

Mécanique Thermique BUT

**L'essentiel du cours,
exercices avec
corrigés détaillés**

Thierry Alhalel

Professeur à l'IUT de Blagnac

Adriana Soveja

Maître de conférences à l'IUT de Blagnac

DUNOD

Avec la collaboration scientifique de Nicolas Champavert.

Graphisme de couverture : Elizabeth Riba

Le pictogramme qui figure ci-contre mérite une explication. Son objet est d'alerter le lecteur sur la menace que représente pour l'avenir de l'écrit, particulièrement dans le domaine de l'édition technique et universitaire, le développement massif du photocopillage.

Le Code de la propriété intellectuelle du 1^{er} juillet 1992 interdit en effet expressément la photocopie à usage collectif sans autorisation des ayants droit. Or, cette pratique s'est généralisée dans les établissements

d'enseignement supérieur, provoquant une baisse brutale des achats de livres et de revues, au point que la possibilité même pour

les auteurs de créer des œuvres nouvelles et de les faire éditer correctement est aujourd'hui menacée. Nous rappelons donc que toute reproduction, partielle ou totale, de la présente publication est interdite sans autorisation de l'auteur, de son éditeur ou du Centre français d'exploitation du droit de copie (CFC, 20, rue des Grands-Augustins, 75006 Paris).



© Dunod, Paris, 2022

11 rue Paul Bert, 92240 Malakoff

www.dunod.com

ISBN 978-2-10-083483-9

Le Code de la propriété intellectuelle n'autorisant, aux termes de l'article L. 122-5, 2^o et 3^o a), d'une part, que les « copies ou reproductions strictement réservées à l'usage privé du copiste et non destinées à une utilisation collective » et, d'autre part, que les analyses et les courtes citations dans un but d'exemple et d'illustration, « toute représentation ou reproduction intégrale ou partielle faite sans le consentement de l'auteur ou de ses ayants droit ou ayants cause est illicite » (art. L. 122-4).

Cette représentation ou reproduction, par quelque procédé que ce soit, constituerait donc une contrefaçon sanctionnée par les articles L. 335-2 et suivants du Code de la propriété intellectuelle.

Table des matières

| | |
|---|-----------|
| 1 Mécanique des fluides | 1 |
| 1.1 Rappels de cours | 1 |
| 1.1.1 Les grandeurs de la mécanique des fluides | 1 |
| 1.1.2 Statique des fluides | 2 |
| 1.1.3 Dynamique des fluides parfaits | 2 |
| 1.1.4 Fluides visqueux et nombre de Reynolds | 3 |
| 1.1.5 Rugosité d'une conduite | 4 |
| 1.1.6 Pertes de charge régulières ou linéaires | 4 |
| 1.1.7 Le diagramme de Moody | 6 |
| 1.1.8 Les pertes de charges singulières | 6 |
| 1.2 Exercices | 8 |
| 1.2.1 Statique des fluides | 8 |
| 1.2.2 Dynamique des fluides | 18 |
| 1.2.3 Pertes de charge | 27 |
| 2 Thermodynamique | 41 |
| 2.1 Rappels de cours | 41 |
| 2.1.1 Grandeurs thermodynamiques et unités | 41 |
| 2.1.2 Vocabulaire thermodynamique | 43 |
| 2.1.3 Le premier principe de la thermodynamique | 43 |
| 2.1.4 Le second principe de la thermodynamique | 44 |
| 2.1.5 Les coefficients thermodynamiques et thermoélastiques | 45 |
| 2.1.6 Le gaz parfait et les gaz réels | 45 |
| 2.1.7 Corps pur et changement de phases | 46 |
| 2.1.8 Chaleur latente de changement d'état | 48 |
| 2.1.9 Notion d'humidité de l'air et diagramme psychrométrique | 49 |
| 2.1.10 Dérivées partielles en thermodynamique | 52 |
| 2.2 Exercices | 53 |
| 2.2.1 Exercices généraux et calorimétrie | 53 |
| 2.2.2 Application du premier principe de la thermodynamique | 57 |
| 2.2.3 Application du deuxième principe de la thermodynamique | 61 |
| 2.2.4 Coefficients thermoélastiques, gaz parfait et gaz réels | 65 |
| 2.2.5 Phases et changement de phase | 74 |

| | | |
|----------|--|------------|
| 3 | Machines thermiques | 79 |
| 3.1 | Le cycle thermodynamique théorique Carnot | 79 |
| 3.1.1 | Le moteur de Carnot ditherme | 79 |
| 3.1.2 | Les autres machines thermiques dithermes (cycle de Carnot) | 81 |
| 3.2 | Les machines réelles | 82 |
| 3.2.1 | L'inégalité de Clausius | 82 |
| 3.2.2 | Le diagramme de Mollier | 83 |
| 3.2.3 | Relation entre l'efficacité η et le COP | 83 |
| 3.3 | Exercices | 85 |
| 4 | Transferts thermiques | 103 |
| 4.1 | Rappels de cours | 103 |
| 4.1.1 | Conduction | 103 |
| 4.1.2 | Convection | 109 |
| 4.1.3 | Rayonnement | 113 |
| 4.2 | Exercices | 116 |
| 4.2.1 | Conduction et résistance thermique | 116 |
| 4.2.2 | Convection et échangeur de chaleur | 122 |
| 4.2.3 | Rayonnement | 127 |
| 5 | Caractéristiques et résistance des matériaux | 133 |
| 5.1 | Rappels de cours | 133 |
| 5.1.1 | Classification et caractérisation des matériaux | 133 |
| 5.1.2 | Comportement mécanique et thermo-mécanique | 134 |
| 5.1.3 | Résistance des matériaux | 136 |
| 5.2 | Exercices | 140 |
| 5.2.1 | Comportement mécanique | 140 |
| 5.2.2 | Résistance des matériaux | 148 |
| 6 | Mécanique des solides indéformables | 159 |
| 6.1 | Rappels de cinématique et dynamique du point matériel | 159 |
| 6.1.1 | Cinématique | 159 |
| 6.1.2 | Les lois de Newton | 160 |
| 6.1.3 | Énergie | 161 |
| 6.1.4 | Vecteur moment cinétique | 161 |
| 6.2 | Caractéristiques mécaniques d'un solide | 162 |
| 6.2.1 | Conditions d'équilibre d'un solide | 162 |
| 6.2.2 | Masse et centre de masse d'un solide | 162 |
| 6.2.3 | Notion de moment d'inertie par rapport à un axe | 162 |
| 6.2.4 | Notion de base principale d'inertie | 163 |
| 6.2.5 | Les moments d'inertie des principaux solides simples | 164 |
| 6.2.6 | Théorème de Huyghens | 165 |
| 6.3 | Solide en mouvement autour d'un axe fixe | 165 |
| 6.4 | Exercices | 166 |

