Mathématiques

BTS industriels

Groupement A

2e édition

Mathématiques BTS industriels Groupement A

Cours conforme au référentiel, QCM, exercices et sujets corrigés

2e édition

Laurent LUBRANO
Professeur au lycée Duplessis-Mornay (Saumur)

Véronique CHEVRIER
Professeure au lycée Sadi Carnot (Saumur)

Stéphane LE MÉTEIL
Professeur au lycée Robert Schuman (Le Havre)

Patrick LEMÉNICIER
Professeur au lycée Pierre-Gilles de Gennes
ENCPB-Paris

DUNOD

11 rue Paul Bert, 92240 Malakoff
www.dunod.com
ISBN 978-2-10-074704-7

TABLE DES MATIÈRES

FONCTIONS D'UNE VARIABLE RÉELLE

1

PRÉREQUIS

- Notion d'ensemble de définition d'une fonction
- Variations et représentation graphique d'une fonction dans un repère du plan
- Dérivabilité d'une fonction
- Limites et intervalles

MOTS-CLÉS

- Ensemble de définition
- Variations – Extremum
- Limite – Dérivée – Asymptote
- Parité – Périodicité
- Fonctions : affines, polynôme de degré 2, exponentielle, logarithme népérien, racine carrée, puissances, circulaires, circulaire réciproque

OBJECTIFS

- Savoir traiter les situations pouvant être modélisées mathématiquement par des fonctions à valeurs réelles, représentant des «phénomènes continus»

1.1 SE REPÉRER AVEC LA NOTION DE FONCTION

1.1.1 Le modèle, l'exact et le vrai

L'étude des fonctions est soumise à de nombreux concepts qui, s'ils ne sont pas clairement identifiés et utilisés, peuvent bloquer une étude pourtant facilement réalisable.

Les fonctions servent à modéliser des phénomènes continus. Pour cela il faut établir une relation entre une situation existante et un modèle mathématique capable de l'approcher au mieux dans certaines conditions.

Exemple

La loi d'Ohm $U = R \times I$ présente la différence de potentiel U aux bornes d'un composant résistif comme une fonction linéaire du courant I qui traverse ce composant. Ce modèle n'est valable que dans certaines conditions liées entre autres à la température et à la technologie de fabrication du composant résistif. Ce modèle n'est pas universel et s'appliquera dans certaines conditions seulement.

En préalable à toute étude mettant en jeu des fonctions, il convient de ne pas se couper du cadre réel de l'étude, et de bien positionner la validité du modèle. Il faut faire la distinction entre ce qui sera « exact » comme le résultat d'un calcul utilisant le modèle, et ce qui sera « vrai », c'est-à-dire le phénomène réel qui se produit.

Calculs avec un composant présentant une tolérance

Un générateur continu de $U = 10$ V *et* 5 A *max est branché aux bornes d'une résistance R en technologie couche carbone de valeur nominale* 100 Ω *et de tolérance* 10 %. *Le calcul du courant débité I peut donc donner des résultats entre deux valeurs extrêmes que l'on demande de déterminer.*

Solution. Le modèle de calcul donnant le courant minimal est obtenu pour $R = 110\,\Omega$ et donc $U = 110 \times I$ donc $I = \dfrac{10}{110}$ A.

Le modèle de calcul donnant le courant maximal est obtenu pour $R = 90\,\Omega$ et donc $U = 90 \times I$ donc $I = \dfrac{10}{90}$ A.

1.1.2 L'ensemble de définition

Mathématiquement une fonction peut être définie sur $\mathbb{R}$. Cependant les modèles utilisés sont rarement valables pour une variable parcourant l'ensemble des nombres réels.

Définition 1.1

L'**ensemble de définition** d'une fonction f est l'ensemble des x tel que $f(x)$ existe (sauf limitation propre à la validité d'un modèle).

Exemple : Allongement d'un ressort

La longueur d'un ressort soumis à une force d'allongement est une fonction de k, avec k la constante de raideur du ressort. En considérant la résistance mécanique maximale de l'alliage composant les spires du ressort, une trop forte tension entraînera une rupture, et le modèle y trouvera lui aussi ses limites. C'est donc seulement pour une certaine plage de valeurs d'entrées de la force, que le modèle pourra être exploité. Il n'a pas de sens en dehors de ces valeurs de l'ensemble de définition.

