

Mécanique pour l'ingénieur

Milieux continus solides et fluides

Systemes multicorps

Structures

Guillaume Puel

Ann-Lenaig Hamon

DUNOD

Crédits images et photos : 36. Wikimedia Commons / McSush / CC-BY-SA-3.0 – 57. Wikimedia Commons / Nordelch / CC-BY-SA-3.0 – 77. Wikimedia Commons / Sigmund / CCBY- SA-3.0 – 77. Wikimedia Commons / Sigmund / CC-BY-SA-3.0 et Wikimedia Commons / CTho / CC-BY-SA-3.0 – 78. Wikimedia Commons / Cdang / CC-BY-SA-3.0 – 78. Wikimedia Commons / Aboalbiss / CC-BY-SA-3.0 et Wikimedia Commons / Sigmund / CC-BYSA- 3.0 – 88. Wikimedia Commons / Betienne / CC-BY-SA-3.0 – 201. Wikimedia Commons / Nimur / CC-BY-SA-3.0 – 246. <https://grabcad.com/library/manfrotto-494rc2-tripod-head> – 247. <https://grabcad.com/library/ball-bearing-30> – 247. <https://grabcad.com/library/ball-caster> – 248. <https://grabcad.com/library/roller-conveyor-4> – 249. <https://grabcad.com/library/hydrauliccylinder-24> – 250. <https://grabcad.com/library/scooter-ski-1> – 250. <https://grabcad.com/library/hinge-2-1> – 251. <https://grabcad.com/library/linear-slider> – 252. <https://grabcad.com/library/universalcoupling-33> – 252. <https://grabcad.com/library/ball-screw-nut-1> – 258. Wikimedia Commons / Lookang / CC-BY-SA-3.0 – 264. <https://grabcad.com/library/sten-mkii-barrel-bushing-1> – 296, 303 et 304. Images aimablement fournies par François Hild et Damien Claire. – 340. Wikimedia Commons / UKgeofan / CC-BY-SA-3.0 – 341. Wikimedia Commons / K800i / CC-BY-SA-3.0 – 342. Wikimedia Commons / Roulex45 / CC-BY-SA-3.0 – 369. Wikimedia Commons / National Park Service (États-Unis) – 385. <https://www.lymanproducts.com/brands/trius/trius-birdshooter-2> – 391. Wikimedia Commons / Volpe National Transportation Systems Center (USA) – 395. Wikimedia Commons / Saint Martin / CC-BY-SA-3.0. *Style LATEX inspiré de <http://www.latextemplates.com>*

<p>Le pictogramme qui figure ci-contre mérite une explication. Son objet est d'alerter le lecteur sur la menace que représente pour l'avenir de l'écrit, particulièrement dans le domaine de l'édition technique et universitaire, le développement massif du photocopillage.</p> <p>Le Code de la propriété intellectuelle du 1^{er} juillet 1992 interdit en effet expressément la photocopie à usage collectif sans autorisation des ayants droit. Or, cette pratique s'est généralisée dans les établissements</p>	<p>d'enseignement supérieur, provoquant une baisse brutale des achats de livres et de revues, au point que la possibilité même pour les auteurs de créer des œuvres nouvelles et de les faire éditer correctement est aujourd'hui menacée.</p> <p>Nous rappelons donc que toute reproduction, partielle ou totale, de la présente publication est interdite sans autorisation de l'auteur, de son éditeur ou du Centre français d'exploitation du droit de copie (CFC, 20, rue des Grands-Augustins, 75006 Paris).</p>
	

© Dunod, 2021

11 rue Paul Bert, 92240 Malakoff

www.dunod.com

ISBN 978-2-10-080666-9

Le Code de la propriété intellectuelle n'autorisant, aux termes de l'article L. 122-5, 2^o et 3^o a), d'une part, que les « copies ou reproductions strictement réservées à l'usage privé du copiste et non destinées à une utilisation collective » et, d'autre part, que les analyses et les courtes citations dans un but d'exemple et d'illustration, « toute représentation ou reproduction intégrale ou partielle faite sans le consentement de l'auteur ou de ses ayants droit ou ayants cause est illicite » (art. L. 122-4).

Cette représentation ou reproduction, par quelque procédé que ce soit, constituerait donc une contrefaçon sanctionnée par les articles L. 335-2 et suivants du Code de la propriété intellectuelle.

Avant-propos

Cet ouvrage reprend le cours enseigné par Denis Aubry à des promotions de cinq cents élèves de première année de l'École centrale Paris pendant une douzaine d'années, puis adapté par Guillaume Puel.

S'adressant à des élèves ingénieurs généralistes aux aspirations diverses, il a pour objectif de présenter en un seul volume les éléments de mécanique des milieux continus étendus aux fluides, solides indéformables et structures élancées. Les bases modernes théoriques de cette discipline sont présentées tout en proposant un nombre significatif d'exemples et exercices d'application qui permettent de maîtriser la résolution des problèmes mais aussi d'illustrer les grandeurs physiques pertinentes.

Le niveau requis est celui d'une fin de licence d'université ou d'une première année d'école d'ingénieurs. Les concepts physiques et mathématiques sont directement définis lors de leur apparition et sont complétés par deux annexes consultables en ligne sur le site de l'éditeur. Celles-ci regroupent les propriétés importantes de l'algèbre et de l'analyse des tenseurs en dimension 3.

Le calcul tensoriel est dédramatisé en s'appuyant sur l'approche moderne intrinsèque qui évite la fameuse pléthore d'indices. Les étudiants peuvent ainsi passer d'un système de coordonnées à l'autre sans avoir nécessairement recours à de volumineux formulaires.

Chaque chapitre commence avec une motivation précise et présente de façon hiérarchisée les éléments et illustrations nécessaires à l'appropriation des différentes notions, qui sont mises en valeur au travers de résumés synthétiques.

Le chapitre sur la mécanique des fluides a pour but de jeter un pont avec les cours classiques de cette discipline, en montrant en particulier comment l'approche eulérienne introduit les accélérations de convection et les vitesses de déformation.

La présentation détaillée des grandes rotations en dimension 3 permet de traiter la dynamique des solides indéformables comme une application de la mécanique des milieux continus via une cinématique restreinte. L'équation d'Euler des solides indéformables en mouvement quelconque apparaît de manière très compacte et efficace, tout comme le tenseur d'inertie et la vitesse de rotation. Ceci permet de rester en référentiel absolu, évitant ainsi la multiplication des référentiels relatifs.