| | | |
|----------|---|------------|
| 7 | Incertitudes et ajustements en physique | 189 |
| 7.1 | Rappels de cours | 189 |
| 7.1.1 | Présentation d'un résultat expérimental | 189 |
| 7.1.2 | Le calcul des incertitudes | 191 |
| 7.1.3 | La notion d'intervalle de confiance - incertitudes élargies | 194 |
| 7.1.4 | Ajustement de données | 195 |
| 7.1.5 | Le test du χ^2 | 199 |
| 7.2 | Exercices | 200 |
| 7.2.1 | Propagation des incertitudes | 200 |
| 7.2.2 | Incertitudes de type A et B | 204 |
| 7.2.3 | Incertitudes élargies - intervalle de confiance | 208 |
| 7.2.4 | Ajustements | 210 |
| 7.2.5 | Test du χ^2 | 214 |
| 7.3 | Les tables | 217 |
| 8 | Capteurs, Arduino et Python | 221 |
| 8.1 | Les outils de base en Python | 221 |
| 8.1.1 | Fonctions et bibliothèques | 225 |
| 8.1.2 | Les pièges et ce qu'il faut savoir en Python | 227 |
| 8.2 | Le guide de survie Arduino (et Python) | 228 |
| 8.2.1 | Un code minimal en Arduino | 229 |
| 8.3 | Exercices et problèmes | 230 |
| 8.3.1 | Premier problème : autour de Python | 230 |
| 8.3.2 | Deuxième problème : traitement de données en Python | 235 |
| 8.3.3 | Troisième problème : capteurs et Arduino | 243 |

Chapitre 1

Mécanique des fluides

1.1 Rappels de cours

1.1.1 Les grandeurs de la mécanique des fluides

On étudie dans ce chapitre des notions de mécanique des fluides :

- la statique des fluides, où le fluide considéré est globalement au repos,
- la dynamique des fluides parfaits, où le fluide en mouvement est supposé sans viscosité,
- la dynamique des fluides visqueux, où le fluide en mouvement a une viscosité non nulle, en insistant surtout sur les pertes de charge dans les conduites.

Une notion essentielle dans cette partie est celle de **ligne de courant**, qui permet à chaque instant de décrire le fluide en mouvement. On la définit comme étant la courbe tangente à la vitesse des particules de fluide à un instant t donné. Cette notion représente la « photo instantanée », à un instant précis du comportement global du fluide.

Il ne faut pas la confondre avec celle de trajectoire d'une **particule** au cours du temps, qui en suit le mouvement. Notons aussi cette notion de « particule » de fluide, qui représente en fait une assemblée macroscopique de molécules, considérée comme une unité se déplaçant comme un « bloc ».

Rappelons aussi que tous les fluides (ou presque) présentent une certaine viscosité, même minime. La notion de fluide parfait, non visqueux, est une idéalisation, pratique, qui approche souvent le comportement réel d'un fluide visqueux, que l'on pourra caractériser par sa viscosité cinématique, ou bien sa viscosité dynamique.

Dans toute la suite on note :

- ρ la masse volumique (unité SI le kg/m^3),
- ν la viscosité cinématique (unité SI le m^2/s),
- μ la viscosité dynamique (unité SI le Poiseuille Pl ou $\text{Pa} \cdot \text{s}$),
- p la pression (unité SI le Pascal (Pa)),
- Q le débit massique ou volumique (unité SI le kg/s ou le m^3/s).

La table 1.1 donne quelques valeurs caractéristiques de masse volumique et de viscosité pour quelques fluides, à la pression atmosphérique et dans le système SI.

Il faut se souvenir que la viscosité dépend de la nature du fluide mais aussi de sa température. En général la viscosité décroît avec l'augmentation de la température.

| matériau | masse volumique | viscosité cinématique | viscosité dynamique |
|---------------------|-------------------|----------------------------------|--|
| unité | kg/m ³ | m ² · s ⁻¹ | kg · m ⁻¹ · s ⁻¹ = Poiseuille (Pl) |
| eau liquide (20 °C) | 1 000 | 1,0 × 10 ⁻⁶ | 1,0 × 10 ⁻³ |
| air (20 °C) | 1,20 | 1,5 × 10 ⁻⁵ | 1,8 × 10 ⁻⁵ |
| mercure (20 °C) | 13 550 | 1,1 × 10 ⁻⁷ | 1,5 × 10 ⁻³ |
| éthanol (20 °C) | 790 | 1,5 × 10 ⁻⁶ | 1,2 × 10 ⁻³ |
| glycérol (20 °C) | 1 260 | 1,2 × 10 ⁻³ | 1,5 |

TABLE 1.1 – Valeurs typiques de masse volumique et de viscosité.