Détermination d'un ensemble de définition

Déterminer les ensembles de définition maximum des fonctions suivantes :

$$f : x \mapsto \frac{1}{x+4} \quad \text{et} \quad g : x \mapsto \sqrt{x-2}$$

SOLUTION. Pour f, il faut $x + 4 \neq 0$ c'est-à-dire $x \neq -4$. Donc $Df = \mathbb{R} - \{-4\}$. Pour g, il faut $x - 2 \geq 0$ c'est-à-dire $x \geq 2$. Donc $Dg = [2\,;+\infty[$.

Point méthode

Trois cas peuvent se présenter :
- L'expression au dénominateur ne peut pas être nulle.
- L'expression sous un radical doit être positive ou nulle.
- L'expression dont on calcule le logarithme népérien (ln) doit être > 0.

1.1.3 Les variations

a) Extremum d'une fonction sur un intervalle

Définition 1.2

Soit f une fonction définie sur un intervalle I, de courbe représentative C. Soit a un réel de I.

- Dire que $f(a)$ est le **maximum** de f sur I signifie que pour tout réel x de I, $f(x) \leq f(a)$.
- Dire que $f(a)$ est le **minimum** de f sur I signifie que pour tout réel x de I, $f(x) \geq f(a)$.

Exemple : Couple d'un moteur asynchrone

Le couple d'un moteur asynchrone présente un maximum et un minimum en fonction de la vitesse de fonctionnement. Ces informations permettent de différencier les différentes zones d'utilisation de cette machine.

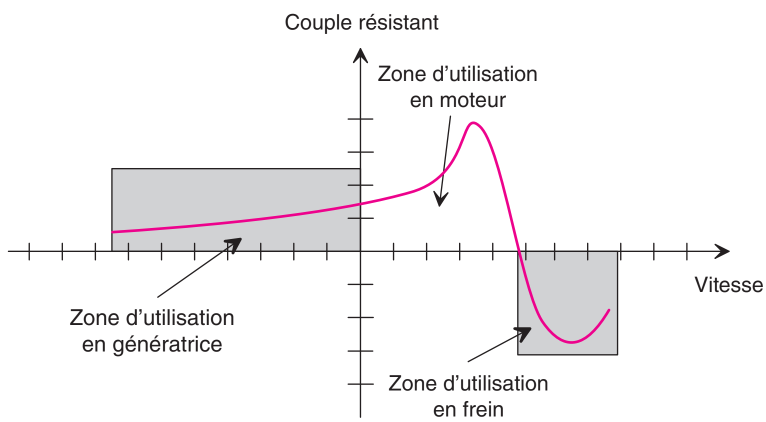

Figure 1.1 Les trois domaines d'utilisation d'une machine asynchrone.

b) Sens de variation d'une fonction sur un intervalle

Des variations trop rapides peuvent empêcher un traitement en aval du phénomène. De même des variations lentes permettent d'envisager un traitement éventuel moins coûteux. Ici encore le signe de la dérivée de la fonction modèle va permettre rapidement de repérer les variations sur les différents intervalles (voir § 1.1.5).

Définition 1.3

Soit f une fonction définie sur un intervalle I, de courbe représentative C. Soient a et b des réels.

- f est **croissante** sur I signifie que, si $a < b$ alors $f(a) < f(b)$.
- f est **décroissante** sur I signifie que, si $a < b$ alors $f(a) > f(b)$.

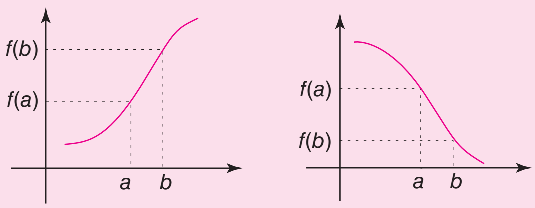

Figure 1.2 **Croissance – Décroissance.**

Exemple

L'évolution de l'intensité du courant électrique durant la charge puis la décharge d'un condensateur à travers une résistance.

Charge d'un condensateur à travers une résistance

À $t = 0s$, on ferme K_1 et on ouvre K_2. Le condensateur étant déchargé, il se charge pour obtenir la différence de potentiel E (jamais atteinte dans la réalité) à travers la résistance R et avec la constante de temps $\tau = R \times C$.

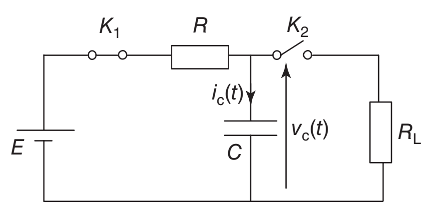

Figure 1.3

Décharge d'un condensateur à travers une résistance

À $t' = 0s$ (on considère que C est chargé à une valeur proche de E) on ouvre K_1 et on ferme K_2. Les charges emmagasinées dans le condensateur s'évacuent du composant dans le circuit externe R_L, C.