Enfin les structures élancées comme les poutres droites en dimension 3 sont traitées via une approche qui permet de profiter des concepts introduits précédemment, et en particulier la rotation des sections transverses. Les problèmes de structures « multi-poutres » (treillis, portiques...) et leur résolution efficace sont également abordés. L'ouvrage se termine par le traitement de problèmes plus avancés, qui reposent sur l'ensemble des concepts de l'ouvrage (poutres en référentiel tournant, poutres composites, flambement).

Guillaume Puel et Ann-Lenaig Hamon
Gif-sur-Yvette, septembre 2020

Cet ouvrage est structuré de façon à hiérarchiser efficacement les notions et illustrations qu'il présente ; la mise en forme des différents éléments qui le constituent est détaillée ci-dessous. En outre, une table des matières et un index permettent d'accéder directement à la notion recherchée. Enfin, deux annexes introduisant les différents outils mathématiques utilisés sont disponibles en ligne sur le site de l'éditeur.

COMMENT LIRE CET OUVRAGE ?

Le corps du texte permet une présentation argumentée et logique des différentes notions relatives à la Mécanique, ainsi que des raisonnements de base permettant de résoudre les problèmes rencontrés : c'est le niveau de lecture conseillé pour une bonne appropriation de la discipline.

Définitions. Les définitions décrivent les différentes notions qui permettent de poser correctement un problème, tout en introduisant le vocabulaire adapté au domaine de la Mécanique.

Résumé 0.1 — Principe. Les résumés rappellent de façon synthétique les éléments de base nécessaires à la compréhension et la résolution des problèmes rencontrés en Mécanique.

Exemple 0.1 — Illustrations et applications. Les exemples servent d'appuis pratiques à la compréhension des notions et concepts présentés dans l'ouvrage, et permettent d'illustrer l'utilisation des outils de la Mécanique à divers domaines d'application ; ils peuvent être sautés en première lecture. ■



Les points d'attention soulignent les erreurs ou confusions classiques à éviter absolument ; ils contribuent à une compréhension plus fine des notions abordées.



Les remarques permettent de donner quelques éléments d'approfondissement ou d'ouverture qui complètent le cadre exposé dans cet ouvrage.

Nous avons choisi d'utiliser, dans cet ouvrage, un formalisme unifié pour les trois grandes parties abordées : mécanique des milieux continus, dynamique des solides indéformables, mécanique des structures. Ce formalisme, basé sur la représentation intrinsèque des vecteurs et des matrices, fait appel aux notations suivantes.

QUELLES NOTATIONS ?

Vecteurs

Les vecteurs de l'espace sont notés en gras : \mathbf{a} , de composantes scalaires a_m (avec $1 \leq m \leq 3$) dans une base $(\mathbf{i}_1, \mathbf{i}_2, \mathbf{i}_3)$ de l'espace. On utilisera alors les principales notations :

- $\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle$ pour le produit scalaire de deux vecteurs \mathbf{a} et \mathbf{b} ;
- $\|\mathbf{a}\|$ pour la norme d'un vecteur \mathbf{a} ;
- $\mathbf{a} \wedge \mathbf{b}$ pour le produit vectoriel de deux vecteurs \mathbf{a} et \mathbf{b} .

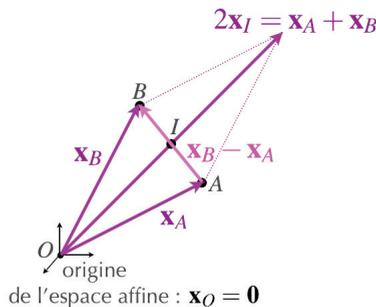
Plus de précisions sur les définitions mathématiques de ces notions pourront être trouvées dans l'annexe A.1.1 (en ligne).

Points

Les points de l'espace, désignés par des lettres majuscules, sont considérés par l'intermédiaire de leurs vecteurs positions : on associe ainsi au point A le vecteur position \mathbf{x}_A . Ainsi :

- $\mathbf{x}_B - \mathbf{x}_A$ désigne le vecteur qui relie un point A à un point B ;
- l'origine O de l'espace vérifie $\mathbf{x}_O = \mathbf{0}$;
- le milieu I du segment $[AB]$ est tel que $\mathbf{x}_I = (\mathbf{x}_A + \mathbf{x}_B)/2$.

Par souci de simplification, on notera \mathbf{x} le vecteur position associé au point courant M .



Matrices (ou tenseurs d'ordre deux)

Les matrices sont notées avec des lettres doubles : \mathbb{A} , de composantes scalaires A_{mn} (avec $1 \leq m, n \leq 3$) dans une base $(\mathbf{i}_1, \mathbf{i}_2, \mathbf{i}_3)$ de l'espace. On désigne alors :

- $\mathbb{A}\mathbf{a}$ le produit d'une matrice \mathbb{A} par un vecteur \mathbf{a} ;
- $\mathbb{A}\mathbb{B}$ le produit de deux matrices \mathbb{A} et \mathbb{B} ;
- \mathbb{A}^T la transposée d'une matrice \mathbb{A} ;
- \mathbb{A}^{-1} l'inverse d'une matrice \mathbb{A} .

Plus de précisions sur les définitions mathématiques de ces notions pourront être trouvées dans l'annexe A.2.1 (en ligne).