1.1.2 Statique des fluides

On considère un fluide, compressible ou non compressible, de masse volumique ρ , au repos dans le champ g de pesanteur terrestre. En notant Oz l'axe vertical ascendant, le gradient de pression s'écrit :

$$\frac{dP}{dz} = -\rho \times g$$

La poussée d'Archimède est une force verticale (dirigée vers le haut) qui s'exerce sur un corps solide plongé dans un fluide. Son intensité est égale au poids du volume de fluide déplacé (par le solide). La poussée d'Archimède est orientée selon la verticale ascendante Oz :

$$\vec{F}_{\text{Archimede}} = \rho_{\text{fluide}} \times V_{\text{solide}} \times g \times \vec{e}_z$$

Dans tous les exercices qui suivront, lorsqu'un solide est partiellement plongé dans un liquide (de l'eau le plus souvent), on négligera la poussée d'Archimède due à l'air. En effet, la masse volumique de l'air est environ 1 000 fois plus faible que celle de l'eau.

1.1.3 Dynamique des fluides parfaits

On s'intéresse dans ce paragraphe aux fluides parfaits, c'est-à-dire de viscosité nulle ou négligeable. Lorsqu'un fluide homogène et incompressible circule dans un tuyau, on dit que le régime est **stationnaire** si le débit peut être considéré comme indépendant du temps. On distingue le débit volumique (unité SI : m³ · s⁻¹) et le débit massique (unité SI : kg · s⁻¹). Si on note S la section droite du tuyau et v la vitesse (moyenne) du fluide à cet endroit, on a la relation de définition :

$$Q_V = S \times v$$

en supposant que la vitesse est uniforme sur toute la section S . Le débit massique, dans le cas d'un écoulement incompressible, est donné par :

$$Q_m = \rho \times Q_V$$

La conservation du débit volumique entre deux points s'écrit :

$$Q_V = S_1 \times v_1 = S_2 \times v_2 = \text{constante}$$

Lorsqu'un écoulement de fluide est homogène, incompressible et stationnaire, si la viscosité du fluide est négligeable, on peut écrire (le long d'une ligne de courant) l'équation de Bernoulli :

$$\frac{v^2}{2} + g \times z + \frac{p}{\rho} = \text{constante}$$

Cette équation est en fait une équation de conservation de l'énergie :

$$E_{\text{cinétique}} + E_{\text{potentielle}} + E_{\text{pression}} = \text{constante}$$

1.1.4 Fluides visqueux et nombre de Reynolds

Le nombre de Reynolds est une **quantité sans dimension**, qui permet de caractériser et de comparer des écoulements de fluides visqueux dans différentes configurations. Si deux écoulements ont le même nombre de Reynolds, malgré des différences géométriques ou de nature de fluides, on dit qu'ils sont similaires. On définit le nombre de Reynolds comme :

$$Re = \frac{v \times d}{\nu} = \frac{\rho \times v \times d}{\mu}$$

- v représente la vitesse de l'écoulement,
- d une taille caractéristique de l'écoulement (diamètre d'un tuyau par exemple),
- ν est la viscosité cinématique en $\text{m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$,
- μ la viscosité dynamique en $\text{kg} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{s}^{-1}$,
- ρ la masse volumique du fluide en $\text{kg} \cdot \text{m}^{-3}$.

La relation entre les deux viscosités s'écrit :

$$\mu = \nu \times \rho$$

Le nombre de Reynolds mesure le rapport des forces d'inertie, liées au mouvement sur les forces de viscosité, liées à la nature intrinsèque du fluide.

On distingue trois cas, selon les valeurs de Re :

1. Si $Re < 2000$ l'écoulement du fluide est dit **laminaire**, c'est-à-dire que l'ensemble du fluide a le même écoulement, du fait de la viscosité du fluide, qui maintient l'ensemble comme un tout plus ou moins cohérent. On observe des lignes de courant stables (et on peut donc appliquer le théorème de Bernoulli).
2. Si $2000 < Re < 4000$, l'écoulement est dit **en régime transitoire**, c'est-à-dire que des instabilités apparaissent, les lignes de courant se brouillent.
3. Si $Re > 4000$ les forces d'inertie l'emportent sur la viscosité, l'écoulement est dit **turbulent**, c'est-à-dire que l'écoulement présente des tourbillons de fluides à de multiples échelles

Selon la littérature, on peut trouver d'autres valeurs limites du nombre de Reynolds, il s'agit d'ordres de grandeur.

On peut montrer que dans le cas d'un écoulement **laminaire** dans un tube cylindrique, le profil de vitesse sur une section prend une forme parabolique (voir la figure 1.1). Au niveau des parois la vitesse est nulle, et devient maximale au centre de la section. C'est

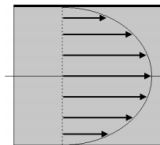


FIGURE 1.1 – Profil parabolique de la vitesse dans le cas d’un écoulement laminaire (pour un fluide visqueux) dans un tuyau supposé cylindrique.

l’adhérence du fluide sur les parois qui induit la valeur nulle de la vitesse et conditionne la forme parabolique du profil (par frottement des lignes de courant les une sur les autres).

Dans le cas d’un écoulement **turbulent** dans une conduite cylindrique, les vitesses changent en permanence, mais on peut considérer que les vitesses **moyennes** se répartissent selon une loi de puissance telle que la vitesse est presque uniforme sur la partie intérieure de l’écoulement, avec une forte diminution (couche limite) près de la paroi (figure 1.2).

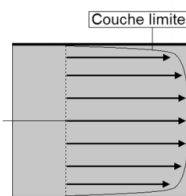


FIGURE 1.2 – Profil de la vitesse dans le cas d’un écoulement turbulent (pour un fluide visqueux) dans un tuyau supposé cylindrique. On notera la présence de la couche limite près de la paroi.

