \rightarrow \boxed{d\delta\mathbf{q} = \delta d\mathbf{q}} \quad (1.1)$$

Cette propriété sera redémontrée dans le chapitre consacré aux principe variationnels et nous sera utile lors de la formulation du **principe de Hamilton**.

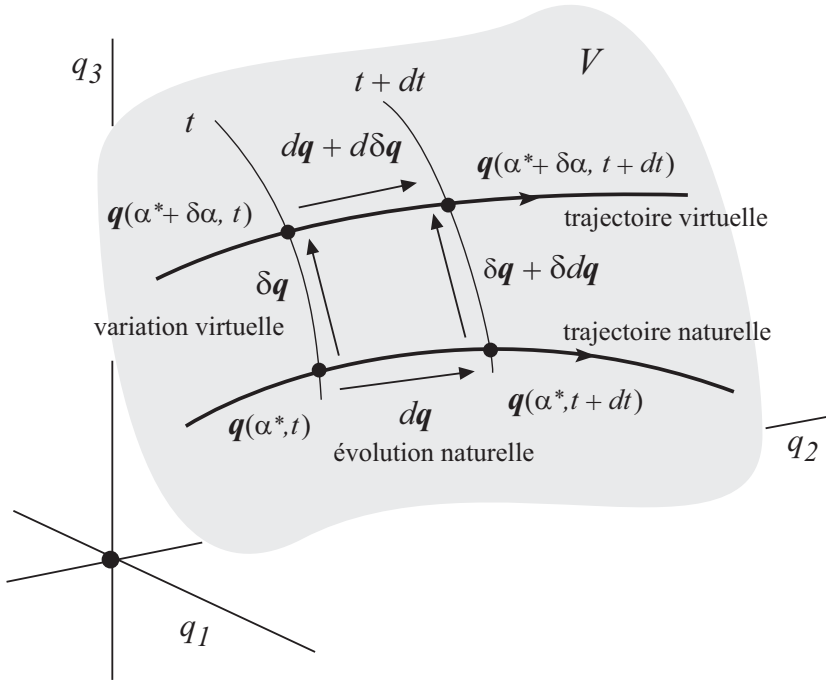


Figure 1.3 – Évolution naturelle  $d$  et variation virtuelle  $\delta$ .

## 4 Formulations variationnelles

Après s’être familiarisé avec le concept de **variations virtuelles** des variables, considérons la possibilité de reformuler les lois de la nature en termes d’extremum au regard de ces **variations virtuelles**.

Soit le problème linéaire classique de la physique théorique : (i) un opérateur différentiel linéaire  $\mathcal{L}(\partial/\partial\mathbf{x})$ , auto-adjoint et défini positif, par exemple  $\mathcal{L}(\partial/\partial\mathbf{x}) = -\partial^2/\partial\mathbf{x}^2 = -\Delta$ , (ii) une fonction réelle inconnue  $\psi(\mathbf{x})$  et (iii) une source réelle  $S(\mathbf{x})$  tels que :

$$\mathcal{L} \cdot \psi(\mathbf{x}) = S(\mathbf{x})$$

Si  $\mathcal{L}(\partial/\partial\mathbf{x}) = -\Delta$  nous avons à résoudre l’équation de Poisson. Introduisons les notations de Dirac, *bra* et *ket*, pour le produit scalaire

$$\langle \phi | \psi \rangle \equiv \int \phi(\mathbf{x}) \psi(\mathbf{x}) d\mathbf{x}$$

et formulons les propriétés de  $\mathcal{L}$  énoncées précédemment :

$$\text{Auto-adjoint} : \langle \phi | \mathcal{L} \cdot \psi \rangle = \langle \psi | \mathcal{L} \cdot \phi \rangle, \text{ Défini positif} : \langle \phi | \mathcal{L} \cdot \phi \rangle \geq 0$$

Pour résoudre en  $\psi$  le problème linéaire classique  $\mathcal{L} \cdot \psi = S$  construisons une formulation faible et considérons l’ensemble  $\{\phi^*\}$  des  $\phi$  telles que :

$$\langle \phi | \mathcal{L} | \phi \rangle = \langle \phi | S \rangle$$

L'ensemble  $\{\phi^*\}$  contient  $\psi$  tel que  $\mathcal{L} \cdot \psi = S$  et  $\psi$  est caractérisée par la propriété de maximum :

$$\text{Principe de maximum : } \forall \phi \in \{\phi^*\} \rightarrow \langle \phi | \mathcal{L} | \phi \rangle \leq \langle \psi | \mathcal{L} | \psi \rangle$$