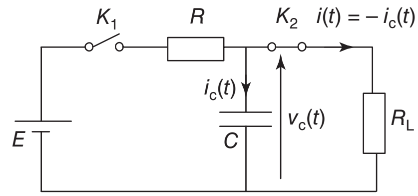

Figure 1.4

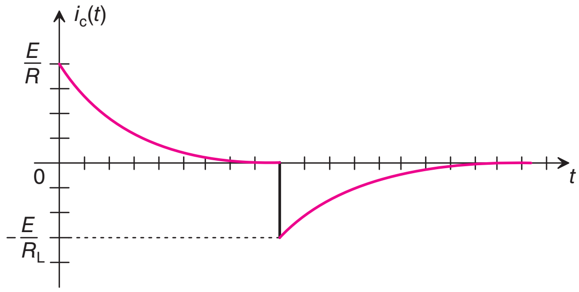

Figure 1.5 **Évolution de la valeur de l'intensité du courant électrique lors d'une charge/décharge de condensateur à travers une résistance.**

La courbe représentative présente une décroissance sur un premier intervalle, puis une croissance sur le second.

Remarque

On dit que f est monotone sur un intervalle I si elle est soit croissante, soit décroissante sur cet intervalle.

Étude des variations d'une fonction

Soient f et g les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par : $f(t) = 7 - 3t^2$ et $g(t) = 6\sqrt{3}\ t - 2\sqrt{3}\ t^2$.
Étudier les variations des fonctions f et g.

Solution. La fonction f varie comme l'opposé de la fonction carré donc selon le tableau des variations suivant car sa dérivée f' est telle que $f'(t) = -6t$.

t	$-\infty$		0		$+\infty$
$f(t)$	$-\infty$	$\nearrow$	7	$\searrow$	$-\infty$

Figure 1.6

La fonction dérivée g' de g peut s'écrire sous la forme : $g'(t) = 2\sqrt{3}(3-2t)$. Un tableau de signes simple permet de déterminer le tableau de variations de la figure 1.7.

t	$-\infty$		$\frac{3}{2}$		$+\infty$
$g(t)$	$-\infty$	$\nearrow$	$\frac{9\sqrt{3}}{2}$	$\searrow$	$-\infty$

Figure 1.7

Point méthode

- L'étude des variations passe par l'étude du signe de la dérivée. (§ 1.1.5)
- Pour étudier le signe d'une expression, il est souvent utile de la factoriser. On peut ensuite utiliser un tableau de signes.

1.1.4 Limites

Considérons de nouveau la charge d'un condensateur à travers une résistance. Le montage sera le même que celui de la figure 1.3.

L'évolution de la différence de potentiel aux bornes du condensateur a pour courbe représentative la figure 1.8. Le modèle considéré est celui d'une fonction f dont la variable est le temps t. Les images par la fonction f de chaque valeur temporelle t sont les valeurs $f(t)$.

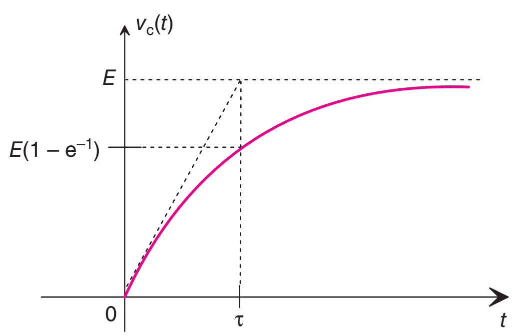

Figure 1.8

Une valeur particulière de t est la valeur de la constante de temps τ du circuit R-C à laquelle la fonction f associe l'image $f(\tau) = E\left(1 - e^{-1}\right)$.

Pour plus de facilité nous lui attribuerons la grandeur $a = E\left(1-\mathrm{e}^{-1}\right)$.