1.1.5 Rugosité d’une conduite

On définit la rugosité k de paroi d’une conduite (exprimée en mm), comme l’épaisseur moyenne des aspérités internes. La rugosité relative d’une conduite cylindrique est le rapport sans dimension k/d , où d est le diamètre du tuyau.

La rugosité ne rentre en jeu que dans le cas d’un écoulement turbulent, elle ne joue aucun rôle dans le cas d’un écoulement laminaire.

La table 1.2 ci-dessous montre quelques valeurs typiques de rugosité selon le matériau. Il existe des tables expérimentales complètes qui donnent la valeur de la rugosité de la conduite en fonction du matériau mais aussi de son état.

1.1.6 Pertes de charge régulières ou linéaires

Les forces de viscosité, toujours présentes dans l’écoulement d’un fluide réel, engendrent des pertes d’énergie dans le fluide. Le frottement sur les parois joue aussi un rôle dans ces pertes. On introduit la notion de pertes de charge régulières (en notant L la longueur de

| matériau | état | rugosité k en mm |
|-----------------------|-------------------|--------------------|
| ciment | brut | de 1 à 3 |
| ciment | lissé | de 0,2 à 1 |
| fonte | neuf | 0,25 |
| fonte | rouillé | entre 1 et 1,5 |
| acier | soudé et rouillé | 0,4 |
| acier | soudé et neuf | entre 0,03 et 0,1 |
| acier | laminé et rouillé | 0,2 à 0,3 |
| acier | laminé et neuf | 0,05 |
| verre, cuivre, laiton | étiré | < 0,001 |

TABLE 1.2 – Valeurs typiques de rugosité de conduite.

conduite). Cela représente la chute de pression par unité de longueur de conduite, que l'on exprime en $\text{Pa} \cdot \text{m}^{-1}$:

$$\frac{\Delta p}{L} = \lambda \times \frac{\rho \times v^2 / 2}{d}$$

On observe ces pertes de charge linéaires dans le sens de l'écoulement. Rappelons que d est une longueur caractéristique de la conduite (diamètre ou équivalent).

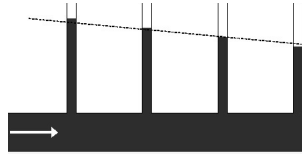


FIGURE 1.3 – Pertes de charge régulières dans un écoulement : plus on avance dans le sens de l'écoulement, moins la pression est élevée dans le fluide.

Le terme λ est appelé facteur de perte de charge linéique, ou coefficient de Darcy (c'est une quantité sans dimension).

Pour déterminer ce facteur de perte λ , on distingue plusieurs cas :

— **Si l'écoulement est laminaire**, la formule phénoménologique de Poiseuille donne :

$$\lambda = \frac{64}{Re}$$

— **Si l'écoulement est turbulent** et que le tuyau est lisse (sans rugosité) avec $Re < 100\,000$, on peut utiliser la formule dite de Blasius :

$$\lambda = \frac{0,316}{Re^{0,25}}$$

— Si l'écoulement est turbulent de façon générale (avec une rugosité non nulle), la formule (complexe, que l'on ne peut utiliser que par itérations successives) de Colebrook s'écrit :

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda}} = -2 \times \log_{10} \left(\frac{k}{3,7 \times d} + \frac{2,51}{Re \times \sqrt{\lambda}} \right)$$

La difficulté de cette formule est que le facteur de perte de charge λ apparaît des deux cotés de l'égalité. Le coefficient k représente la rugosité du tube, exprimée en mm. On rappelle que le rapport k/d pour une conduite cylindrique est appelé rugosité relative.

Remarquons que si le tube est **lisse** la rugosité s'annule, et la formule de Colebrook se simplifie en :

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda}} = 2 \times \log_{10} \left(\text{Re} \times \sqrt{\lambda} \right) - 0,8$$

1.1.7 Le diagramme de Moody

Le diagramme de Moody représente le facteur de friction de Darcy λ en fonction du nombre de Reynolds Re pour des valeurs de la rugosité relative k/d dans une conduite cylindrique. Il permet de déterminer les pertes de charge régulières ou le débit dans le tuyau. La figure 1.4 donne l'allure générale de ce diagramme. On a porté sur la figure les cas limites de l'écoulement laminaire et du tuyau lisse en cas d'écoulement turbulent. L'échelle est \log/\log .

Le diagramme de Moody présente plusieurs zones :

- La zone de gauche, à faible nombre de Reynolds, le paramètre λ se déduisant de la courbe de l'écoulement laminaire, sans influence de la rugosité k .
- La zone centrale basse, correspondant à l'approximation de la conduite lisse en écoulement turbulent.
- La zone centrale et droite supérieure, qui correspond au cas des grands nombres de Reynolds avec rugosité relative non nulle. On peut remarquer que pour la zone supérieure, le paramètre λ devient quasiment indépendant de la valeur du nombre de Reynolds, et ne dépend plus que de la rugosité relative k/d .

1.1.8 Les pertes de charges singulières

Lorsqu'une conduite présente une discontinuité (coude, rétrécissement, diaphragme, vannes, clapets, embranchements...), cela engendre localement une dissipation d'énergie, c'est-à-dire des pertes de charge singulières. On utilise la formule des pertes de charge singulières :

$$\Delta p = s \times \frac{\rho v_{\text{moyen}}^2}{2}$$

Le module de perte de charge $0 \leq s \leq 1$ dépend du type d'obstacle et est purement phénoménologique. Ce paramètre s est sans dimension.¹ Il existe des tables et des logiciels qui permettent d'en estimer la valeur en fonction de l'obstacle, et même de modéliser les pertes de charges sur la totalité d'un circuit fluide.