En effet, soit  $\phi \in \{\phi^*\}$ , c'est-à-dire telle que  $\langle \phi | \mathcal{L} | \phi \rangle = \langle \phi | S \rangle$  et soit  $\psi$  telle que  $\mathcal{L} \cdot \psi = S$ .

$$0 \leq \langle \phi - \psi | \mathcal{L} | \phi - \psi \rangle = \langle \psi | \mathcal{L} | \psi \rangle + \langle \phi | \mathcal{L} | \phi \rangle - \langle \phi | \mathcal{L} | \psi \rangle - \langle \psi | \mathcal{L} | \phi \rangle$$

$$0 \leq \langle \psi | \mathcal{L} | \psi \rangle + \langle \phi | \mathcal{L} | \phi \rangle - 2 \langle \phi | S \rangle$$

$$0 \leq \langle \psi | \mathcal{L} | \psi \rangle - \langle \phi | \mathcal{L} | \phi \rangle$$

Cette propriété de maximum au sein de  $\{\phi^*\}$  est plus aisément manipulable si elle est formulée comme une propriété de minimum  $\forall \phi$ . Parmi tous les  $\phi$ ,  $\psi$  tel que  $\mathcal{L} \cdot \psi = S$  vérifie la propriété de minimum :

$$\text{Principe de minimum : } \mathcal{L} \cdot \psi(\mathbf{x}) = S(\mathbf{x}) \Leftrightarrow \frac{\langle \psi | \mathcal{L} | \psi \rangle}{\langle \psi | S \rangle^2} \leq \frac{\langle \phi | \mathcal{L} | \phi \rangle}{\langle \phi | S \rangle^2}, \forall \phi(\mathbf{x})$$

En effet,  $\forall \phi$  il est possible d'ajuster un coefficient  $\lambda = \langle \phi | S \rangle / \langle \phi | \mathcal{L} | \phi \rangle$  tel que,  $\langle \lambda \phi | \mathcal{L} | \lambda \phi \rangle = \langle \lambda \phi | S \rangle$ , alors  $\lambda \phi \in \{\phi^*\}$  et le principe de maximum précédent

$$\frac{1}{\langle \lambda \phi | \mathcal{L} | \lambda \phi \rangle} \geq \frac{1}{\langle \psi | \mathcal{L} | \psi \rangle} \rightarrow \frac{\langle \phi | \mathcal{L} | \phi \rangle}{\langle \phi | S \rangle^2} \geq \frac{\langle \psi | \mathcal{L} | \psi \rangle}{\langle \psi | S \rangle^2}$$

est alors invoqué pour conclure la démonstration. Réciproquement, vérifions que la recherche de l'extremum de  $\langle \phi | \mathcal{L} | \phi \rangle / \langle \phi | S \rangle^2$  conduit au problème linéaire classique  $\mathcal{L} \cdot \psi = S$ .

$$\text{Principe d'extremum : } \delta \left[ \frac{\langle \phi | \mathcal{L} | \phi \rangle}{\langle \phi | S \rangle^2} \right] \Big|_{\phi=\psi} = 0 \Leftrightarrow \mathcal{L} \cdot \psi(\mathbf{x}) = S(\mathbf{x}) \quad (1.2)$$

Considérons une variation virtuelle,  $\delta \phi(\mathbf{x})$ , petite et quelconque, puis évaluons la variation de  $\langle \phi | \mathcal{L} | \phi \rangle / \langle \phi | S \rangle^2$  suivant les règles du calcul infinitésimal.

$$\delta \left[ \frac{\langle \phi | \mathcal{L} | \phi \rangle}{\langle \phi | S \rangle^2} \right] = 2 \frac{\langle \delta \phi | \mathcal{L} | \phi \rangle}{\langle \phi | S \rangle^2} - 2 \frac{\langle \phi | \mathcal{L} | \phi \rangle \langle \delta \phi | S \rangle}{\langle \phi | S \rangle^3}$$

Le principe d'extremum,  $\forall \langle \delta \phi |$ , s'exprime alors suivant la relation :

$$\delta \left[ \langle \phi | \mathcal{L} | \phi \rangle \langle \phi | S \rangle^{-2} \right] \Big|_{\phi=\psi} = 0 \rightarrow \langle \psi | S \rangle \mathcal{L} \cdot \psi = \langle \psi | \mathcal{L} | \psi \rangle S$$

