

AIDE-MÉMOIRE MÉCANIQUE DES STRUCTURES

Résistance des matériaux

Arnaud Delaplace

Ingénieur de recherche Holcim, agrégé de Génie civil

Fabrice Gatuingt

Professeur des universités à l'ENS Paris-Saclay, agrégé de Génie civil

Frédéric Ragueneau

Professeur des universités à l'ENS Paris-Saclay

3^e édition

DUNOD

Graphisme de couverture : Elizabeth Riba

Illustration de couverture : © Ck Keegather - Shutterstock.com

Le pictogramme qui figure ci-contre mérite une explication. Son objet est d'alerter le lecteur sur la menace que représente pour l'avenir de l'écrit, particulièrement dans le domaine de l'édition technique et universitaire, le développement massif du photocopillage.

Le Code de la propriété intellectuelle du 1^{er} juillet 1992 interdit en effet expressément la photocopie à usage collectif sans autorisation des ayants droit. Or, cette pratique s'est généralisée dans les établissements

d'enseignement supérieur, provoquant une baisse brutale des achats de livres et de revues, au point que la possibilité même pour

les auteurs de créer des œuvres nouvelles et de les faire éditer correctement est aujourd'hui menacée.

Nous rappelons donc que toute reproduction, partielle ou totale, de la présente publication est interdite sans autorisation de l'auteur, de son éditeur ou du

Centre français d'exploitation du droit de copie (CFC, 20, rue des Grands-Augustins, 75006 Paris).



© Dunod, 2008, 2015, 2022

11 rue Paul Bert, 92240 Malakoff

www.dunod.com

ISBN 978-2-10-083667-3

Le Code de la propriété intellectuelle n'autorisant, aux termes de l'article L. 122-5, 2° et 3° a), d'une part, que les « copies ou reproductions strictement réservées à l'usage privé du copiste et non destinées à une utilisation collective » et, d'autre part, que les analyses et les courtes citations dans un but d'exemple et d'illustration, « toute représentation ou reproduction intégrale ou partielle faite sans le consentement de l'auteur ou de ses ayants droit ou ayants cause est illicite » (art. L. 122-4).

Cette représentation ou reproduction, par quelque procédé que ce soit, constituerait donc une contrefaçon sanctionnée par les articles L. 335-2 et suivants du Code de la propriété intellectuelle.

Table des matières

Chapitre 1 • THÉORIE DES POUTRES	1
1.1 Principes de base en résistance des matériaux	1
1.1.1 La notion de contrainte	1
1.1.2 La déformation	4
1.1.3 La loi de comportement	5
1.1.4 Définitions et hypothèses en mécanique des structures	6
1.1.5 Équations d'équilibre d'un élément de poutre	9
1.2 Études des poutres sous diverses sollicitations	10
1.2.1 Lois de comportement généralisées pour les poutres	10
1.2.2 Poutre en flexion simple	15
1.2.3 Poutre en flexion déviée	16
1.2.4 Poutre en flexion composée	16
Chapitre 2 • CARACTÉRISTIQUES DES SECTIONS	18
2.1 Préambule	18
2.2 Définitions	19
2.2.1 Surface	19
2.2.2 Centre de gravité	19
2.2.3 Moment statique	19
2.2.4 Moment d'inertie	20
2.2.5 Produit d'inertie	20
2.2.6 Moment polaire	21
2.2.7 Axes principaux d'inertie	21
2.2.8 Rayon de giration	21
2.3 Théorèmes et propriétés	22
2.3.1 Théorème de Huygens	22
2.3.2 Changement de repère	22
2.3.3 Décomposition d'une surface	23
2.4 Caractéristiques des principales sections	25
2.5 Exemple : caractéristiques d'une section en T	27

Chapitre 3 • THÉORÈMES GÉNÉRAUX – MÉTHODES ÉNERGÉTIQUES	30
3.1 Principe des travaux virtuels – PTV	30
3.1.1 Champ de déplacement virtuel	31
3.1.2 Définition du travail des forces dans le champ de déplacement virtuel	31
3.2 Égalité de Clapeyron	32
3.3 Théorème de réciprocité de Maxwell-Betti	33
3.4 Théorème de Castigliano	33
3.5 Théorème de Ménabréa	34
3.6 Théorème de Müller-Breslau : formule de Mohr	34
3.7 Lignes d'influence	38
3.7.1 Effet d'un ensemble de charges	40
3.7.2 Lignes d'influence des déformations	40
Chapitre 4 • SYSTÈMES ISOSTATIQUES	41
4.1 Définitions	41
4.1.1 Systèmes isostatiques	41
4.1.2 Efforts et conditions de liaisons	41
4.1.3 Exemple	42
4.2 Poutre sur deux appuis	45
4.2.1 Cas d'une charge concentrée	45
4.2.2 Cas d'un convoi de charges ponctuelles : théorème de Barré	46
4.2.3 Cas d'une charge uniformément répartie	47
4.2.4 Cas d'une charge répartie partielle	48
4.2.5 Cas d'une charge répartie partielle proche d'un appui	49
4.2.6 Cas d'une charge triangulaire	50
4.2.7 Cas d'une charge triangulaire monotone	51
4.2.8 Cas d'une charge triangulaire antisymétrique	52
4.2.9 Cas d'une charge trapézoïdale symétrique	53
4.2.10 Cas d'une charge parabolique	54
4.2.11 Cas d'un couple en un point quelconque	55
4.2.12 Cas d'un couple à une extrémité	56
4.2.13 Cas d'un couple uniformément réparti	57
4.3 Poutre console	57
4.3.1 Cas d'une charge concentrée	57
4.3.2 Cas d'une charge uniformément répartie	58