1. Le module de perte s est parfois supérieur à la valeur de 1, dans le cas de robinets à tournant ou à papillon.

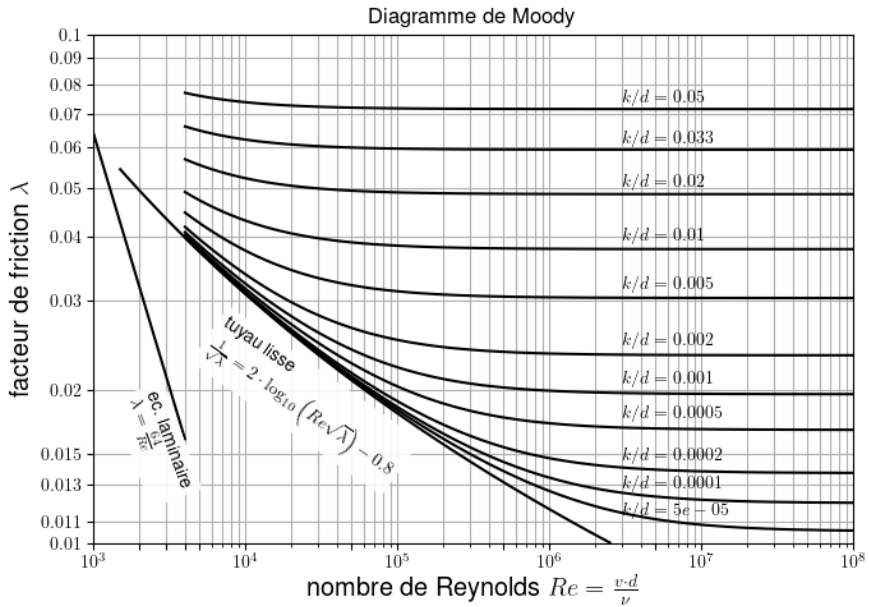


FIGURE 1.4 – Diagramme de Moody (échelle log/log). Le coefficient k/d représente la rugosité relative de la conduite cylindrique de diamètre d . Les paramètres λ et Re sont sans dimension.

Donnons ici quelques exemples d'expressions de s :

- Élargissement brusque d'une conduite, en fonction du rapport des diamètres (de d_1 à d_2) :

$$s = (1 - d_1^2/d_2^2)^2$$

- Entrée d'une canalisation (en T), à angles droits : $s \approx 0,5$.
- Entrée de canalisation progressive (sans angles droits) : $s \approx 0,04$.
- Coude lisse à 90° : $s = 0,13 + 1,85 \left(\frac{d}{2R_c} \right)^{3,5}$. R_c représente le rayon de courbure du coude et d le diamètre de la conduite cylindrique.
- Coude rugueux à 90° : $s = 0,42 \times \left(\frac{d}{R_c} \right)^{0,5}$.
- Coude brusque d'angle α (voir la figure 1.5) : $s = \sin^2(\alpha) + 2 \times \sin^4(\alpha/2)$

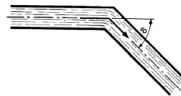


FIGURE 1.5 – Coude brusque et pertes de charge singulières.

1.2 Exercices

1.2.1 Statique des fluides

1. Statique des fluides : l'iceberg flottant

On veut calculer ici, quelle que soit la forme de l'iceberg, la fraction du volume émergé sur le volume total. On suppose que l'iceberg de volume total V est en équilibre (flottaison) sur l'eau liquide. Voir la figure 1.6. On connaît :

- la masse volumique de l'eau liquide : $\rho_{\text{liquide}} = 1\,025 \text{ kg/m}^3$
- la masse volumique de l'eau glace : $\rho_{\text{solide}} = 900 \text{ kg/m}^3$

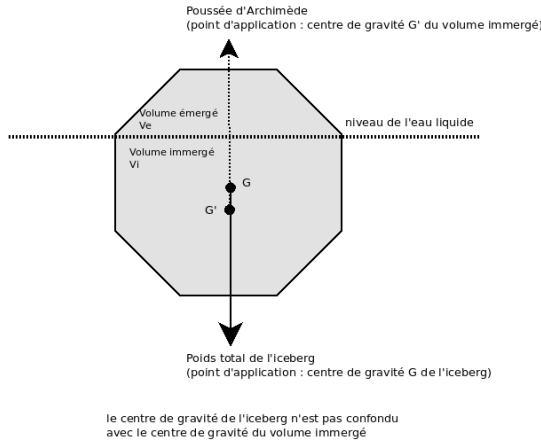


FIGURE 1.6 – Flottaison d'un iceberg.

- (a) Quelle est la relation entre le volume total V , le volume émergé et le volume immergé ?
- (b) Faire le bilan des forces qui s'exercent sur l'iceberg.
- (c) Calculer le pourcentage du volume total V qui est immergé.
- (d) Calculer le pourcentage du volume total V qui est émergé.

Solution

- (a) Le volume total V se partage entre la partie immergée V_i et la partie émergée V_e , soit :

$$V = V_e + V_i$$

- (b) L'iceberg est en équilibre, sous l'effet de son poids et de la poussée d'Archimède liée au volume d'eau déplacée par la partie immergée de glace :

$$\vec{F}_{\text{archi}} + m \times \vec{g} = \vec{0}$$

La poussée d'Archimède est en principe due à l'action de l'eau pour la partie immergée de l'iceberg, et à l'air pour la partie émergée. Cependant on néglige

cette seconde contribution car la masse volumique de l'air est très faible devant celle de l'eau, et que de plus, le volume de glace émergé est faible devant celui immergé.