Table des matières

I	Mécanique des milieux continus	
1	Déformations	5
1.1	Description lagrangienne du mouvement	5
1.1.1	<i>Formulation générique</i>	5
1.1.2	<i>Vitesse et accélération matérielles</i>	9
1.2	Déformation d'un milieu continu	11
1.2.1	<i>Tenseur gradient de la transformation</i>	11
1.2.2	<i>Tenseur des déformations de Green-Lagrange</i>	17
1.3	Tenseur des petites déformations	25
1.3.1	<i>Hypothèse des petites perturbations</i>	25
1.3.2	<i>Définition et propriétés</i>	26
1.3.3	<i>Étude des petites perturbations locales</i>	31
1.4	Variation de volume et conservation de la masse	36
1.4.1	<i>Variation de volume</i>	36
1.4.2	<i>Conservation de la masse</i>	40
2	Contraintes	41
2.1	Relations fondamentales de la dynamique	41
2.1.1	<i>Conservation de la quantité de mouvement et du moment cinétique</i>	41
2.1.2	<i>Actions mécaniques</i>	44
2.1.3	<i>Équilibre statique</i>	46
2.2	Notion de contrainte	47
2.2.1	<i>Efforts intérieurs</i>	48
2.2.2	<i>Tenseur des contraintes</i>	49
2.3	Équation d'équilibre local	59
2.3.1	<i>Obtention de l'équation</i>	59
2.3.2	<i>Résolution de l'équation</i>	65
3	Critères de résistance	71
3.1	Essais de caractérisation mécanique	71
3.1.1	<i>Essai de traction simple</i>	71
3.1.2	<i>Types de rupture</i>	76

3.2	Critères	79
3.2.1	<i>Étude locale des contraintes</i>	79
3.2.2	<i>Critères de rupture par clivage</i>	84
3.2.3	<i>Critères de rupture par cisaillement</i>	86
3.2.4	<i>Autres critères</i>	92
3.3	Concentrations de contraintes	94
4	Comportement des matériaux	97
4.1	Comportement des solides déformables	97
4.1.1	<i>Bilan des inconnues et des équations du problème</i>	97
4.1.2	<i>Diversité des comportements</i>	98
4.1.3	<i>Comportement élastique linéaire dans le cadre HPP</i>	101
4.2	Comportement élastique linéaire isotrope dans le cadre HPP	103
4.2.1	<i>Hypothèse d'isotropie</i>	103
4.2.2	<i>Lien avec l'essai de traction</i>	105
4.3	Comportement thermoélastique dans le cadre HPP	112
4.3.1	<i>Cadre de la thermoélasticité linéaire</i>	112
4.3.2	<i>Traitement d'un problème de thermoélasticité</i>	113
4.4	Comportement hyperélastique	117
4.4.1	<i>Principe d'indifférence matérielle</i>	118
4.4.2	<i>Comportement hyperélastique isotrope</i>	119
5	Élasticité infinitésimale	125
5.1	Poser un problème d'élasticité	125
5.1.1	<i>Équations à résoudre</i>	125
5.1.2	<i>Conditions aux limites</i>	127
5.1.3	<i>Propriétés de la solution</i>	129
5.2	Méthodes de résolution d'un problème d'élasticité	133
5.2.1	<i>Approche en déplacement</i>	133
5.2.2	<i>Approche en contraintes</i>	138
5.2.3	<i>Résolutions approchées</i>	144
5.3	Simplifications d'un problème d'élasticité	149
5.3.1	<i>Principe de superposition</i>	149
5.3.2	<i>Élasticité plane</i>	150
5.3.3	<i>Prise en compte de plans de symétrie</i>	155
6	Fluides	161
6.1	Description eulérienne du mouvement	161
6.1.1	<i>Grandeurs spatiales</i>	161
6.1.2	<i>Placement relatif</i>	163
6.1.3	<i>Dérivée particulaire</i>	164

6.2	Vitesses de déformation	168
6.2.1	Tenseur des vitesses de déformation	168
6.2.2	Conservation de la masse	174
6.3	Fluides visqueux	179
6.3.1	Comportement fluide	179
6.3.2	Équation de Navier-Stokes	183
6.3.3	Réseaux hydrauliques	187
6.4	Fluides parfaits	191
6.4.1	Approximation des fluides parfaits	192
6.4.2	Éléments d'aérodynamique	193

II

Dynamique des solides indéformables

7	Mouvement d'un solide indéformable	203
7.1	Dérivation temporelle	203
7.1.1	Enjeu et définition	203
7.1.2	Rotations	204
7.1.3	Dérivées temporelles d'une rotation	208
7.1.4	Dérivées temporelles d'un vecteur	211
7.2	Cinématique d'un solide indéformable	212
7.2.1	Placement des points d'un solide indéformable	212
7.2.2	Champ des vitesses d'un solide indéformable	213
7.2.3	Champ des accélérations d'un solide indéformable	214
7.3	Dynamique d'un solide indéformable	215
7.3.1	Équations de la dynamique et actions mécaniques	215
7.3.2	Équation de Newton	216
7.3.3	Équation d'Euler	218
7.3.4	Rotation d'un solide autour d'un axe fixe	226
7.3.5	Mouvement d'un solide isolé	228
7.3.6	Effet gyroscopique	231
8	Liaisons entre solides indéformables	233
8.1	Paramétrage associé à une liaison	233
8.1.1	Mouvements relatifs et compositions de rotations	233
8.1.2	Dérivée temporelle d'une composition de rotations	234
8.1.3	Dérivation vectorielle pour des référentiels différents	236
8.2	Composition des mouvements dans les liaisons	238
8.2.1	Cas d'une translation relative entre deux solides	238
8.2.2	Cas d'une rotation relative d'axe lié entre deux solides	240
8.2.3	Cas d'une translation et d'une rotation relatives entre deux solides	241
8.2.4	Cinématique des liaisons entre solides	243

8.3	Actions transmissibles par les liaisons	254
8.3.1	<i>Liaisons parfaites</i>	254
8.3.2	<i>Liaisons « réelles »</i>	257
9	Chaînes de solides indéformables	269
9.1	Étude cinématique de chaînes de solides indéformables	269
9.1.1	<i>Chaînes ouvertes</i>	269
9.1.2	<i>Chaînes fermées</i>	271
9.2	Étude dynamique de chaînes de solides indéformables	277
9.2.1	<i>Notions d'hyperstatisme et d'isostatisme</i>	277
9.2.2	<i>Stratégie de résolution « systématique »</i>	279
9.2.3	<i>Stratégie de résolution « optimisée »</i>	283