4.3.3	Cas d'une charge triangulaire croissante	59
4.3.4	Cas d'une charge triangulaire décroissante	60
4.3.5	Cas d'un couple	60
4.4	Arc parabolique isostatique	61
4.4.1	Cas d'une charge uniformément répartie	62
4.4.2	Cas d'une charge ponctuelle horizontale	62
4.4.3	Cas d'une charge ponctuelle verticale	63
Chapitre 5	• SYSTÈMES HYPERSTATIQUES	65
5.1	Généralités	65
5.1.1	Degré d'hyperstaticité H	65
5.1.2	Méthode des forces ¹	68
5.1.3	Méthode des déplacements	75
5.2	Poutre droite à une travée	85
5.2.1	Encastrement élastique aux extrémités	85
5.2.2	Formulaire d'une poutre simplement appuyée d'un côté et encastree de l'autre	87
5.2.3	Formulaire d'une poutre bi-encastree	91
5.2.4	Formulaire d'une poutre console	94
5.3	Poutre continue	96
5.3.1	Notations et définitions	96
5.3.2	Poutre isostatique associée	96
5.3.3	Formule des trois moments	97
5.3.4	Expression des sollicitations et actions de liaison	98
5.3.5	Formulaire des rotations usuelles	99
5.3.6	Formulaire de la poutre continue à 2 travées égales	101
5.3.7	Formulaire de la poutre continue à 3 travées égales	103
5.3.8	Formulaire de la poutre continue à 4 travées égales	105
5.3.9	Formulaire de la poutre continue à 5 travées égales	106
5.3.10	Poutre continue sur appuis élastiques ponctuels	107
5.4	Systèmes de poutres croisées	108
5.4.1	Principe	108
5.4.2	Cas particulier des poutres de même inertie	109
5.4.3	Cas particulier des poutres infiniment rigides dans une direction	110

5.5	Poutre sur appui élastique continu	110
5.5.1	Définition et paramètres	110
5.5.2	Formulaire de la poutre infinie	112
5.5.3	Formulaire de la poutre semi-infinie	113
5.5.4	Formulaire de la poutre de longueur finie	116
5.6	Portique	118
5.6.1	Portique à un seul montant et à deux extrémités articulées	119
5.6.2	Portique à un seul montant et à deux extrémités encastées	119
5.6.3	Portique à un seul montant et à une extrémité encastée et l'autre articulée	120
5.6.4	Portique à deux montants articulés	122
5.6.5	Portique à deux montants encastés	123
5.7	Arcs hyperstatiques	125
5.7.1	Arc circulaire à deux articulations sans tirant	125
5.7.2	Arc parabolique à deux articulations sans tirant	127
Chapitre 6	• PLAQUES ET COQUES	129
6.1	Plaques	129
6.1.1	Formules générales	129
6.1.2	Méthode de résolution pour les plaques rectangulaires	131
6.1.3	Plaques rectangulaires	131
6.1.4	Plaques circulaires	133
6.1.5	Plaques annulaires	140
6.2	Coques	145
6.2.1	Cylindres verticaux	146
6.2.2	Cylindres horizontaux remplis par un liquide	148
6.2.3	Coupole sphérique fermée	149
6.2.4	Coupole sphérique ouverte	151
6.2.5	Coque sphérique	153
Chapitre 7	• FORMULATION DES ÉLÉMENTS FINIS	154
7.1	Principe des éléments finis	154
7.2	Étapes de la résolution d'un problème	156
7.3	Application à l'étude d'une poutre sollicitée en flexion	157
7.3.1	Description du problème	157
7.3.2	Construction de la matrice de raideur locale	158
7.3.3	Implantation et résolution en Python	162

7.4	Éléments finis isoparamétriques	164
7.5	Fonctions de forme des éléments finis isoparamétriques courants	166
7.5.1	Élément barre à deux nœuds	166
7.5.2	Élément barre à trois nœuds	167
7.5.3	Élément triangulaire à trois nœuds	167
7.5.4	Élément triangulaire à six nœuds	168
7.5.5	Élément quadrangulaire à quatre nœuds	168
7.5.6	Élément quadrangulaire à huit nœuds	169
7.5.7	Élément quadrangulaire à neuf nœuds	169
Chapitre 8	• INSTABILITÉ DES STRUCTURES	171
8.1	Instabilité de poutres	171
8.1.1	Poutre d'Euler	171
8.1.2	Solutions générales des poutres comprimées	172
8.1.3	Solutions particulières pour des poutres de section constante	173
8.1.4	Prise en compte d'un défaut initial	176
8.2	Calcul des moments dans une poutre comprimée fléchie	177
8.3	Déversement latéral de poutres	178
8.3.1	Déversement latéral de poutres à section rectangulaire	178
8.3.2	Déversement latéral de poutres à section en I	179
8.4	Instabilité et voilement de plaques	180
8.5	Flambement de structures non planes initialement	183
8.5.1	Flambement d'arc et d'anneaux	183
8.5.2	Flambement de tubes minces	183
Chapitre 9	• CALCUL NON LINÉAIRE, ANALYSE LIMITE, PLASTICITÉ	185
9.1	Modèles de comportement des matériaux	185
9.2	Plastification en flexion : notion de moment plastique et rotule plastique	186
9.2.1	Hypothèses	186
9.2.2	Section symétrique	186
9.3	Analyse limite d'un système de poutres	188
9.3.1	Enjeux	188
9.3.2	Théorème statique	189
9.3.3	Théorème cinématique	189