- Si la question posée est : Quelle peut bien être la valeur vers laquelle se dirige la courbe représentative de la fonction lorsque $t = \tau$, il est facile de répondre que comme l'image de τ existe par la fonction f et que le tracé est continu, alors la courbe se dirige vers $f(\tau) = a$.
- Ce qui se traduira mathématiquement par : $\lim\limits_{t\to\tau} f(t) = f(\tau) = a$. Ceci indique d'ailleurs que f est continue en τ.
- Si la question posée est : Quelle peut bien être la valeur vers laquelle se dirige la courbe représentative de la fonction lorsque $t \to +\infty$, il n'est pas facile de répondre. En effet, un condensateur réel ne peut jamais être chargé à son maximum car il y a des pertes de charge permanentes à travers les résistances de métallisation des contacts et dans l'air (Résistance non infinie de l'air). « L'image de l'infini par la fonction f » n'est donc pas quelque chose d'existant pratiquement.
- La réponse à la question précédente est donc une extrapolation de notre courbe en considérant un temps infini et en remarquant que de toute façon la différence de potentiel de notre condensateur ne dépassera jamais la valeur maximale E.
- La courbe se dirige vers E. Ce qui se traduira mathématiquement par :

$$\lim_{t\to+\infty} f(t) = E.$$

Il convient donc de considérer lors de l'étude des limites d'une fonction, si cette fonction est définie ou non au point d'étude considéré, et si cette recherche de limite concerne un point ou l'infini.

Lorsqu'on connaît les limites des fonctions f et g, on peut en déduire les limites des fonctions $f+g$; $f\times g$ et $\dfrac{f}{g}$.

Théorème 1.4 Limites d'une somme de deux fonctions

l et l' sont deux réels. Les limites des fonctions f et g sont considérées en un réel a, ou en $+\infty$, ou en $-\infty$:

$\lim f$	l	l	l	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$
$\lim g$	l'	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
$\lim (f+g)$	$l+l'$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	*F.I (Forme indéterminée)*

Théorème 1.5 Cas indéterminé dans la limite d'une somme

Les limites des fonctions f et g sont considérées en un réel a, ou en $+\infty$, ou en $-\infty$: Si f a pour limite $+\infty$ et si g a pour limite $-\infty$, alors la détermination de la limite de $f+g$ demande une étude particulière. On dit que c'est un cas indéterminé $+\infty - \infty$.

Théorème 1.6 Limites d'un produit de deux fonctions

l et l' sont deux réels. Les limites des fonctions f et g sont considérées en un réel a, ou en $+\infty$, ou en $-\infty$:

$\lim f$	l	$l>0$	$l>0$	$l<0$	$l<0$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	0
$\lim g$	l'	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$\pm\infty$
$\lim (f\times g)$	$l\times l'$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$F.I$

Théorème 1.7 Cas indéterminé dans la limite d'un produit

Les limites des fonctions f et g sont considérées en un réel a, en $+\infty$, ou en $-\infty$:
Si f a pour limite 0 et si g a pour limite $\pm\infty$, alors la détermination de la limite de $f\times g$ demande une étude particulière. On dit que c'est un cas indéterminé $0\times\infty$.

Théorème 1.8 Limites d'un quotient de deux fonctions

l et l' sont deux réels. Les limites des fonctions f et g sont considérées en un réel a, ou en $+\infty$, ou en $-\infty$:

$\lim f$	l	l	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
$\lim g$	$l'\neq 0$	$\pm\infty$	$l'>0$	$l'<0$	$l'>0$	$l'<0$
$\lim\left(\dfrac{f}{g}\right)$	$\dfrac{l}{l'}$	0	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$

$\lim f$	$l>0$	$l>0$	$l<0$	$l<0$	0	$\pm\infty$
$\lim g$	0^+	0^-	0^+	0^-	0	$\pm\infty$
$\lim\left(\dfrac{f}{g}\right)$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$F.I$	$F.I$

Théorème 1.9 Cas indéterminés dans la limite d'un quotient

Les limites des fonctions f et g sont considérées en un réel a, ou en $+\infty$, ou en $-\infty$:

- Si f a pour limite 0 et si g a pour limite 0, alors la détermination de la limite de $\dfrac{f}{g}$ demande une étude particulière. Cas indéterminé $\dfrac{0}{0}$.
- Si f a pour limite $\pm\infty$ et si g a pour limite $\pm\infty$, alors la détermination de la limite de $\dfrac{f}{g}$ demande une étude particulière. Cas indéterminé $\dfrac{\infty}{\infty}$.

Détermination d'une limite

La fonction échelon unité U est définie par U(t) = 0 si t < 0 et U(t) = 1 si t ≥ 0. La réponse y(t) d'un système soumis à un signal d'entrée x(t) est telle que Y(p) = H(p) · X(p), X et Y étant les transformées de Laplace respectives des fonctions x et y, et H la fonction de transfert du système.