III

Mécanique des structures

10	Étude mécanique d'une poutre	295
10.1	Cinématique d'une poutre	295
10.1.1	<i>Géométrie et paramétrage</i>	295
10.1.2	<i>Hypothèse de section indéformable</i>	296
10.1.3	<i>Hypothèse d'Euler-Bernoulli</i>	302
10.2	Efforts intérieurs dans une poutre	307
10.2.1	<i>Hypothèse sur les contraintes</i>	307
10.2.2	<i>Résultante des efforts intérieurs et équilibre associé</i>	308
10.2.3	<i>Moment des efforts intérieurs et équilibre associé</i>	315
10.3	Relation de comportement poutre	323
10.3.1	<i>Relations locales</i>	323
10.3.2	<i>Relation de comportement pour la résultante des efforts intérieurs</i>	324
10.3.3	<i>Relation de comportement pour le moment des efforts intérieurs</i>	326
10.3.4	<i>Estimation des contraintes dans la section</i>	334
11	Assemblages de poutres	337
11.1	Liaisons entre poutres	337
11.1.1	<i>Cinématique associée à une liaison</i>	337
11.1.2	<i>Efforts de liaison</i>	342
11.1.3	<i>Hyperstatisme et isostatisme</i>	345
11.2	Résolution complète d'un problème de poutres	350
11.2.1	<i>Stratégie « de base »</i>	350
11.2.2	<i>Stratégie « systématique »</i>	355
11.2.3	<i>Considérations de symétrie</i>	363

11.3	Résolution globale de problèmes de treillis et portiques	367
11.3.1	<i>Problèmes de treillis</i>	367
11.3.2	<i>Problèmes de portiques</i>	373
12	Problèmes « avancés »	381
12.1	Poutres en référentiels quelconques	381
12.1.1	<i>Changement de référentiel en mécanique des milieux continus</i>	381
12.1.2	<i>Équations des poutres dans un référentiel quelconque</i>	384
12.2	Poutres hétérogènes	387
12.2.1	<i>Relation de comportement pour la résultante des efforts intérieurs</i>	387
12.2.2	<i>Relation de comportement pour le moment des efforts intérieurs</i>	389
12.3	Flambage des poutres droites	391
12.3.1	<i>Équation d'équilibre local en moment dans la configuration déformée</i>	391
12.3.2	<i>Flambage linéarisé</i>	392

IV

Annexes (disponibles en ligne)

A	Algèbre tensorielle	405
A.1	Vecteurs	405
A.1.1	<i>Définitions et notations</i>	405
A.1.2	<i>Bases classiques</i>	406
A.2	Tenseurs d'ordre deux	408
A.2.1	<i>Définitions et propriétés</i>	408
A.2.2	<i>Produit scalaire et norme de tenseurs</i>	410
A.2.3	<i>Déterminant d'un tenseur et relations remarquables</i>	411
A.2.4	<i>Invariants d'un tenseur</i>	412
A.2.5	<i>Racine carrée d'un tenseur</i>	413
A.3	Tenseurs d'ordre quatre	414
A.3.1	<i>Définition et propriétés</i>	414
A.3.2	<i>Formes particulières</i>	414
B	Analyse tensorielle	419
B.1	Dérivation	419
B.1.1	<i>Opérateurs classiques</i>	419
B.1.2	<i>Formules utiles</i>	421
B.2	Transformations d'intégrales	421
B.2.1	<i>Changements de variables</i>	421
B.2.2	<i>Formules de Stokes</i>	423

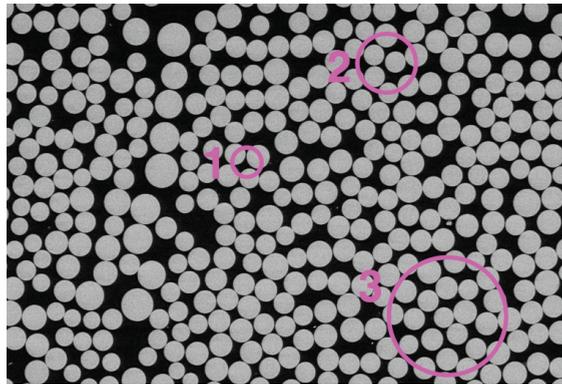
B.3	Formulaires	425
B.3.1	<i>Changement de coordonnées</i>	425
B.3.2	<i>Coordonnées cylindriques</i>	425
B.3.3	<i>Coordonnées sphériques</i>	427

Mécanique des milieux continus

1	Déformations	5
1.1	Description lagrangienne du mouvement	
1.2	Déformation d'un milieu continu	
1.3	Tenseur des petites déformations	
1.4	Variation de volume et conservation de la masse	
2	Contraintes	41
2.1	Relations fondamentales de la dynamique	
2.2	Notion de contrainte	
2.3	Équation d'équilibre local	
3	Critères de résistance	71
3.1	Essais de caractérisation mécanique	
3.2	Critères	
3.3	Concentrations de contraintes	
4	Comportement des matériaux	97
4.1	Comportement des solides déformables	
4.2	Comportement élastique linéaire isotrope dans le cadre HPP	
4.3	Comportement thermoélastique dans le cadre HPP	
4.4	Comportement hyperélastique	
5	Élasticité infinitésimale	125
5.1	Poser un problème d'élasticité	
5.2	Méthodes de résolution d'un problème d'élasticité	
5.3	Simplifications d'un problème d'élasticité	
6	Fluides	161
6.1	Description eulérienne du mouvement	
6.2	Vitesses de déformation	
6.3	Fluides visqueux	
6.4	Fluides parfaits	

Contexte

L'objet de la Mécanique est de prédire les mouvements de milieux matériels, qu'ils soient solides ou fluides, et de les relier aux causes qui les provoquent ; il est donc nécessaire de comprendre de façon approfondie les mécanismes de déformations de ces milieux et d'appréhender les efforts qui se développent en leur sein. Pour cela, la démarche se situe à l'échelle macroscopique, sans forcément établir un lien quantitatif avec la nature des forces atomiques ou moléculaires : on définit alors ce que l'on appelle un *milieu continu* équivalent, dont la « forme » mathématique autorise alors le recours aux outils de l'analyse, tels que le calcul différentiel et intégral, qui permettent de résoudre, de façon exacte ou approchée, des équations aux dérivées partielles.