Chapitre 10 • DYNAMIQUE ET VIBRATIONS	194
10.1 Système à 1 degré de liberté	194
10.1.1 Équation du mouvement	195
10.1.2 Le régime libre	196
10.1.3 Le régime forcé sinusoïdal	198
10.1.4 Régime permanent sous une charge périodique quelconque	199
10.1.5 Réponse à une charge arbitraire	201
10.1.6 Réponse à des chargements impulsionnels simples	203
10.2 Système à N degrés de liberté	204
10.2.1 Équations du mouvement	204
10.2.2 Signification des modes propres et fréquences propres	204
10.2.3 Détermination des fréquences propres de vibration	205
10.2.4 Détermination des modes propres de vibration	206
10.2.5 Propriété d'orthogonalité des modes	206
10.2.6 Normalisation des vecteurs modes de vibration	206
10.2.7 Équations modales du mouvement – Superposition des modes	207
10.3 Vibration des systèmes continus	209
10.3.1 Vibration axiale des barres	209
10.3.2 Vibration transversale des poutres	210
10.3.3 Détermination du mode fondamental de vibration : méthode de Rayleigh	211
10.3.4 Modes propres de vibration des poutres	212
10.3.5 Modes propres de vibration des plaques	212
Index	215

Chapitre 1

Théorie des poutres

L'objectif de ce premier chapitre est de mettre en place et de définir toutes les notions de base en mécanique des milieux continus permettant d'aborder dans les chapitres suivants la Résistance des Matériaux (RDM). La RDM est une des branches de la mécanique qui permet l'étude des contraintes et des déformations. Les contraintes mécaniques peuvent être vues comme des « efforts de cohésion » de la matière et sont homogènes à une pression (généralement exprimée en méga-Pascal ou MPa). Les déformations d'un objet physique s'observent par un changement de forme de celui-ci et/ou de variation dans ses dimensions. Les déformations sont sans unités.

1.1 PRINCIPES DE BASE EN RÉSISTANCE DES MATÉRIAUX

1.1.1 La notion de contrainte

Si un solide est en équilibre sous l'action d'un ensemble de forces, de couples et de liaisons, ce dernier se déformera et sera soumis à des « efforts » internes. La contrainte est l'objet mathématique permettant de quantifier ces « efforts » internes à la matière. Pour définir la notion de contrainte, il suffit de procéder par la méthode des coupures virtuelles du solide étudié.

En un point M , isolons une partie du solide, défini par un plan de coupure orienté par le vecteur normal sortant au solide \vec{n} (voir figure 1.1).



Figure 1.1

En chaque point M de la surface de coupe, il faut remplacer la partie du solide manquant par une densité surfacique d'effort sur la coupe représentant l'action de ce dernier sur le solide isolé. Cette densité d'effort, définie localement en un point M et orientée par une normale sortante \vec{n} est appelée le vecteur contrainte $\vec{T}(M, \vec{n})$. Le vecteur contrainte dépend linéairement du vecteur unitaire \vec{n} . Il existe donc localement un opérateur linéaire reliant le vecteur contrainte sur un plan à sa normale, c'est le tenseur des contraintes σ , symétrique du second ordre. Il vient ainsi,

$$\vec{T}(M, \vec{n}) = \sigma(M) \cdot \vec{n}$$

La matrice du tenseur des contraintes, relative à une base $(\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$ prend la forme suivante :

$$\sigma = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ \sigma_{yx} & \sigma_{yy} & \sigma_{yz} \\ \sigma_{zx} & \sigma_{zy} & \sigma_{zz} \end{bmatrix}$$

Il est usuel de représenter graphiquement le tenseur des contraintes dans le plan de Mohr, permettant de séparer les contraintes normales des contraintes de cisaillement. Si on désigne par τ la contrainte de cisaillement (portée par un vecteur \vec{t} orthogonal à \vec{n}) et σ_n la contrainte normale, on peut décomposer le vecteur contrainte en deux contributions :

$$\vec{T}(M, \vec{n}) = \sigma_n \vec{n} + \tau \vec{t}$$

Il existe un repère particulier dans lequel le tenseur des contraintes est diagonal, c'est le repère principal des contraintes. En notant σ_1 , σ_2 et σ_3 les 3 contraintes principales, avec $\sigma_1 < \sigma_2 < \sigma_3$, le domaine d'admissibilité du

vecteur contrainte est défini par les 3 inéquations suivantes, définissant un ensemble de cercles.

$$\tau^2 + (\sigma_n - \sigma_2)(\sigma_n - \sigma_3) \geq 0$$

$$\tau^2 + (\sigma_n - \sigma_1)(\sigma_n - \sigma_3) \leq 0$$

$$\tau^2 + (\sigma_n - \sigma_1)(\sigma_n - \sigma_2) \geq 0$$

Dans le plan de Mohr, l'admissibilité de la contrainte est visualisée par la zone grisée ci-après.