- (c) On peut donc écrire en projection sur l'axe vertical orienté vers le haut :

$$\rho_{\text{eau}} \times V_i \times g - \rho_{\text{glace}} \times V \times g = 0$$

soit encore :

$$\rho_{\text{glace}} \times V = \rho_{\text{eau}} \times V_i$$

finalement on en déduit que :

$$\frac{V_i}{V} = \frac{\rho_{\text{glace}}}{\rho_{\text{eau}}} = \frac{900}{1025} \approx 88 \%$$

- (d) Bien sûr on trouve : $\frac{V_e}{V} = 12\%$, 12 pour cent seulement de l'iceberg est visible au dessus de l'eau.

2. Statique des fluides : entre deux eaux

Une sphère pleine, de rayon $R = 5,0$ cm, et de densité $d_b = 0,85$ est placée dans un récipient rempli d'une couche d'eau et d'une couche d'huile (de densité $d_h = 0,82$). Ces deux liquides sont supposés être non miscibles. La sphère est totalement immergée en équilibre, une partie se trouvant dans l'eau et l'autre partie dans l'huile.

- (a) Déterminer le volume de la sphère se trouvant dans l'huile.
 (b) Déterminer le volume de la sphère se trouvant dans l'eau.
 (c) Reprendre l'étude, et tracer la fraction de la sphère dans l'huile en fonction de la densité d_h de l'huile (si on peut utiliser des huiles de densité différentes).

Solution

- (a) On sait que la densité d'un corps est le quotient de sa masse volumique sur celle de l'eau : $d = \frac{\rho}{\rho_e}$. On note V le volume total de la sphère, et V_h la partie dans l'huile, V_e la partie dans l'eau : $V = V_h + V_e$. La sphère, qui est en équilibre, subit trois forces :

— son poids $\vec{P} = m \times \vec{g}$,

— la poussée d'Archimède, liée au volume d'huile déplacé par la bille :

$$\vec{F}_h = -\rho_h \times V_h \times \vec{g}$$

— la poussée d'Archimède, liée au volume d'eau déplacé par la bille :

$$\vec{F}_e = -\rho_e \times V_e \times \vec{g}$$

En projetant cet équilibre on trouve l'équation :

$$\rho_h \times V_h + \rho_e \times V_e = \rho_b \times V = \rho_b \times (V_h + V_e)$$

avec $\rho_b = d_b \times \rho_e$, ce qui donne :

$$V_h = V \times \frac{\rho_b - \rho_e}{\rho_h - \rho_e}$$

soit encore :

$$V_h = V \frac{d_b - 1}{d_h - 1}$$

soit numériquement :

$$\frac{V_h}{V} = \frac{d_b - 1}{d_h - 1} = \frac{0,85 - 1}{0,82 - 1} \approx 83,3 \%$$

soit en volume :

$$V_h = 83,3 \% \times \frac{4}{3} \pi \times R^3 \approx 436 \text{ cm}^3$$

(b) Par soustraction on trouve évidemment :

$$\frac{V_e}{V} = 1 - 0,833 \approx 16,7 \%$$

soit encore :

$$V_e = 87 \text{ cm}^3$$

(c) La formule de la fraction dans l'huile s'écrit (pour une densité de bille fixée) :

$$\frac{V_h}{V} = X = \frac{0,85 - 1}{d_h - 1} = \frac{0,15}{1 - d_h}$$

La valeur maximale de la densité de l'huile doit être égale à celle de la bille (sinon cette dernière flotterait sur l'huile). On obtient la figure 1.7 qui représente la fraction de la bille dans l'huile. On remarque que s'il n'y a pas d'huile (densité nulle), la bille flotte sur l'eau, 15 % de la bille étant dans le fluide de densité nulle (l'huile hypothétique). Par ailleurs, si l'huile a une densité égale à celle de la bille (0,85), dans ce cas 100 % de la bille est en flottaison dans l'huile.

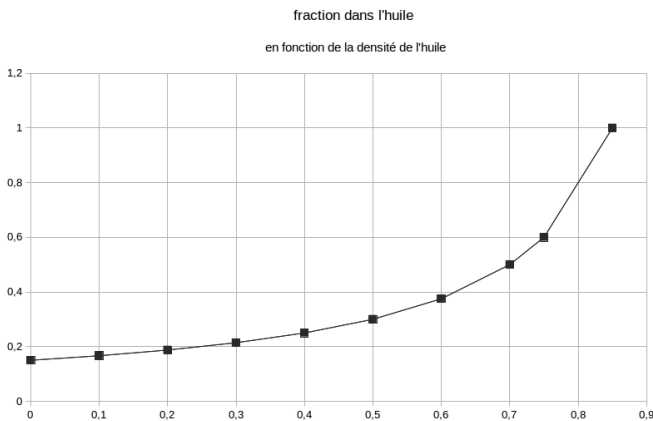


FIGURE 1.7 – Fraction de la bille dans l'huile selon sa densité.

3. Statique des fluides : le baromètre de Torricelli

Un baromètre à mercure (Hg) de Torricelli (voir la figure 1.8) est constitué d'un réservoir de mercure dans lequel trempe un capillaire fermé à l'extrémité supérieure. Ce capillaire est initialement entièrement rempli de mercure, et le niveau de métal liquide descend (une fois que l'on a renversé le capillaire dans le mercure), pour se stabiliser à une certaine hauteur H au-dessus du réservoir. La pression moyenne au niveau de la mer sera prise comme valant : $p_a = 1,0 \text{ atm} = 1013 \text{ hPa}$. La hauteur de mercure au-dessus du réservoir est en moyenne de 760 mm et varie en fonction de la pression atmosphérique locale. On admet ici que le volume vide au dessus de la colonne de mercure est à une pression nulle (en fait la pression de vapeur saturante, considérée ici comme négligeable).

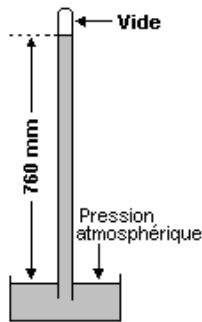


FIGURE 1.8 – Principe du baromètre de Torricelli.