La question qui se pose alors est de savoir comment on peut définir ce milieu continu équivalent ; si l'on prend l'exemple d'une quantité physique telle que la masse volumique, dans le cas d'un milieu hétérogène comme le cas d'un matériau composite à fibres longues (dont un échantillon est visualisé en microscopie électronique à balayage ci-dessus), on s'aperçoit que cette quantité évolue de façon typique suivant l'échelle d'observation de ce milieu :

- en dessous d'une certaine taille d'échantillon (c'est-à-dire à l'échelle *microscopique*), l'organisation de la matière est hétérogène, si bien que la masse volumique moyenne estimée pour différents échantillons de cette taille varie très fortement d'un échantillon à l'autre, comme si elle était aléatoire ;
- à partir d'une certaine taille d'échantillon, supérieure à l'ordre de grandeur de la taille des hétérogénéités, la masse volumique moyenne n'évolue plus beaucoup, sur de faibles distances ; on se trouve alors à l'échelle *mésoscopique* ;
- sur de plus grandes distances (typiquement de l'ordre de grandeur de la taille du domaine considéré), la masse volumique moyenne peut de nouveau varier de façon significative, dans le cas d'un matériau hétérogène, mais il s'agit cette fois-ci de fluctuations à l'échelle *macroscopique*.

Pour que l'on puisse définir un milieu continu équivalent, l'échantillon analysé doit donc être de taille grande par rapport à celle des hétérogénéités locales, mais de taille petite par rapport au domaine que l'on étudie ; dans l'exemple ci-dessus, on constate que l'échantillon 1 est trop petit, et que l'échantillon 3 est de taille suffisante

pour modéliser ce milieu comme un milieu continu, en ne rentrant pas dans le détail du comportement des différents constituants et de la façon dont ils adhèrent entre eux, et constitue un *volume élémentaire représentatif* de ce milieu continu. On finit ainsi par modéliser la masse volumique du milieu comme une fonction continue des coordonnées du point considéré; par abus de langage, on parle de *particule matérielle* pour désigner ce point, mais ceci signifie en fait que l'on considère une grandeur physique définie comme une moyenne sur un sous-domaine (celui de la particule matérielle), et que la taille de ce sous-domaine fait que, à l'échelle du domaine considéré, on peut supposer cette grandeur ponctuelle.

1. Déformations

Tous les corps se déforment. La modélisation de la mise en forme des matériaux (comme l'emboutissage) d'une part, ou l'analyse de l'écoulement de polymères d'autre part, nécessitent de quantifier les grandes déformations. À l'inverse, la plupart des matériaux utilisés dans l'industrie ou la construction pour supporter ou transmettre des charges doivent généralement se déformer peu pour éviter la rupture. Dans tous les cas, ces déformations peuvent varier d'un point à l'autre au sein des corps étudiés, et leur description dépend des directions considérées.

POURQUOI ÉTUDIER LES DÉFORMATIONS ?

1.1 Description lagrangienne du mouvement

Dans le cas d'un domaine matériel déformable, il peut être intéressant de mettre en évidence une configuration privilégiée, qui sert de référence dans le cadre d'une description dite *lagrangienne* du mouvement : il s'agit habituellement de l'état du domaine lorsqu'il n'est soumis à aucune sollicitation extérieure. Cette configuration est souvent qualifiée de *non déformée* (au sens intuitif du terme), ou *initiale* (en associant un instant $t = 0$), par opposition à ce qui est décrit ensuite, qui correspond à une configuration dite *déformée*, ou *actuelle* (à l'instant t courant).

1.1.1 Formulation générique

On considère un domaine Ω dont on suit les particules matérielles au cours du temps, comme représenté sur la figure 1.1 :

- à l'instant initial $t = 0$, le domaine est non déformé, et on repère chaque particule de Ω par son vecteur position \mathbf{p} , de coordonnées (p_1, p_2, p_3) données dans une base cartésienne $(\mathbf{i}_1, \mathbf{i}_2, \mathbf{i}_3)$ donnée ; le domaine spatial occupé par l'ensemble des particules de Ω est alors noté Ω_0 ;
- à l'instant actuel t donné, les particules ont pu changer de positions par rapport à la configuration initiale ; on suppose alors que l'on peut se donner la position actuelle de chaque particule matérielle de Ω , notée \mathbf{x} , comme une fonction vectorielle connue \mathbf{f} , appelée *placement* ; ce dernier dépend du temps, mais aussi du vecteur \mathbf{p} qui permet d'« identifier » la particule que l'on est en train de suivre au cours du temps :

$$\mathbf{x} = \mathbf{f}(\mathbf{p}, t), \quad \forall \mathbf{p} \in \Omega_0$$

Les particules de Ω occupent désormais un domaine spatial noté Ω_t , défini comme :

$$\Omega_t = \{\mathbf{x} = \mathbf{f}(\mathbf{p}, t) \mid \forall \mathbf{p} \in \Omega_0\}$$

La connaissance de la fonction de placement \mathbf{f} au cours du temps permet donc de décrire la transformation du domaine Ω : on définit ainsi les trajectoires des différents points matériels de Ω , dont on peut spécifier les composantes dans une base cartésienne orthonormée $(\mathbf{i}_1, \mathbf{i}_2, \mathbf{i}_3)$ donnée :

$$x_1 = f_1(p_1, p_2, p_3, t) = \langle \mathbf{f}(\mathbf{p}, t), \mathbf{i}_1 \rangle$$

$$x_2 = f_2(p_1, p_2, p_3, t) = \langle \mathbf{f}(\mathbf{p}, t), \mathbf{i}_2 \rangle$$

$$x_3 = f_3(p_1, p_2, p_3, t) = \langle \mathbf{f}(\mathbf{p}, t), \mathbf{i}_3 \rangle$$

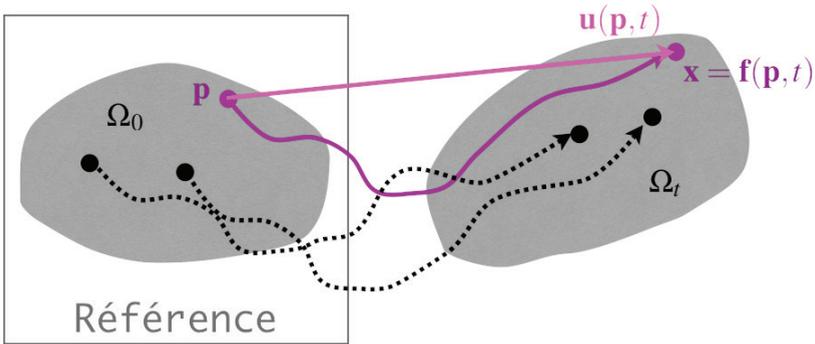


FIGURE 1.1 – Placement et déplacement des particules d'un domaine matériel Ω .

que l'on pourra noter de façon générique comme $x_m = f_m(p_1, p_2, p_3, t) = \langle \mathbf{f}(\mathbf{p}, t), \mathbf{i}_m \rangle$ (avec $1 \leq m \leq 3$). En outre, on a nécessairement la condition de compatibilité $\mathbf{f}(\mathbf{p}, 0) = \mathbf{p}$, soit encore, en termes de coordonnées, $f_m(p_1, p_2, p_3, 0) = p_m$.