Ainsi, les extrema  $\delta \left[ \langle \phi | \mathcal{L} | \phi \rangle / \langle \phi | S \rangle^2 \right] = 0$  sont atteints lorsque  $\mathcal{L} \cdot \psi = \lambda S$  ou  $\lambda$  est une constante. En effet si  $\mathcal{L} \cdot \psi = \lambda S + \varepsilon$  où  $\langle \varepsilon | S \rangle = 0$  alors :

$$\langle \psi | S \rangle \varepsilon = \langle \psi | \varepsilon \rangle S \rightarrow \langle \varepsilon | S \rangle \neq 0$$

Ainsi  $\delta \left[ \langle \phi | \mathcal{L} | \phi \rangle / \langle \phi | S \rangle^2 \right] = 0$  extremum implique  $\mathcal{L} \cdot \psi = \lambda S$  en particulier pour  $\lambda = 1$  et, dans ce cas, et seulement dans ce cas,  $\langle \psi | \mathcal{L} | \psi \rangle / \langle \psi | S \rangle^2 = 1 / \langle \psi | \mathcal{L} | \psi \rangle$  dont nous savons que c'est un minimum si et seulement si  $\langle \psi | \mathcal{L} | \psi \rangle$  est maximum c'est-à-dire si et seulement si  $\mathcal{L} \cdot \psi = S$ . Ce principe de minimum (1.2) permet de



construire des solutions approchées de  $\mathcal{L} \cdot \psi = S$  en développant  $\psi$  sur une base restreinte,  $|\psi\rangle = \sum_i \lambda_i |\phi_i\rangle$ , les coefficients de ce développement étant ensuite évalués en recherchant les extrema de  $\langle \psi | \mathcal{L} | \psi \rangle \langle \psi | S \rangle^{-2}$  pour la solution ainsi paramétrée par un ensemble fini de réels  $\{\lambda_i\}$ .

## 5 Multiplicateurs de Lagrange, réciprocity, dualité

On gardera à l'esprit qu'il est légitime de considérer plusieurs inconnues supplémentaires pour un problème donné, pourvu que l'on établisse, dans le même temps, un nombre d'équations supplémentaires égal au nombre de nouvelles inconnues.

Considérons le problème dit des **extrema liés** par référence au problème des **extrema libres**. Soit une fonction réelle  $z$  de deux variables réelles  $x$  et  $y$  :  $z = f(x, y)$ . Recherchons le minimum, ou le maximum, de cette fonction sous une contrainte liant les deux variables  $x$  et  $y$  :  $F(x, y) = h$ . Cela signifie que les valeurs de  $z$  dans le plan  $(x, y)$  sont considérées et comparées uniquement le long de la courbe  $F(x, y) = h$ . Une image géométrique simple, représentée sur la figure 1.4, conduit alors à identifier les points où la courbe  $F(x, y) = h$  est tangente aux lignes de niveaux  $f(x, y) = z$ .

Sur la figure 1.4, le point  $D$  est un extremum libre et les points  $A$ ,  $B$  et  $C$  des extrema liés. Si la relation  $F(x, y) = h$  peut être résolue suivant  $y$ , il est alors possible de rechercher les extrema libres de la fonction  $z(x) = f(x, y(x))$  qui sont les extrema liés de la fonction  $z(x, y) = f(x, y)$ ; mais, en général, cette résolution explicite des contraintes est impossible.

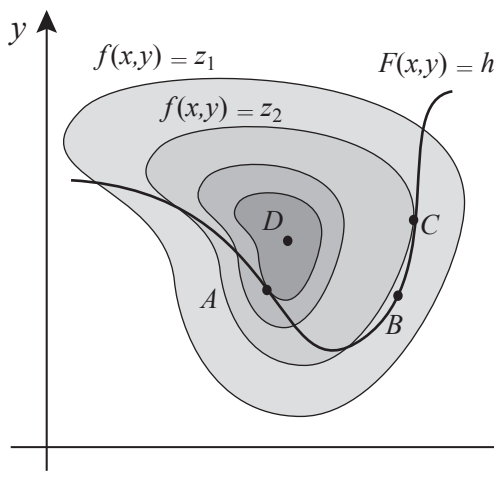


Figure 1.4 – Extrema libres ( $D$ ) de  $f$  et contraints ( $A, B, C$ ) par  $F$ .