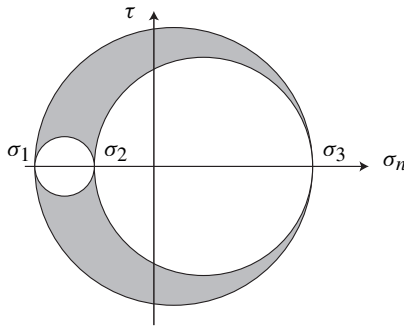


Figure 1.2

Pour un état plan de contrainte, si on désigne par θ , l'angle entre le repère principal des contraintes et le repère dans lequel la matrice du tenseur des contraintes est exprimée, la relation entre les contraintes principales et les différents termes du tenseur des contraintes est

$$\sigma_{xx} = \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2} + \frac{\sigma_2 - \sigma_1}{2} \cdot \cos(2\theta)$$

$$\sigma_{yy} = \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2} - \frac{\sigma_2 - \sigma_1}{2} \cdot \cos(2\theta)$$

$$\sigma_{xy} = \frac{\sigma_2 - \sigma_1}{2} \cdot \sin(2\theta)$$

ce qui donne la représentation graphique de la figure 1.3.

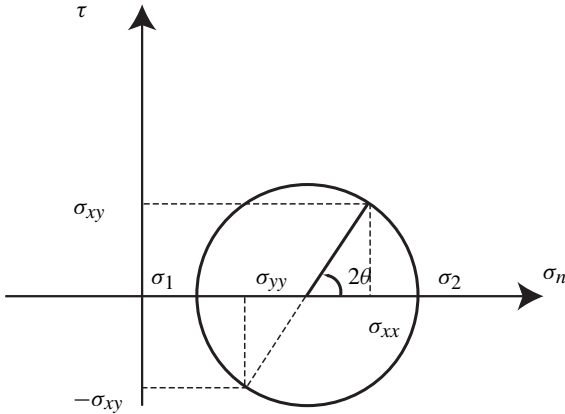


Figure 1.3

1.1.2 La déformation

La déformation est la variation relative de longueur d'un solide lorsque ce dernier est soumis à une action extérieure. Le tenseur des déformations, sous l'hypothèse des Petites Perturbations (HPP) est la partie symétrique du gradient du champ de déplacement $\vec{U}(u_x, u_y, u_z)$.

$$\epsilon = \frac{1}{2}(\mathbf{grad} \vec{U} + \mathbf{grad}^T \vec{U})$$

Dans la base $(\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$, le tenseur symétrique du second ordre se calcule de la manière suivante :

$$\epsilon = \begin{bmatrix} \epsilon_{xx} & \epsilon_{xy} & \epsilon_{xz} \\ \epsilon_{yx} & \epsilon_{yy} & \epsilon_{yz} \\ \epsilon_{zx} & \epsilon_{zy} & \epsilon_{zz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial u_x}{\partial x} & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x}\right) & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_x}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial x}\right) \\ \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x}\right) & \frac{\partial u_y}{\partial y} & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_y}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial y}\right) \\ \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_x}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial x}\right) & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_y}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial y}\right) & \frac{\partial u_z}{\partial z} \end{bmatrix}$$

1.1.3 La loi de comportement

La relation liant le tenseur des contraintes au tenseur des déformations est la loi de comportement. Sous l'Hypothèse de Petites Perturbations, pour un matériau homogène, linéaire et isotrope, la loi de comportement est un opérateur linéaire du quatrième ordre. La loi d'élasticité, ou loi de Hooke, introduit 2 paramètres matériaux : le module d'Young E et le coefficient de Poisson ν . La relation tensorielle s'exprime comme suit :

$$\epsilon = \frac{1 + \nu}{E} \sigma - \frac{\nu}{E} \text{tr} \sigma \cdot \text{Id}$$

Id est le tenseur identité, $\text{tr} \sigma$ désigne la trace de σ . À l'inverse, la relation exprimant la contrainte à la déformation, en fonction des coefficients de Lamé (λ et μ) est :

$$\sigma = 2\mu\epsilon + \lambda \text{tr} \epsilon \cdot \text{Id}$$

Les paramètres d'élasticité et les coefficients de Lamé sont liés par les relations :

$$\lambda = \frac{\nu E}{(1 + \nu)(1 - 2\nu)}$$

$$\mu = \frac{E}{2(1 + \nu)}$$

En écrivant les tenseurs des contraintes et déformations en vecteur colonne de taille 6, on peut exprimer la loi de Hooke de manière matricielle, plus simple d'interprétation.

$$\begin{pmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{zz} \\ \sigma_{yz} \\ \sigma_{zx} \\ \sigma_{xy} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 2\mu + \lambda & \lambda & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ \lambda & 2\mu + \lambda & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ \lambda & \lambda & 2\mu + \lambda & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mu & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \mu & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mu \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \epsilon_{xx} \\ \epsilon_{yy} \\ \epsilon_{zz} \\ 2\epsilon_{yz} \\ 2\epsilon_{zx} \\ 2\epsilon_{xy} \end{pmatrix}$$

Dans un cas de chargement bidimensionnel, la loi de comportement se retrouve sous forme simplifiée et condensée. Dans un cas d'hypothèse de

contraintes planes, valable pour les structures minces, la relation s'écrit :