Ainsi, il faut bien distinguer la quantité $\mathbf{x} = \mathbf{f}(\mathbf{p}, t)$, qui donne la position, à l'instant actuel, d'une particule matérielle donnée, de la quantité notée simplement \mathbf{x} , qui désigne un point de l'espace, indépendamment de la particule qui pourrait s'y trouver (et donc du temps).

En pratique, on emploiera dans les deux cas la notation \mathbf{x} , quand il n'y a aucun risque de confusion.

Champ de déplacement. On appelle *déplacement* d'une particule matérielle le vecteur \mathbf{u} qui relie la position initiale de cette dernière à sa position actuelle :

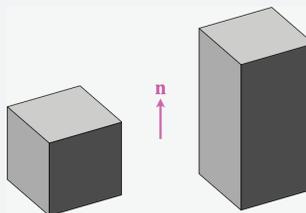
$$\mathbf{u}(\mathbf{p}, t) = \mathbf{f}(\mathbf{p}, t) - \mathbf{p}$$

Les déplacements de l'ensemble des particules matérielles d'un domaine matériel Ω constituent, à un instant t donné, un champ de déplacement, défini sur la configuration initiale Ω_0 . La connaissance de ce champ est équivalente à celle du placement $\mathbf{x} = \mathbf{f}(\mathbf{p}, t)$ sur tout le domaine.

■ **Exemple 1.1 — Allongement uniforme.** On considère un domaine matériel Ω subissant une transformation de la forme :

$$\mathbf{x} = \mathbf{f}(\mathbf{p}, t) = \mathbf{p} + a(t) \langle \mathbf{p}, \mathbf{n} \rangle \mathbf{n}, \quad \forall \mathbf{p} \in \Omega_0$$

où a est une fonction scalaire quelconque du temps, sans dimension, et \mathbf{n} un vecteur unitaire fixé.



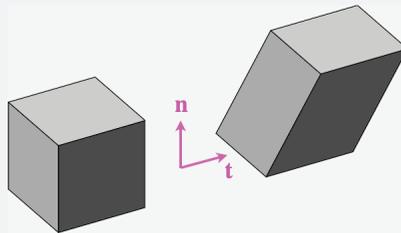
La surface constituée de l'ensemble des points tels que $\langle \mathbf{p}, \mathbf{n} \rangle = C$, où C est une constante donnée, est une portion de plan animée d'un déplacement d'ensemble $\mathbf{u} = a(t)C\mathbf{n}$ selon la normale \mathbf{n} à ce plan, et ne

se déforme donc pas. Ce déplacement d'ensemble est d'autant plus important que la « coordonnée » C de cette surface par rapport à une origine donnée (associée à $\mathbf{p} = \mathbf{0}$) est grande : on parle alors d'allongement selon la direction \mathbf{n} , vu que tous les segments reliant deux points matériels, qui sont orientés initialement selon cette direction, voient leur longueur évoluer au cours du temps. Le fait que cet allongement soit dit uniforme sera justifié dans l'exemple 1.11. ■

■ **Exemple 1.2 — Glissement uniforme.** On considère un domaine matériel Ω subissant une transformation de la forme :

$$\mathbf{x} = \mathbf{f}(\mathbf{p}, t) = \mathbf{p} + b(t)\langle \mathbf{p}, \mathbf{n} \rangle \mathbf{t}, \quad \forall \mathbf{p} \in \Omega_0$$

où b est une fonction scalaire quelconque du temps, sans dimension, et \mathbf{n} et \mathbf{t} deux vecteurs unitaires fixés, perpendiculaires entre eux.

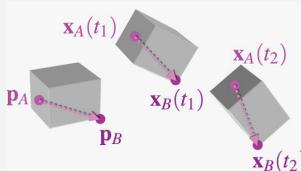


La surface constituée de l'ensemble des points tels que $\langle \mathbf{p}, \mathbf{n} \rangle = C$, où C est une constante donnée, est une portion de plan animée d'un déplacement d'ensemble $\mathbf{u} = b(t)C\mathbf{t}$ contenu dans le plan de cette dernière, et ne se déforme donc pas. Ce déplacement d'ensemble est d'autant plus important que la « coordonnée » C de cette surface par rapport à une origine donnée (associée à $\mathbf{p} = \mathbf{0}$) est grande : on parle alors de glissement sur un plan de normale \mathbf{n} selon la direction \mathbf{t} . L'angle entre deux segments, reliant chacun deux points matériels, et initialement de directions \mathbf{t} et \mathbf{n} , évolue donc au cours du temps. Le fait que ce glissement soit dit uniforme sera justifié dans l'exemple 1.13. ■

■ **Exemple 1.3 — Mouvement de solide indéformable.** On considère un domaine matériel Ω subissant une transformation de la forme :

$$\mathbf{x} = \mathbf{f}(\mathbf{p}, t) = \mathbf{x}_A(t) + \mathbb{R}(t)(\mathbf{p} - \mathbf{p}_A), \quad \forall \mathbf{p} \in \Omega_0$$

où $\mathbf{x}_A(t) = \mathbf{f}(\mathbf{p}_A, t)$ est le placement d'un point matériel A donné de Ω , et $\mathbb{R}(t)$ est une matrice de rotation, c'est-à-dire une matrice vérifiant $\mathbb{R}^T \mathbb{R} = \mathbb{I}$ (propriété d'orthogonalité).