Considérons néanmoins la relation  $z = f(x, y(x))$ , une condition nécessaire d'extremum est alors donnée par :

$$\frac{dz}{dx} = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{dy}{dx} = 0 \rightarrow \frac{dy}{dx} = -\frac{\partial f}{\partial x} / \frac{\partial f}{\partial y}$$

La différentiation de la contrainte  $F(x, y) = h$  conduit à la relation :

$$\frac{\partial F}{\partial x} dx + \frac{\partial F}{\partial y} dy = 0 \rightarrow \frac{dy}{dx} = -\frac{\partial F}{\partial x} / \frac{\partial F}{\partial y}$$

La condition nécessaire d'extremum est alors réalisée si :

$$\frac{\partial F}{\partial y} / \frac{\partial F}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial y} / \frac{\partial f}{\partial x}$$

Cette dernière relation traduit le fait que les courbes de niveaux de  $f$  sont tangentes à la courbe  $F$  aux points d'extrema liés. Soit  $\lambda$  la valeur des rapports de dérivées partielles au point d'extremum.

$$\lambda = \frac{\partial f}{\partial y} / \frac{\partial F}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial x} / \frac{\partial F}{\partial x} \rightarrow \frac{\partial f}{\partial x} - \lambda \frac{\partial F}{\partial x} = 0, \frac{\partial f}{\partial y} - \lambda \frac{\partial F}{\partial y} = 0$$

Introduisons la fonction  $g = f - \lambda(F - h)$  où le paramètre  $\lambda$  est un **multiplicateur de Lagrange** *a priori* inconnu. La condition d'extremum lié pour  $f$  devient ainsi une condition d'extremum libre pour  $g(x, y, \lambda)$ .

$$\frac{\partial g}{\partial \lambda} = 0, \frac{\partial g}{\partial x} = 0, \frac{\partial g}{\partial y} = 0$$

Le système ainsi obtenu :

$$F(x, y) - h = 0, \frac{\partial g}{\partial x} = 0, \frac{\partial g}{\partial y} = 0$$

constitue un système de trois équations à trois inconnues, permettant de déterminer le multiplicateur de Lagrange  $\lambda$  et les positions des extrema liés. Soit  $x^*$  et  $y^*$  la solution de ce système et  $z^* = f(x^*, y^*)$ , ces trois nombres sont fonctions de  $h$ . D'une part la variation de  $z^*$  suivant  $h$  est donnée par :

$$\frac{dz^*}{dh} = \frac{\partial f}{\partial x} \frac{dx^*}{dh} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{dy^*}{dh}$$

et, d'autre part :

$$\frac{\partial F}{\partial x} \frac{dx^*}{dh} + \frac{\partial F}{\partial y} \frac{dy^*}{dh} = 1 \rightarrow \frac{dz^*}{dh} = \lambda \frac{\partial F}{\partial x} \frac{dx^*}{dh} + \lambda \frac{\partial F}{\partial y} \frac{dy^*}{dh} = \lambda$$

Le multiplicateur de Lagrange  $\lambda$  est donc égal au taux de variation de la valeur de l'extremum lié lorsque la contrainte  $h$  varie.

Dans le cas de  $n$  variables indépendantes  $q_i$  considérons une fonction  $f(q_1, q_2, q_3, \dots, q_{n-1}, q_n)$  dont nous recherchons les extrema caractérisés par la relation

$$\delta f = \frac{\partial f}{\partial q_1} \delta q_1 + \frac{\partial f}{\partial q_2} \delta q_2 + \dots + \frac{\partial f}{\partial q_n} \delta q_n = 0$$

mais restreignons la recherche à une sous-variété de  $(q_1, q_2, q_3, \dots, q_{n-1}, q_n)$  à travers la contrainte :  $F(q_1, q_2, q_3, \dots, q_{n-1}, q_n) = 0$  qui conduit à la relation

$$\delta F = \frac{\partial F}{\partial q_1} \delta q_1 + \frac{\partial F}{\partial q_2} \delta q_2 + \dots + \frac{\partial F}{\partial q_n} \delta q_n = 0.$$

On notera que la relation  $\delta F = 0$  est une relation plus faible que  $F = 0$ . Plutôt que de tenter une élimination algébrique directe, introduisons une fonction,  $\lambda(q_1, q_2, q_3, \dots, q_{n-1}, q_n)$ , le **multiplicateur de Lagrange**.

La recherche des extrema contraints [ $\delta f = 0, \delta F = 0$ ] conduit au principe variationnel  $\delta f - \lambda \delta F = 0$ , c'est-à-dire :

$$\sum_{i=1}^{i=n} \left( \frac{\partial f}{\partial q_i} + \lambda \frac{\partial F}{\partial q_i} \right) \delta q_i = 0 \tag{1.3}$$

Les  $(q_1, q_2, q_3, \dots, q_{n-1}, q_n)$  étant des variables dépendantes ( $F = 0$ ) nous ne pouvons rien conclure quant aux valeurs des  $n$  termes de cette somme (1.3). Pour travailler sur des variables indépendantes, éliminons, par exemple,  $q_n$  en précisant le choix de  $\lambda$  par la relation

$$\frac{\partial f}{\partial q_n} + \lambda \frac{\partial F}{\partial q_n} = 0 \tag{1.4}$$