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \end{Bmatrix} = \frac{E}{(1-\nu^2)} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \epsilon_{xx} \\ \epsilon_{yy} \\ 2\epsilon_{xy} \end{Bmatrix}$$

Sous l'hypothèse de déformations planes, valable pour les structures épaisses, la relation s'écrit :

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \end{Bmatrix} = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} 1-\nu & \nu & 0 \\ \nu & 1-\nu & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \epsilon_{xx} \\ \epsilon_{yy} \\ 2\epsilon_{xy} \end{Bmatrix}$$

1.1.4 Définitions et hypothèses en mécanique des structures

La théorie des poutres consiste à associer à la mécanique des milieux continus des hypothèses statiques, géométriques et cinématiques permettant de réduire la taille du problème à étudier.

a) La géométrie et le matériau

Une poutre est un élément particulier de structure décrit par une surface plane Σ appelée section droite de centre de gravité G . La ligne moyenne de la poutre Γ est formée par les différentes positions du centre de gravité G de la poutre lorsque l'on parcourt cette dernière selon toute sa longueur L . Si Σ est petit devant L alors l'état de contrainte σ ainsi que le champ de déplacement \vec{U} du solide pourront être approximés en fonction de quantités exprimées uniquement le long de Γ .

Si Γ est une droite, la poutre est dite *droite*. Si Γ est dans un plan, la poutre est dite *plane*. Dans les autres cas, la poutre est dite *courbe*.

En théorie des poutres, le matériau constituant celle-ci est considéré homogène, isotrope et élastique linéaire.

b) Les hypothèses cinématiques

En HPP, les déplacements, rotations et déformations sont supposés petits. La poutre sera donc étudiée dans sa configuration initiale de référence et non dans sa configuration déformée.

L'hypothèse d'Euler-Bernoulli suppose que, pour toutes transformations géométriques, les sections droites d'une poutre restent planes et perpendiculaires à la fibre moyenne. Cette hypothèse permet de définir le déplacement \vec{U}_P de tout point P, d'une section droite uniquement en fonction du déplacement du centre de gravité $\vec{U}_G (u_{G_x}, u_{G_y}, u_{G_z})$ et de la rotation de la section droite $\vec{\Theta}(s)$ à l'abscisse curviligne s .

$$\vec{U}_P(s) = \vec{U}_G(s) + \vec{\Theta}(s) \wedge \vec{GP}$$

Dans le cas d'une poutre droite, si l'abscisse curviligne est confondue avec l'axe x , le champ de déplacement $\vec{U}(u_x, u_y, u_z)$ de tout point P(x, y, z) peut être obtenu par :

$$u_x(x, y, z) = u_{G_x}(x) + \theta_y(x).z - \theta_z(x).y$$

$$u_y(x, y, z) = u_{G_y}(x) - \theta_x(x).z$$

$$u_z(x, y, z) = u_{G_z}(x) + \theta_x(x).y$$

Dans la suite, nous définirons la courbure χ par $\chi = d\Theta/dx$.

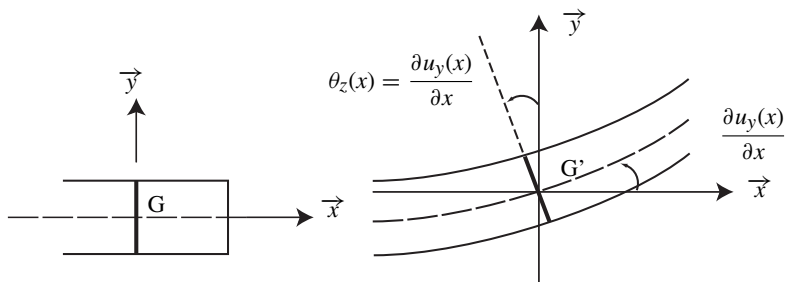


Figure 1.4

Les déformations non nulles sont données par :

$$\epsilon_{xx}(x, y, z) = \frac{\partial u_{G_x}(x)}{\partial x} + \chi_y(x).z - \chi_z(x).y$$

$$2\epsilon_{xy}(x, y, z) = \frac{\partial u_{G_y}(x)}{\partial x} - \theta_z(x) - \chi_x(x).z$$

$$2\epsilon_{xz}(x, y, z) = \frac{\partial u_{G_z}(x)}{\partial x} + \theta_y(x) + \chi_x(x).y$$

Dans l'hypothèse d'Euler-Bernoulli, les déformations de cisaillement sont nulles. On peut définir la rotation θ d'une section droite par :

$$\theta_z(x) = \frac{\partial u_y(x)}{\partial x}$$

$$\theta_y(x) = -\frac{\partial u_z(x)}{\partial x}$$

Si, de plus, la poutre ne subit pas de torsion ($\theta_x(x) = 0$), alors le tenseur de déformations est uniaxial et il reste :

$$\epsilon_{xx}(x, y, z) = \frac{\partial u_x(x)}{\partial x} + \chi_y(x).z - \chi_z(x).y$$

$$2\epsilon_{xy}(x, y, z) = 0$$

$$2\epsilon_{xz}(x, y, z) = 0$$

c) Efforts de cohésion et hypothèses statiques

L'hypothèse de Barré de Saint Venant suppose que pour une section droite quelconque, suffisamment éloignée du point d'application des efforts extérieurs sur une poutre, les effets de ce même chargement peuvent être remplacés par un torseur équivalent s'appliquant à cette section droite. Pour une section droite quelconque, le tenseur des contraintes en un point P prendra la forme suivante :

$$\sigma = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ \sigma_{yx} & 0 & 0 \\ \sigma_{zx} & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Le tenseur des contraintes généralisées, par application du principe fondamental de la statique est défini par une composante en efforts \vec{R} et une composante en moments \vec{M} .