Si l'on suit au cours du temps le vecteur reliant le point A à un point B donné de Ω , on trouve que :

$$\mathbf{x}_B(t) - \mathbf{x}_A(t) = \mathbb{R}(t)(\mathbf{p}_B - \mathbf{p}_A)$$

ce qui permet d'établir, en utilisant la propriété d'orthogonalité des matrices de rotation, que :

$$\|\mathbf{x}_B(t) - \mathbf{x}_A(t)\|^2 = \langle \mathbb{R}(t)(\mathbf{p}_B - \mathbf{p}_A), \mathbb{R}(t)(\mathbf{p}_B - \mathbf{p}_A) \rangle = \langle \mathbb{R}(t)^T \mathbb{R}(t)(\mathbf{p}_B - \mathbf{p}_A), \mathbf{p}_B - \mathbf{p}_A \rangle = \|\mathbf{p}_B - \mathbf{p}_A\|^2$$

Tout segment reliant deux points du solide Ω est donc de longueur constante au cours du temps, mais sa direction peut évoluer de façon quelconque dans l'espace.

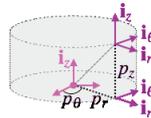
L'étude d'un tel mouvement sera détaillée dans la partie II de cet ouvrage ; on verra notamment dans le paragraphe 7.2.1 que six paramètres sont nécessaires et suffisants pour décrire la position à un instant donné de l'ensemble des particules du domaine : physiquement, il s'agit :

- de trois paramètres de translation, permettant de placer par exemple le point A évoqué plus haut ;
- et de trois paramètres de rotation, permettant d'orienter dans l'espace le vecteur reliant le point A à tout point du solide (le point B , par exemple).

On dit qu'un solide indéformable sans liaison (c'est-à-dire libre dans l'espace) a six degrés de liberté. ■

R Bien entendu, si le domaine est courbe, et peut être décrit de manière simple à l'aide de coordonnées curvilignes, il est intéressant d'utiliser ces dernières pour décrire le placement du domaine matériel. Ainsi, dans le cas d'un domaine Ω de forme cylindrique d'axe \mathbf{i}_z , on peut utiliser une base cylindrique $(\mathbf{i}_r(p_\theta), \mathbf{i}_\theta(p_\theta), \mathbf{i}_z)$, de coordonnées associées (p_r, p_θ, p_z) , pour définir le placement initial des particules de Ω :

$$\mathbf{p} = p_r \mathbf{i}_r(p_\theta) + p_z \mathbf{i}_z$$



ainsi que, pour le placement actuel, à l'aide des coordonnées (r, θ, z) :

$$\mathbf{x} = r \mathbf{i}_r(\theta) + z \mathbf{i}_z$$

■ **Exemple 1.4 — Torsion d'un arbre cylindrique.** On considère un domaine matériel Ω , en forme de cylindre de révolution d'axe \mathbf{i}_z , de rayon R et de longueur L , subissant une transformation s'exprimant comme :

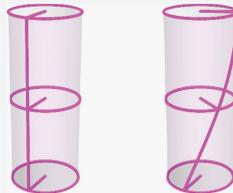
$$\mathbf{x} = \mathbf{f}(\mathbf{p}, t) = \mathbf{p} + p_r \left(\mathbf{i}_r \left(p_\theta + \frac{c(t)p_z}{L} \right) - \mathbf{i}_r(p_\theta) \right), \forall \mathbf{p} \in \Omega_0$$

où $\mathbf{p} = p_r \mathbf{i}_r(p_\theta) + p_z \mathbf{i}_z$ est le placement initial, et c est une fonction scalaire quelconque du temps, sans dimension. Cette transformation se traduit en termes de coordonnées cylindriques actuelles comme :

$$r = p_r, \forall p_r \in [0, R]$$

$$\theta = p_\theta + \frac{c(t)p_z}{L}, \forall (p_\theta, p_z) \in [0, 2\pi[\times [0, L]$$

$$z = p_z, \forall p_z \in [0, L]$$



Ainsi, toute section d'altitude p_z fixée subit une rotation de solide indéformable, d'axe \mathbf{i}_z et d'angle $c(t)p_z/L$: $c(t)$ représente le décalage angulaire (en radians) imposé entre les deux sections extrémités du

cylindre. En outre, une ligne initialement droite et parallèle à l'axe \mathbf{i}_z du cylindre (en magenta ci-dessus) vérifie $p_r = C_1$ et $p_\theta = C_2$, où C_1 et C_2 sont des constantes données, et se transforme à l'instant t comme une hélice d'axe \mathbf{i}_z , de même rayon C_1 et de pas $2\pi L/c(t)$:

$$\begin{aligned} r &= C_1 \\ \theta &= C_2 + \frac{c(t)p_z}{L}, \quad \forall p_z \in [0, L] \\ z &= p_z, \quad \forall p_z \in [0, L] \end{aligned}$$

1.1.2 Vitesse et accélération matérielles

Comme la fonction de placement $\mathbf{x} = \mathbf{f}(\mathbf{p}, t)$ permet de repérer la position de chaque particule à tout instant, il est naturel de définir la *vitesse matérielle* $\dot{\mathbf{x}}$ comme la variation du placement de cette particule entre deux instants t et $t + \Delta t$ très proches, soit, en passant à la limite ($\Delta t \rightarrow 0$) :

$$\dot{\mathbf{x}} = \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial t}(\mathbf{p}, t), \quad \forall \mathbf{p} \in \Omega_0$$

De même, l'*accélération matérielle* $\ddot{\mathbf{x}}$ se définit naturellement comme la dérivée seconde par rapport au temps du placement :

$$\ddot{\mathbf{x}} = \frac{\partial^2 \mathbf{f}}{\partial t^2}(\mathbf{p}, t), \quad \forall \mathbf{p} \in \Omega_0$$

R On a étudié volontairement pour le moment la question du référentiel, qui définit la référence par rapport à laquelle on va exprimer les variations du placement, et par conséquent l'expression de sa dérivée temporelle. On suppose donc pour le moment que les mouvements sont décrits par rapport à un observateur « fixe » sans plus de détails. Ce point sera complété dans le paragraphe 7.3.1 notamment.