La relation (1.3) est restreinte à  $n - 1$  variables indépendantes  $(q_1, \dots, q_{n-1})$ .

$$\sum_{i=1}^{i=n-1} \left( \frac{\partial f}{\partial q_i} + \lambda \frac{\partial F}{\partial q_i} \right) \delta q_i = 0$$

Chaque facteur de cette somme doit être nul suivant les  $n - 1$  relations (1.5).

$$\frac{\partial f}{\partial q_i} + \lambda \frac{\partial F}{\partial q_i} \Big|_{i=1, \dots, i=n-1} = 0 \tag{1.5}$$

Nous avons ainsi obtenu  $n$  relations (1.5) et (1.4) :

$$\frac{\partial f}{\partial q_i} + \lambda \frac{\partial F}{\partial q_i} \Big|_{i=1, \dots, i=n} = 0$$

comme conséquences de  $\delta f = 0$  et  $\delta F = 0$ . On note finalement que les relations  $\delta f - \lambda \delta F = 0$  et  $\delta(f - \lambda F)$  sont équivalentes car  $F = 0$

$$\delta(f - \lambda F) = \delta f - F \delta \lambda - \lambda \delta F = 0 \rightarrow \delta f - \lambda \delta F = 0$$

L'on formule donc le problème [ $\delta f = 0, F = 0$ ] suivant  $\delta(f - \lambda F) = 0$ , la relation  $\delta(f - \lambda F) = 0$  est un système de  $n + 1$  équations à  $n + 1$  inconnues, la solution  $(q_1^*, q_2^*, q_3^*, \dots, q_{n-1}^*, q_n^*)$  des  $n$  équations  $\partial(f - \lambda F) / \partial q_i = 0$  est paramétrée par le multiplicateur

$\lambda$  et ce multiplicateur est déterminé par la relation  $\partial(f - \lambda F)/\partial\lambda = 0 \rightarrow F[q_1^*(\lambda), q_2^*(\lambda), \dots, q_{n-1}^*(\lambda), q_n^*(\lambda)] = 0$ , nous avons bien les  $n + 1$  solutions pour les  $n + 1$  inconnues.

Les extrema contraints, très communs en physique, conduisent à identifier deux principes de **dualité** et de **réciprocité**.

Par exemple, le second principe de la thermodynamique énonce que l'équilibre est associé au maximum de l'entropie à énergie interne donnée, nous pourrions aussi énoncer le minimum de l'énergie interne à entropie donnée ; mais, la contrainte de constance de l'entropie est plus difficile à réaliser que la constance de l'énergie interne, cette dernière n'étant autre que le premier principe.

De façon similaire, le cercle présente le plus petit périmètre  $L$  réalisable pour une aire  $A$  donnée, alors le disque offre la plus grande aire  $A$  possible pour un périmètre  $L$  donné.

$$\delta A|_{\delta L=0} = 0 \Leftrightarrow \delta L|_{\delta A=0} = 0$$

La mécanique analytique étant construite autour de principes d'extremum, il n'est pas inutile de considérer ces types de dualités associées aux principes d'extremum. Soit  $S$  et  $T$  deux observables associées à un système, c'est-à-dire des fonctions des variables du système, l'identification d'un extremum  $S_0$  de  $S$  pour  $T = T_0$  fixé tel que  $\delta T = 0$ , peut être formulée sur la base d'un multiplicateur de Lagrange  $\lambda$  et d'un principe de variations virtuelles.

$$\delta S|_{\delta T=0} = 0 \rightarrow \delta(S - \lambda T) = 0 \rightarrow (T = T_0 \rightarrow S = S_0)$$

L'écriture de cette condition peut être interprétée en termes d'extremum  $T_0$  de  $T$  à  $S = S_0$  donnée tel que  $\delta S = 0$ .

$$\delta T|_{\delta S=0} = 0 \rightarrow \delta(S - \lambda T) = 0 \rightarrow (S = S_0 \rightarrow T = T_0)$$

Cette propriété des extremum contraints est appelée **réciprocité**. Par exemple, le **principe de Fermat** est un principe de temps extremum à action fixe et le **principe de Hamilton**, est un principe d'action extremum à temps fixé.