$$\vec{R} = N\vec{x} + V_y\vec{y} + V_z\vec{z}$$

$$\vec{M} = M_x\vec{x} + M_y\vec{y} + M_z\vec{z}$$

N est l'effort normal, V_y et V_z sont respectivement les efforts tranchants selon les directions y et z . M_x est le moment de torsion, M_y et M_z sont les moments de flexion autour des directions y et z . L'expression de ces actions de liaison s'obtient par intégration des contraintes dans la section droite.

$$N = \int_{\Sigma} \sigma_{xx} dydz$$

$$V_y = \int_{\Sigma} \sigma_{xy} dydz$$

$$V_z = \int_{\Sigma} \sigma_{xz} dydz$$

$$M_x = \int_{\Sigma} (\sigma_{xz}y - \sigma_{xy}z) dydz$$

$$M_y = \int_{\Sigma} \sigma_{xx}z dydz$$

$$M_z = \int_{\Sigma} -\sigma_{xx}y dydz$$

1.1.5 Équations d'équilibre d'un élément de poutre

En isolant un tronçon de poutre (figure 1.5), on peut établir les équations différentielles d'équilibre d'une poutre en termes de contraintes généralisées. Pour une flexion dans le plan (x, y) , 3 équations d'équilibre sont obtenues.

$$\frac{dN(x)}{dx} = 0$$

$$\frac{dV(x)}{dx} = -p(x)$$

$$\frac{dM(x)}{dx} = -V(x)$$

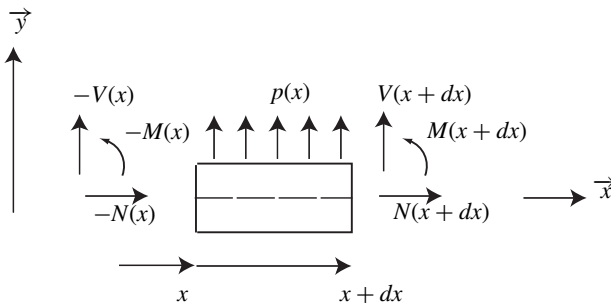


Figure 1.5

1.2 ÉTUDES DES POUTRES SOUS DIVERSES SOLLICITATIONS

1.2.1 Lois de comportement généralisées pour les poutres

En mécanique des structures, on distingue certaines actions de base ainsi que leurs combinaisons. Par définition,

- traction ou compression : $N \neq 0$, $V_y = V_z = 0$ et $M_x = M_y = M_z = 0$
- flexion pure : $M_y \neq 0$ ou $M_z \neq 0$, $N = 0$, $V_y = V_z = 0$ et $M_x = 0$
- flexion simple : $M_y \neq 0$ et $V_z \neq 0$ ou $M_z \neq 0$ et $V_y \neq 0$, $N = 0$ et $M_x = 0$
- flexion composée : $N \neq 0$, $M_y \neq 0$ et $V_z \neq 0$ ou $M_z \neq 0$ et $V_y \neq 0$, $M_x = 0$
- flexion déviée : $M_y \neq 0$, $V_z \neq 0$ et $M_z \neq 0$, $V_y \neq 0$, $N = 0$ et $M_x = 0$

- flexion composée déviée : $N \neq 0, M_y \neq 0, V_z \neq 0$ et $M_z \neq 0, V_y \neq 0, M_x = 0$
- torsion : $M_x \neq 0, N = 0, V_y = V_z = 0$ et $M_y = M_z = 0$

Les effets des 3 actions de base sont étudiés dans les paragraphes suivants.

a) Effort normal dans une poutre

On considère une poutre droite (barre) isostatique de module d'Young E , de longueur L et de section $S(x)$ soumise à un effort normal N_{ext} . L'effort normal est constant le long de la barre et vaut $N(x) = -N_{\text{ext}}$. La contrainte est constante le long de la barre et dans la section droite et vaut : $\sigma_{xx} = N_x(x)/S$. Par la loi de comportement, $\epsilon_{xx} = \sigma_{xx}/E = N(x)/ES(x)$. La déformation latérale, dans les directions z et y vaut $\epsilon_{yy} = \epsilon_{zz} = -\nu\epsilon_{xx}$. Considérant la relation entre le déplacement axial et la déformation axiale, nous pouvons exprimer la loi de comportement généralisée d'une poutre sous un effort axial centré :

$$N(x) = ES(x) \frac{\partial u_x}{\partial x}$$

Le déplacement en tout point d'une barre s'obtient par intégration :

$$u(x) = \int_0^x \frac{N}{ES(s)} ds$$

b) Moment fléchissant dans une poutre

Considérant une flexion plane selon la direction \vec{y} , l'hypothèse d'Euler-Bernoulli permet d'obtenir le profil des déformations axiales le long de la section droite :

$$\epsilon_{xx} = -\frac{\partial \theta_z}{\partial x} \cdot y = -\chi_z \cdot y$$