- Utiliser la loi de la statique des fluides pour exprimer la hauteur de mercure H en fonction de ρ , p_a et g .
- Calculer la valeur de la masse volumique du mercure en prenant pour l'accélération de la pesanteur : $g = 9,81 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$.
- En cas d'augmentation de la pression atmosphérique, le niveau de mercure dans le capillaire va-t-il monter ou descendre ?
- Si on mesure sur le baromètre à mercure une hauteur $h = 755 \text{ mm}$, quelle sera la pression p en Pa ? En atm ?
- Étudier la faisabilité d'un baromètre de Torricelli à eau.

Solution

- La pression au sommet de la colonne de Torricelli est nulle (il s'agit de vide), et celle en bas de la colonne est équivalente à la pression atmosphérique p_a . On peut donc écrire l'équation de la statique des fluides :

$$\Delta p = 0 - p_a = -\rho_{Hg} \times H \times g$$

soit encore :

$$H = \frac{p_a}{\rho_{Hg} \times g}$$

(b) De l'équation précédente on tire :

$$\rho_{Hg} = \frac{p_a}{H \times g} = \frac{101\,300}{0,760 \times 9,81} \approx 13,6 \times 10^3 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$$

(c) L'équation qui donne la hauteur H de mercure dans le baromètre montre que plus la pression atmosphérique est grande, plus H sera grand (mesure de hautes pressions). Le niveau de mercure dans le capillaire va donc monter.

(d) Dans ce cas : $p = 13\,587 \times 0,755 \times 9,81 = 1\,006 \text{ hPa} \approx 0,993 \text{ atm}$.

(e) Dans le cas d'un baromètre à eau, on aura :

$$H = \frac{p_a}{\rho_{\text{eau}} \times g} = \frac{101\,300}{1\,000 \times 9,81} \approx 10,3 \text{ m}$$

Pour une pression de 1,0 atm, ce qui oblige à avoir une très haute colonne, rendant le baromètre à eau difficile à construire et à installer chez soi !

4. Statique des fluides : flottaison d'un tronc d'arbre

Un tronc d'arbre cylindrique de section circulaire de diamètre $D = 1,0 \text{ m}$ et de longueur L est à l'équilibre en s'enfonçant dans l'eau sur une hauteur de h .

(a) Calculer la masse volumique de l'arbre si $h = 50,0 \text{ cm}$.

(b) Calculer la masse volumique de l'arbre si $h = 45,0 \text{ cm}$.

Solution

(a) Le tronc d'arbre à l'équilibre statique est enfoncé de $h = D/2 = 50 \text{ cm} = R$ dans l'eau. La section S immergée s'écrit : $S = \pi \times h^2/2$. On peut écrire l'équilibre entre son poids et la poussée d'Archimède, en notant V le volume total et V_i le volume immergé dans l'eau :

$$\rho_b \times V \times g = \rho_{\text{eau}} \times V_i \times g$$

soit encore :

$$\rho_b = \frac{\rho_{\text{eau}} \times V_i}{V} = \frac{\rho_{\text{eau}} \times L \times \pi \times h^2/2}{L \times \pi D^2/4} = \frac{\rho_{\text{eau}} h^2}{D^2/2} = 500 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$$

ce qui était prévisible, puisque comme $h = R$ on trouve $\rho_b = \frac{\rho_{\text{eau}}}{2}$.

(b) On fera dans toute la suite l'hypothèse que les 5 cm (de la section du tronc) hors de l'eau qui complètent le demi cercle inférieur ont approximativement la forme d'un rectangle de hauteur $l = 5 \text{ cm}$ et de longueur $D = 100 \text{ cm}$. L'équilibre s'écrit toujours (avec R rayon du tronc) :

$$\rho_b \times V = \rho_{\text{eau}} \times V_i$$

Soit encore :

$$\rho_b = \frac{\rho_{\text{eau}} \times V_i}{V} = \rho_{\text{eau}} \frac{\pi \times R^2/2 - l \times D}{\pi \times R^2}$$

soit, avec $R = D/2$:

$$\rho_b = \rho_{\text{eau}} \left(\frac{1}{2} - \frac{4 \times l}{\pi \times D} \right) \approx 0,436 \times \rho_{\text{eau}} = 436 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$$

5. Dimensionnement d'un barrage poids

Une retenue d'eau en béton (on notera ρ sa masse volumique qui vaut $2000 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$) est tel que sa section droite a une forme rectangulaire, de base horizontale B , de hauteur $H = 30 \text{ m}$. L'eau a une profondeur de $h = 20 \text{ m} < H$ et l'ouvrage a une largeur totale horizontale $l = 100 \text{ m}$. Un barrage de ce type est appelé barrage poids, car c'est son poids et les frottements sur le sol qui l'empêchent de glisser sous l'effet des forces de pression.

On admet que le coefficient de frottement statique entre le sol et le barrage est $C = 0,15$.

On rappelle que ce coefficient dépend de la nature de la surface du sol et du matériau qui constitue le barrage. La relation entre la composante tangentielle (frottement statique) et la composante normale de la réaction subie par le barrage s'écrit alors : $R_{\text{tangentielle}} \leq C \times R_{\text{normale}}$ (ce qui correspond au fait que si une force tangentielle devient supérieure à la valeur maximale du frottement statique, le barrage va glisser horizontalement).

- Faire un schéma clair du problème.
- Écrire la condition vectorielle d'équilibre du barrage. Projeter cette relation vectorielle sur les axes horizontal et vertical. En déduire une inégalité reliant le poids du barrage et la force exercée par l'eau sur le barrage.
- Déterminer l'expression de la masse M de béton du barrage en fonction des données du problème.
- En effectuant un calcul intégral, déterminer l'expression de la projection des forces de pression sur le barrage sur l'axe horizontal, en fonction des données du problème.
- Trouver numériquement la valeur minimale de l'assise B pour que la construction soit en équilibre.