Considérons quatre observables  $W, S, T$  et  $E$ , c'est-à-dire des fonctions des variables du système, telles que  $W - S = TE$ , les variations, virtuelles ou naturelles, sont alors liées par la relation :

$$W - S = TE \rightarrow \delta W - T\delta E = \delta S + E\delta T$$

Énonçons un principe d'extremum de  $W$  à  $E$  fixé, il se traduit alors par un principe d'extremum de  $S$  à  $T$  fixé et réciproquement.

$$\begin{aligned} \delta W|_{\delta E=0} &= 0 \rightarrow \delta S + E\delta T = 0 \rightarrow \delta S|_{\delta T=0} = 0 \\ \delta S|_{\delta T=0} &= 0 \rightarrow \delta W - T\delta E = 0 \rightarrow \delta W|_{\delta E=0} = 0 \end{aligned}$$

Nous avons ainsi identifié les principes de réciprocité et de dualité des extremum contraints.

$$\text{Réciprocité} : \boxed{\delta S|_{\delta T=0} = 0 \Leftrightarrow \delta T|_{\delta S=0} = 0}$$

$$\text{Dualité} : W - S = TE \rightarrow \boxed{\delta W|_{\delta E=0} = 0 \Leftrightarrow \delta S|_{\delta T=0} = 0}$$

La réciprocité et la dualité des extremum liés constituent un arrière-plan transverse à toute la physique théorique, qui en général doit être complétée par une analyse physique de leurs significations. En particulier la relation  $W - S = TE$  traduit la dualité par **transformée de Legendre**, présentée dans l'annexe F, entre  $W$  et  $S$ , si  $T$  et  $E$  sont leurs variables conjuguées.

## 6 Couplages gyroscopiques et dissipatifs

Trois grandes classifications des interactions peuvent être construite, elles offrent trois points de vue complémentaires.

D'un point de vue **fondamental**, il est nécessaire de distinguer :

- les interactions **électrofaibles**,
- les interactions **fortes**,
- les interactions **gravitationnelles**.

D'un point de vue **phénoménologique**, il est utile de distinguer :

- les forces **à distance**, électrique, magnétique et gravitationnelle,
- les forces **de contact**, par exemple réaction, friction et tension,
- les forces **d'inertie**, d'Euler, de Coriolis et centrifuge.

D'un point de vue **méthodologique**, il est impératif de distinguer :

- les couplages **potentiels** où la force dérive d'un potentiel  $U(\mathbf{r}, t)$ ,
- les couplages **gyroscopiques** où la force dérive d'un pseudo-potentiel  $V(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t)$ ,
- les couplages **dissipatifs** décrivant l'interaction entre un grand nombre de degrés de liberté, non traités dans le problème (résultant en une production d'entropie positive) et le système considéré.

C'est ce point de vue méthodologique qui est adopté ici. Une force  $\mathbf{F}$  dérive d'un potentiel s'il existe une fonction scalaire  $U(\mathbf{r}, t)$  dérivable telle que :

$$\text{Potentiel} : U(\mathbf{r}, t) \rightarrow \mathbf{F} = -\frac{\partial U}{\partial \mathbf{r}} = -\frac{\partial U}{\partial x} \mathbf{e}_x - \frac{\partial U}{\partial y} \mathbf{e}_y - \frac{\partial U}{\partial z} \mathbf{e}_z$$

Une force  $\mathbf{F}$  décrit un *couplage gyroscopique* si s'il existe une fonction scalaire  $V(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t)$  dérivable telle que :

$$\text{Gyroscopique} : V(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) \rightarrow \mathbf{F} = \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial V}{\partial \mathbf{v}} \right) - \frac{\partial V}{\partial \mathbf{r}}$$

Considérons un premier exemple : le potentiel vecteur magnétique  $\mathbf{A}(\mathbf{r}, t)$  et le potentiel gyroscopique associé  $V(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) = -e\mathbf{v} \cdot \mathbf{A}(\mathbf{r}, t)$ . La relation :  $\nabla(\mathbf{U} \cdot \mathbf{V}) = \mathbf{U} \times (\nabla \times \mathbf{V}) + \mathbf{V} \times (\nabla \times \mathbf{U}) + (\mathbf{U} \cdot \nabla)\mathbf{V} + (\mathbf{V} \cdot \nabla)\mathbf{U}$  conduit à l'expression classique de la force de Laplace et de la force de Coulomb.

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial V}{\partial \mathbf{v}} \right) - \frac{\partial V}{\partial \mathbf{r}} = e\mathbf{v} \times \underbrace{(\nabla \times \mathbf{A})}_{\text{champ magnétique}} - e \underbrace{\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}}_{\text{champ électrique}}$$

Considérons un deuxième exemple : le vecteur rotation  $\boldsymbol{\Omega}$  associé à un référentiel non inertiel et le potentiel gyroscopique  $V(\mathbf{r}, \mathbf{v}) = -m\mathbf{v} \cdot (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r})$  qui conduit à la force de Coriolis :  $\mathbf{F} = -2m\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{v}$ .