Utilisant la loi de comportement uniaxiale reliant la contrainte et la déformation ainsi que la définition d'une contrainte généralisée de flexion, nous

pouvons exprimer le moment fléchissant dans une section Σ d'abscisse x par :

$$M_z = \int_{\Sigma} E \chi_z \cdot y^2 ds$$

Soit, en introduisant la définition du moment d'inertie quadratique $I_{G_z} = \int_{\Sigma} y^2 ds$, la loi de comportement généralisée d'une poutre en flexion :

$$M_z = EI_{G_z} \chi_z$$

Pour deux sections infiniment voisines, sous l'hypothèse des petits déplacements et petites déformations, on peut assimiler la courbure de la poutre à la dérivée de la rotation, soit la dérivée seconde du déplacement :

$$M_z = EI_{G_z} \frac{\partial^2 u_y(x)}{\partial x^2}$$

La contrainte normale, en fonction du moment fléchissant, est obtenue en tout point de la poutre par :

$$\sigma_{xx}(x, y) = -\frac{M_z(x)y}{I_{G_z}}$$

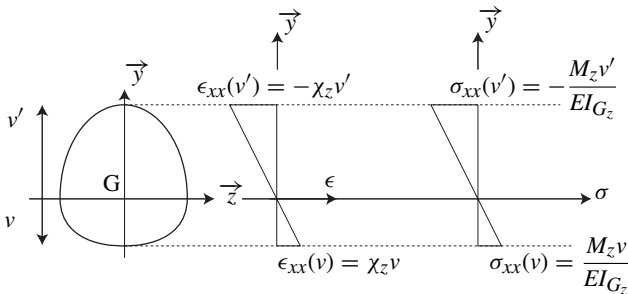


Figure 1.6

Les distributions de la déformation et de la contrainte normale le long de la section sont linéaires.

c) Moment de torsion dans une poutre

Considérons une poutre de section circulaire (pleine ou évidée), de rayon R soumise à un moment de torsion constant M_x . La contrainte de cisaillement en tout point P, repéré par sa distance r au centre de gravité G de la section est obtenue par :

$$\tau = \frac{M_x r}{J}$$

avec J le moment quadratique de torsion ($J = \pi R^4/2$, pour une section pleine et $J = \pi(R_1^4 - R_2^4)/2$ pour une section évidée de rayon intérieur R_2).

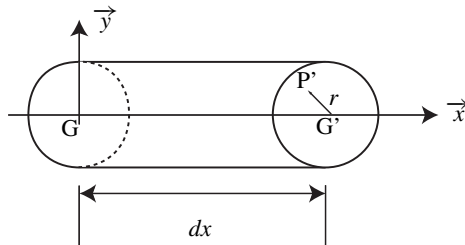


Figure 1.7

Le déplacement relatif de deux sections voisines distantes de dx est une rotation $d\theta$ autour de l'axe \vec{x} . En introduisant le module de cisaillement du matériau G , la loi de comportement généralisée d'une poutre en torsion est :

$$\frac{d\theta}{dx} = -\frac{M_x}{GJ}$$

Pour toute section droite autre que circulaire, l'expression de la contrainte et de la loi de comportement généralisée doit prendre en compte le gauchissement des sections.

- *Section rectangulaire*

En considérant une section rectangulaire de hauteur h et d'épaisseur e (avec $e < h$), la contrainte de cisaillement maximum vaut $\tau_{\max} = M_x/k_1 h e^2$ et la

loi de comportement généralisée s'exprime par :

$$\frac{d\theta}{dx} = -\frac{M_x}{Gk_2he^3}$$

Les valeurs de k_1 et k_2 peuvent être estimées à l'aide du tableau suivant :

h/e	1	1,5	2,0	2,5	3	4	5	10	∞
k_1	0,208	0,231	0,246	0,258	0,267	0,282	0,291	0,312	1/3
k_2	0,141	0,196	0,229	0,249	0,263	0,281	0,291	0,312	1/3

• *Profils minces ouverts*

Pour des poutres dont les sections droites s'apparentent à un I ou un U, les contraintes maximales de cisaillement peuvent être approximées de la manière suivante :

$$\tau_{1 \max} = \frac{3M_x e_1}{h_1 e_1^3 + 2h_2 e_2^3}$$

Dans l'aile du profilé :
$$\tau_{2 \max} = \frac{3M_x e_2}{h_1 e_1^3 + 2h_2 e_2^3}$$

La loi de comportement généralisée s'exprime par :
$$\frac{d\theta}{dx} = -\frac{3M_x}{G(h_1 e_1^3 + 2h_2 e_2^3)}$$

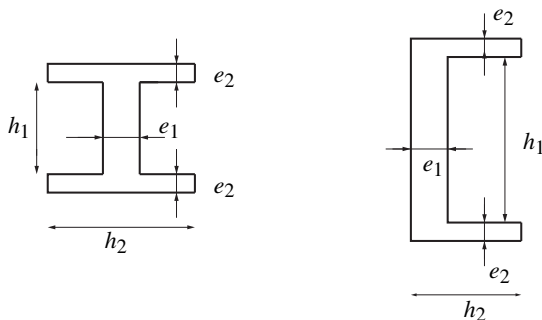


Figure 1.8

- *Tube mince ouvert*

De manière analogue aux sections rectangulaires étroites, lorsque le rapport h/e tend vers l'infini :

$$\tau_{\max} = \frac{3M_x}{he^2} \quad \frac{d\theta}{dx} = -\frac{3M_x}{Ghe^3}$$