■ **Exemple 1.5 — Allongement uniforme : vitesses et accélérations matérielles.** En dérivant par rapport au temps le champ de placement étudié dans l'exemple 1.1 :

$$\mathbf{x} = \mathbf{f}(\mathbf{p}, t) = \mathbf{p} + a(t)\langle \mathbf{p}, \mathbf{n} \rangle \mathbf{n}, \quad \forall \mathbf{p} \in \Omega_0$$

où a est une fonction scalaire quelconque du temps, et \mathbf{n} un vecteur unitaire fixé, on obtient le champ de vitesses matérielles suivant :

$$\dot{\mathbf{x}} = \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial t}(\mathbf{p}, t) = \dot{a}(t)\langle \mathbf{p}, \mathbf{n} \rangle \mathbf{n}, \quad \forall \mathbf{p} \in \Omega_0$$

ainsi que le champ d'accélération matérielles :

$$\ddot{\mathbf{x}} = \frac{\partial^2 \mathbf{f}}{\partial t^2}(\mathbf{p}, t) = \ddot{a}(t)\langle \mathbf{p}, \mathbf{n} \rangle \mathbf{n}, \quad \forall \mathbf{p} \in \Omega_0$$

Chaque plan d'équation $\langle \mathbf{p}, \mathbf{n} \rangle = C$ est constitué de particules qui présentent toutes la même vitesse $\dot{a}(t)C\mathbf{n}$ et la même accélération $\ddot{a}(t)C\mathbf{n}$, ce qui confirme qu'il ne se déforme pas au cours du temps. ■



Il est possible d'adopter un autre point de vue : au lieu de considérer les vitesses et les accélérations propres à chaque particule, on peut privilégier le fait que, à un instant donné, on a une « carte » spatiale de vecteurs vitesses et accélérations, sans se préoccuper des particules associées à chaque point de l'espace : dans cette description, les variables d'espace \mathbf{x} et de temps t sont donc indépendantes l'une de l'autre.

Ce point de vue, où les vitesses et les accélérations sont dites spatiales (ou, encore, eulériennes), est couramment adopté dans la description de la cinématique des milieux fluides, pour lesquels il n'est pas pertinent (et facile) de mettre en avant une configuration initiale. Les développements associés seront présentés dans le paragraphe 6.1, mais l'exemple suivant permet aussi d'illustrer ce point de vue dans le cas d'un milieu déformable solide.

■ **Exemple 1.6 — Torsion d'un arbre cylindrique : vitesses et accélérations matérielles.** En dérivant par rapport au temps le placement étudié dans l'exemple 1.4 (où $\mathbf{p} = p_r \mathbf{i}_r(p_\theta) + p_z \mathbf{i}_z$, et c est une fonction scalaire quelconque du temps) :

$$\mathbf{x} = \mathbf{f}(\mathbf{p}, t) = \mathbf{p} + p_r \left(\mathbf{i}_r \left(p_\theta + \frac{c(t)p_z}{L} \right) - \mathbf{i}_r(p_\theta) \right), \forall \mathbf{p} \in \Omega_0$$

on obtient le champ de vitesses matérielles suivant :

$$\dot{\mathbf{x}} = \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial t}(\mathbf{p}, t) = p_r \frac{\dot{c}(t)p_z}{L} \mathbf{i}_\theta \left(p_\theta + \frac{c(t)p_z}{L} \right)$$

vu que $\frac{d\mathbf{i}_r}{dt}(p_\theta(t)) = \dot{p}_\theta \mathbf{i}_\theta(p_\theta(t))$ par dérivation composée, soit, finalement :

$$\dot{\mathbf{x}} = \frac{\dot{c}(t)p_z}{L} \mathbf{i}_z \wedge \mathbf{f}(\mathbf{p}, t), \forall \mathbf{p} \in \Omega_0$$

pour lequel on reconnaît l'expression classique, pour chaque particule, de la vitesse d'un point $\mathbf{x} = \mathbf{f}(\mathbf{p}, t)$ en rotation autour de l'axe \mathbf{i}_z , et de vitesse angulaire $\dot{c}(t)p_z/L$.

De la même façon, le champ d'accéléérations matérielles s'exprime comme :

$$\ddot{\mathbf{x}} = \frac{\partial^2 \mathbf{f}}{\partial t^2}(\mathbf{p}, t) = p_r \frac{\ddot{c}(t)p_z}{L} \mathbf{i}_\theta \left(p_\theta + \frac{c(t)p_z}{L} \right) - p_r \left(\frac{\dot{c}(t)p_z}{L} \right)^2 \mathbf{i}_r \left(p_\theta + \frac{c(t)p_z}{L} \right)$$

vu que $\frac{d\mathbf{i}_\theta}{dt}(p_\theta(t)) = -\dot{p}_\theta \mathbf{i}_r(p_\theta(t))$, soit, finalement :

$$\ddot{\mathbf{x}} = \frac{\ddot{c}(t)p_z}{L} \mathbf{i}_z \wedge \mathbf{f}(\mathbf{p}, t) - \left(\frac{\dot{c}(t)p_z}{L} \right)^2 (\mathbf{f}(\mathbf{p}, t) - p_z \mathbf{i}_z), \forall \mathbf{p} \in \Omega_0$$

pour lequel on reconnaît l'expression classique, pour chaque particule, de l'accélération d'un point $\mathbf{x} = \mathbf{f}(\mathbf{p}, t)$ en rotation autour de l'axe \mathbf{i}_z , de vitesse angulaire $\dot{c}(t)p_z/L$ et d'accélération angulaire $\ddot{c}(t)p_z/L$.

Il est remarquable que ces deux champs ne dépendent que des positions à l'instant t des particules considérées : il est en effet possible d'adopter une représentation spatiale (ou eulérienne) de ce mouvement, en écrivant :

$$\mathbf{v}(\mathbf{x}, t) = \frac{\dot{c}(t)z}{L} \mathbf{i}_z \wedge \mathbf{x}, \forall \mathbf{x} \in \Omega_t, \text{ et } \mathbf{a}(\mathbf{x}, t) = \frac{\ddot{c}(t)z}{L} \mathbf{i}_z \wedge \mathbf{x} - \left(\frac{\dot{c}(t)z}{L} \right)^2 (\mathbf{x} - z\mathbf{i}_z), \forall \mathbf{x} \in \Omega_t$$

comme des fonctions de l'espace (où $\mathbf{x}(r, \theta, z) = r\mathbf{i}_r(\theta) + z\mathbf{i}_z$ en coordonnées cylindriques) et du temps, indépendants l'un de l'autre. Cette approche sera développée dans le paragraphe 6.1. ■