Une force  $\mathbf{F}$  décrit une dissipation, dites de Rayleigh, s'il existe une fonction scalaire dérivable  $R(\mathbf{v}, t)$  telle que :

$$\text{Dissipatif} : R(\mathbf{v}, t) \rightarrow \mathbf{F} = \frac{\partial R}{\partial \mathbf{v}} = \frac{\partial R}{\partial v_x} \mathbf{e}_x + \frac{\partial R}{\partial v_y} \mathbf{e}_y + \frac{\partial R}{\partial v_z} \mathbf{e}_z$$

Ce type de force décrit un couplage à un grand nombre de degrés de liberté, ce couplage étant traité dans le cadre d'une approximation markovienne.

La classification en termes de couplages potentiel, gyroscopique ou dissipatif constitue une distinction de nature physique. Il existe un autre schéma de classification des systèmes mécaniques en catégories héritées de la mécanique des solides dont nous rappelons ici brièvement les principes. Un système mécanique peut être : (i) scléronome ou rhéonome, (ii) conservatif ou non conservatif et (iii) holonome ou non holonome.

La configuration d'un système scléronome est donnée par un ensemble de coordonnées généralisées  $(q_1, q_2 \dots q_n)$ . La configuration d'un système rhéonome nécessite aussi la donnée du temps  $t$  car les contraintes (paramètres de contrôle) sont variables. Un système conservatif est un système dont la dynamique est déterminée par la donnée de couplages du type  $U(\mathbf{r})$  et  $V(\mathbf{r}, \mathbf{v})$ , les autres systèmes étant non conservatifs. Pour un système holonome les contraintes ne dépendent que des coordonnées généralisées  $(q_1, q_2 \dots q_n)$ , les autres systèmes sont non holonomes. Les systèmes conservatifs présentant les propriétés de scléronomie et d'holonomie sont appelés systèmes simples. Ce cours de mécanique analytique est dédié principalement aux systèmes simples, qui se révèlent souvent complexes. La plupart des systèmes simples, au-delà de la dimension deux, présentent par exemple un régime chaotique.

## 7 Couplage champs-particule

Le couplage gyroscopique  $-e\mathbf{v} \cdot \mathbf{A}$ , qui nous permettra de décrire l'interaction électromagnétique dans le cadre lagrangien, peut être déduit d'une analyse des énergies cinétiques et potentielles des champs et particules.

Considérons une particule chargée de charge  $e$ , cette particule de position  $\mathbf{r}(t)$  et de vitesse  $\mathbf{v}(t)$  est la source d'un champ électromagnétique  $[\mathbf{E}', \mathbf{B}']$  solution des équations de Maxwell-Gauss et Maxwell-Ampère :

$$\nabla \cdot \mathbf{E}' = \frac{e}{\varepsilon_0} \delta[\mathbf{r} - \mathbf{r}(t)] \quad (1.6)$$

$$\nabla \times \mathbf{B}' = \mu_0 e \mathbf{v}(t) \delta[\mathbf{r} - \mathbf{r}(t)] + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}'}{\partial t} \quad (1.7)$$

où  $\delta$  est la distribution de Dirac. Cette particule chargée est aussi soumise à un champ électromagnétique  $[\mathbf{E}, \mathbf{B}]$  contrôlé par des sources données, extérieures, et décrit par les potentiels vecteur et scalaire  $[\mathbf{A}, \Phi]$  tels que :

$$\text{Champs extérieurs : } \mathbf{E} = -\nabla\Phi - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}, \mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$$

Ainsi, cette configuration de champs présente un contenu énergétique donné par les relations classiques de sommation en volume  $dV$  des densités volumiques d'énergies :

$$\text{Électrique : } \frac{\varepsilon_0}{2} \iiint (\mathbf{E} + \mathbf{E}')^2 dV, \text{ Magnétique : } \frac{1}{2\mu_0} \iiint (\mathbf{B} + \mathbf{B}')^2 dV$$

Définissons  $T$  l'énergie cinétique de ce système, c'est-à-dire l'énergie liée aux mouvements de la particule et des sources et  $U$  l'énergie potentielle, c'est-à-dire l'énergie liée à la configuration spatiale de la particule et des sources.

Anticipons sur le chapitre suivant et définissons le lagrangien  $L$  comme la différence entre énergies cinétique et potentielle :

$$L = T - U = \frac{1}{2} m \mathbf{v}^2 + \mu_0^{-1} \iiint \mathbf{B} \cdot \mathbf{B}' dV - \varepsilon_0 \iiint \mathbf{E} \cdot \mathbf{E}' dV$$

où nous avons uniquement considéré les énergies d'interaction particule-sources extérieures du champ, les autres termes étant des énergies cinétique et potentielle propres des champs et de la particule qui n'influencent pas le couplage.