- *Tube mince fermé*

Pour un tube mince fermé, le flux de cisaillement le long du tube est constant, de même donc pour la contrainte de cisaillement. En dénommant Γ la ligne moyenne du tube, et S l'aire délimitée par cette ligne moyenne, on peut calculer la contrainte de cisaillement par :

$$\tau = \frac{M_x}{2Se}$$

et la loi de comportement généralisée :

$$\frac{d\theta}{dx} = -\frac{M_x}{GJ}$$

avec $J = 4S^2 / \int_{\Gamma} \frac{ds}{e}$

1.2.2 Poutre en flexion simple

En flexion simple, viennent se superposer aux contraintes normales engendrées par le moment fléchissant, les contraintes de cisaillement liées à la présence d'un effort tranchant non nul à l'abscisse x de la poutre. Pour une section droite quelconque, de moment quadratique I_z , la contrainte de cisaillement, en tout point y de cette section s'obtient comme indiqué en figure 1.9.

$b(y)$ est la largeur de la poutre à l'ordonnée y et $\mathcal{H}(y)$ est le moment statique (défini au paragraphe 2.2.3) de la section au-dessus de l'ordonnée y . Pour une section rectangulaire (largeur b et hauteur h), le profil des contraintes de cisaillement est parabolique, nul aux bords et maximum au centre :

$$\tau(y) = \frac{3V_y(x)}{2bh} \left(1 - \frac{4y^2}{h^2} \right)$$

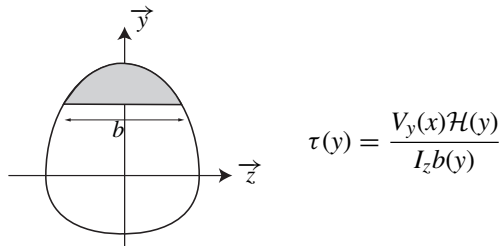


Figure 1.9

Le diagramme des contraintes normales reste linéaire dans la section :
 $\sigma_{xx}(x, y) = -M_z(x)y/I_z$.

1.2.3 Poutre en flexion déviée

Lorsque l'axe du moment fléchissant extérieur ne correspond pas avec l'un des axes principaux d'inertie de la section, il est nécessaire de décomposer ce dernier en deux composantes, selon les axes principaux d'inertie de la section afin de procéder au calcul des contraintes par superposition. Ainsi, la contrainte normale pourra être obtenue par :

$$\sigma_{xx}(x) = \frac{M_y(x)z}{I_y} - \frac{M_z(x)y}{I_z}$$

Si une section droite est repérée par un système de coordonnées $x'y'z'$, Les axes principaux d'inertie d'une section droite portée par la normale \vec{x}' sont obtenues par une rotation d'un angle α autour de x' tel que :

$$\tan 2\alpha = \frac{2I_{y'z'}}{I_{z'} - I_{y'}}$$

1.2.4 Poutre en flexion composée

Lorsqu'aux actions de flexion se rajoute une composante d'effort normal, nous parlerons de flexion composée. La contrainte normale est obtenue par

superposition des différents termes :

$$\sigma_{xx}(x) = \frac{N}{S} + \frac{M_y(x)z}{I_y} - \frac{M_z(x)y}{I_z}$$

Dans certains cas, il peut être intéressant de remarquer que le système d'effort est équivalent à un effort unique appliqué dans le plan de la section appelé le « centre de pression ». La position de ce centre de pression est $y_1 = -M_z/N$ et $z_1 = M_y/N$. Si le centre de pression est à l'intérieur « du noyau central » de la section, alors toutes les contraintes normales sont de même signe, quel que soit le point de la section droite considérée. À l'inverse, si le centre de pression est en dehors du noyau central, alors les contraintes normales de part et d'autres de la section droite seront de signes contraires. La limite du noyau central est obtenue en faisant coïncider l'axe neutre de la poutre avec le contour de la section droite.

Prenons l'exemple d'une poutre rectangulaire (section $b \times h$) ne subissant qu'un moment de flexion M_z et un effort normal N . La position du centre de pression repérée par ses coordonnées $z_1 = 0$ et $y_1 = -M_z/N$ permet de calculer la contrainte en tout point, sachant que $I_z = bh^3/12$:

$$\sigma_{xx} = \frac{N}{bh} + \frac{6M_z}{bh^2}$$

Pour les bords les plus sollicités :

$$\sigma_{xx}(y_1) = \frac{N}{S} \left(1 + 6 \frac{y_1}{h} \right)$$

$$\sigma_{xx}(-y_1) = \frac{N}{S} \left(1 - 6 \frac{y_1}{h} \right)$$

La frontière du noyau central, dans ce cas, est obtenue en imposant $\sigma_{xx} = 0$ en $y = y_1$ et $y = -y_1$, soit $h/6$ et $-h/6$. La même étude peut être effectuée pour une flexion selon z due à un moment M_y permettant de définir pour limite du noyau central $b/6$ et $-b/6$. La forme du noyau central pour une section rectangulaire est un losange centré sur G, de dimension $h/3$ et $b/3$.