Solution

- On peut faire le schéma de principe 1.9.
- Le barrage en béton subit trois forces : la force de pression de l'eau notée \vec{F}_e (qui est uniquement horizontale), le poids propre du barrage \vec{P} et la réaction du sol sur le barrage : $\vec{R} = -R_x \vec{e}_x + R_y \vec{e}_y$ (les deux quantités R_x et R_y sont positives, par construction). Les axes x et y représentent l'horizontale et la verticale. La relation entre les deux composantes de la réaction s'écrit $R_x \leq C \times R_y$. la condition vectorielle d'équilibre s'écrit simplement :

$$\vec{F}_e + M\vec{g} + \vec{R} = \vec{0}$$

Ce qui donne en projection :

$$-M \times g + R_y = 0$$

et

$$F_{ex} - R_x = 0$$

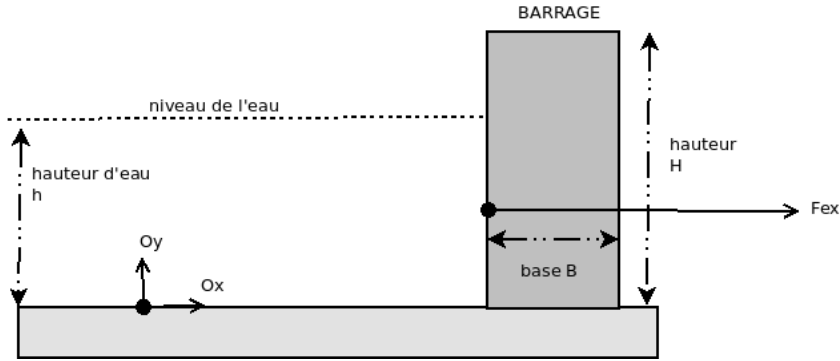


FIGURE 1.9 – Retenue d'eau. La largeur totale de l'ouvrage l est perpendiculaire à la section du barrage représentée sur cette figure. La section rectangulaire a une surface totale $B \times H$. Les forces de pression de l'eau s'exercent perpendiculairement à la face immergée (c'est la composante F_{ex}).

avec

$$R_x \leq C \times R_y$$

C'est-à-dire aussi, d'après les trois équations précédentes :

$$\frac{F_{ex}}{M \times g} \leq C$$

- (c) La masse totale M de l'ouvrage dépend de ses caractéristiques géométriques B , H et l :

$$M = B \times H \times l \times \rho$$

- (d) On ne tient pas compte dans les calculs qui suivent de la pression atmosphérique, car elle s'exerce à la fois sur l'eau et sur les surfaces découvertes du barrage. Cela revient à faire comme si la pression atmosphérique pouvait être annulée. Les projections des forces de pression de l'eau sur le barrage se déterminent par un calcul intégral, en tenant compte de la largeur l de l'ouvrage :

$$F_{ex} = \int_0^h p(y) \times l dy$$

L'élément de surface du barrage s'écrit en effet : $dS = l \times dy$.

La pression hydrostatique s'écrit, en fonction de la profondeur y (pression nulle à la surface $y = h$ (on ne tient pas compte de la pression atmosphérique)) :

$$p(y) = \rho_{\text{eau}} g (h - y)$$

Ce qui donne finalement

$$F_{ex} = \rho_{\text{eau}} g l \times \int_0^h (h - y) dy = \rho_{\text{eau}} g l \times \frac{h^2}{2} \approx 0,196 \text{ GN}$$

(e) L'inéquation précédente $\frac{F_{ex}}{M \times g} \leq C$ devient donc

$$\frac{\rho_{\text{eau}} \times \frac{h^2}{2}}{BH \times \rho} \leq C$$

Cela permet de minorer la valeur de la bases B :

$$B \geq \frac{\rho_{\text{eau}} \times \frac{h^2}{2}}{C \times H \times \rho}$$

Soit numériquement la valeur numérique minimale de la base B :

$$B \geq \frac{1\,000 \times \frac{20^2}{2}}{0,15 \times 30 \times 2\,000} = 22,2 \text{ m}$$

6. Dimensionnement d'un barrage poids 2

Une retenue d'eau en béton (on notera $\rho = 2\,000 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$ sa masse volumique) est tel que sa section droite a une forme triangulaire, de base horizontale B , de hauteur $H = 30 \text{ m}$ (le triangle est rectangle). L'eau a une profondeur maximale de $h = 20 \text{ m} < H$ et l'ouvrage a une largeur totale horizontale $l = 100 \text{ m}$.

On admet que le coefficient de frottement statique entre le sol et le barrage est $C = 0,15$.

On rappelle que ce coefficient dépend de la nature de la surface du sol et du matériau qui constitue le barrage. La relation entre la composante tangentielle (frottement statique) et la composante normale de la réaction subie par le barrage s'écrit alors : $R_{\text{tangentielle}} \leq C \times R_{\text{normale}}$ (ce qui correspond au fait que si une force tangentielle devient supérieure à la valeur maximale du frottement statique, le barrage va glisser horizontalement).

- Faire un schéma clair du problème.
- Écrire la condition vectorielle d'équilibre du barrage. Projeter cette relation vectorielle sur les axes horizontal et vertical. En déduire une inégalité entre les deux composantes (horizontale et verticale) de la force exercée par l'eau sur le barrage.
- Déterminer l'expression de la masse M de béton du barrage en fonction des données du problème.
- En effectuant un calcul intégral, déterminer les expressions des projections des forces de pression sur le barrage, en fonction des données du problème.
- Trouver numériquement la valeur minimale de l'assise B pour que la construction soit en l'équilibre.

Solution

- On peut faire le schéma de principe 1.10.