Le terme de couplage potentiel particule-sources extérieures peut être réécrit

$$\iiint \mathbf{E} \cdot \mathbf{E}' dV = - \iiint dV \nabla \Phi \cdot \mathbf{E}' + \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \cdot \mathbf{E}' = \frac{e}{\varepsilon_0} \Phi[\mathbf{r}(t)] - \iiint dV \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \cdot \mathbf{E}'$$

où nous avons utilisé la formule exprimant la divergence du produit d'une fonction scalaire  $f$  par un champ vectoriel  $\mathbf{U}$ ,

$$\nabla f \cdot \mathbf{U} = \nabla \cdot (f\mathbf{U}) - f \nabla \cdot \mathbf{U}$$

la relation (1.6), puis le théorème d'Ostrogradski pour une surface à l'infini.

Le terme de couplage cinétique particule-sources extérieurs peut être réécrit

$$\iiint \mathbf{B} \cdot \mathbf{B}' dV = \iiint \nabla \times \mathbf{A} \cdot \mathbf{B}' dV = \mu_0 e \mathbf{v} \cdot \mathbf{A} [\mathbf{r}(t)] + \iiint \mu_0 \varepsilon_0 \mathbf{A} \cdot \frac{\partial \mathbf{E}'}{\partial t} dV$$

où nous avons utilisé la formule exprimant la divergence du produit vectoriel de deux champs de vecteurs  $\mathbf{U}$  et  $\mathbf{V}$ ,

$$\nabla \times \mathbf{U} \cdot \mathbf{V} = \nabla \cdot (\mathbf{U} \times \mathbf{V}) + \mathbf{U} \cdot \nabla \times \mathbf{V}$$

la relation (1.7), puis le théorème d'Ostrogradski pour une surface à l'infini.

Ainsi le couplage gyroscopique  $e \mathbf{v} \cdot \mathbf{A}$  et le couplage potentiel  $e \Phi$  sont identifiés.

$$\boxed{L = T - U = \frac{1}{2} m \mathbf{v}^2 + e \mathbf{v} \cdot \mathbf{A} - e \Phi + \varepsilon_0 \frac{d}{dt} \iiint (\mathbf{A} \cdot \mathbf{E}') dV} \quad (1.8)$$

Nous verrons dans le chapitre suivant, (5.1), que le dernier terme ( $d/dt \iiint \dots$ ) de cette expression de  $L = T - U$  est sans effet dynamique car il est constitué par une dérivée totale par rapport au temps.



# Les points clés du chapitre

- 1 Les lois d'évolution, dans l'espace et suivant le temps, d'un système mécanique de points matériels, peuvent être formulées et étudiées suivant trois formalismes, (i) le cadre **newtonien** construit autour des concepts de forces et couples, (ii) le cadre **lagrangien** construit sur la base du lagrangien exprimant les couplages des différents degrés de liberté, et (iii) le cadre **hamiltonien** construit à partir de l'identification de l'hamiltonien. La mécanique lagrangienne et la mécanique hamiltonienne constituent la mécanique analytique.
- 2 La trajectoire d'un système de points matériels dans l'espace des configurations est l'**orbite**, la trajectoire d'un système de points matériels dans l'espace des vitesses est l'**hodographe**. Positions et vitesses sont des variables indépendantes.
- 3 Une manière élégante et efficace de formuler les lois de la nature est de construire des principes d'extremum : les évolutions (ou équilibres) naturelles sont alors identifiées comme rendant extremum une certaine quantité fonctionnelle lorsque ces évolutions (ou équilibres) naturelles sont comparées à des évolutions (ou équilibres) virtuelles non réalisées par la nature mais imaginées par le physicien.
- 4 La formulation des principes d'extremum implique de concevoir des variations virtuelles, c'est-à-dire non naturelles, des variables et lorsque ces variations sont contraintes, la technique des **multiplicateurs de Lagrange** permet de construire un principe variationnel adapté.
- 5 Trois types de couplages doivent être considérés en mécanique : (i) **potentiel**, (ii) **gyroscopique** et (iii) **dissipatifs**. Le couplage électromagnétique entre un champ et une particule est décrit par un couplage potentiel électrique et un couplage gyroscopique magnétique  $e\mathbf{v} \cdot \mathbf{A}$  où  $e$  est la charge,  $\mathbf{v}$  la vitesse et  $\mathbf{A}$  le potentiel vecteur.