Dans cet exercice, $H(p)=\dfrac{p+1}{p^2+p+1}$, *et le signal d'entrée est la fonction rampe définie par x(t) = t · U(t). Calculer Y(p) et en déduire*

$$y\left(0^+\right)=\lim_{\substack{t\to 0\\ t>0}} y(t).$$

On pourra utiliser le théorème de la valeur initiale.

SOLUTION. $H(p)=\dfrac{p+1}{p^2+p+1}$ et $X(p)=\dfrac{1}{p^2}$ car $x(t)=t\cdot U(t)$.

$Y(p)=H(p)\times X(p)=\dfrac{p+1}{p^2\left(p^2+p+1\right)}$ donc

$$\lim_{p\to+\infty} pY(p)=\lim_{p\to+\infty}\frac{p+1}{p\left(p^2+p+1\right)}=\lim_{p\to+\infty}\frac{p}{p^3}=\lim_{p\to+\infty}\frac{1}{p^2}=0.$$

En utilisant le théorème de la valeur initiale, $y\left(0^+\right)=\lim_{t\to 0^+} y(t)=0$.

Point méthode

Pour enlever certaines formes indéterminées lors de la détermination de limites, on peut soit :

- Transformer l'expression algébrique en développant ou en factorisant.
- Utiliser les théorèmes en respectant leurs domaines d'utilisation.

1.1.5 Dérivée

La notion de dérivée reste souvent mal exploitée car sa signification pratique, autre que calculatoire, n'est pas mise en évidence.

Restons quelques instants « terre à terre » ou plutôt sur la neige. Dans une station de ski la difficulté des pistes est indiquée par une couleur, présente sur les cartes et au bord des pistes avec des piquets colorés. Cette même difficulté aurait pu être repérée zone par zone par un nombre indiquant la pente de chaque segment de piste aussi petit soit-il. On aurait donc pu, remplacer les piquets de couleur par des nombres successifs. Sur une piste, les variations de terrain étant très importantes, il faudrait, en faisant une étude très précise, marquer une très grande quantité de nombres différents.

En chaque endroit repéré, le nombre indiqué représente le « nombre dérivé », c'est-à-dire « la pente » en cet endroit. Pour faire encore plus mathématique, ce nombre représente le coefficient directeur de la tangente au relief (ramené bien sûr à un plan) au point considéré. La suite de tous ces nombres dérivés peut être en première approche considérée comme issue d'un calcul utilisant l'expression algébrique de la fonction dérivée d'une fonction décrivant une coupe du relief.

La dérivée d'une fonction sur un intervalle n'est rien d'autre qu'une autre fonction décrivant en continu les variations (les pentes, exprimées par les nombres dérivés) d'un phénomène réel.

Si le modèle utilisé est celui d'une fonction linéaire comme la loi d'Ohm : $U = R \times I$, l'expression de l'intensité du courant est donc : $I = \dfrac{1}{R} \times U$ et la dérivée de la fonction qui à la variable U associe $I = f(U) = \dfrac{1}{R} \times U$ est sur $\mathbb{R}$ la fonction $f'(U) = \dfrac{1}{R}$ qui est une fonction constante. Cela signifie qu'en tout point de la courbe représentative de la fonction f, la pente est constante et vaut $\dfrac{1}{R}$.

Ceci est bien visible sur la courbe représentative de f qui peut s'apparenter à une belle piste de ski, de pente uniforme parfaite sur une certaine longueur.

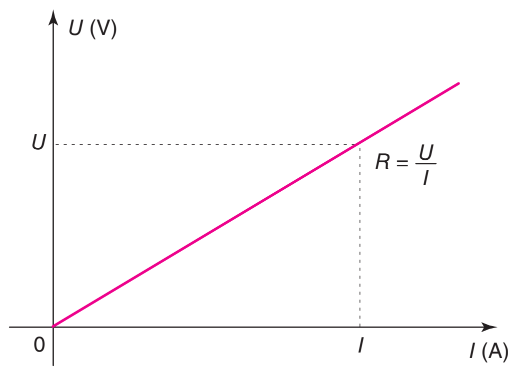

Figure 1.9

Dans le cas précédent, notre fonction dérivée est une constante positive, ce qui indique que lorsque la différence de potentiel augmente, la valeur de l'intensité du courant dans la résistance augmente aussi.

Définition 1.10

Soit f une fonction et a un réel appartenant à l'ensemble de définition de f.
Dire que f est **dérivable** en a signifie qu'il existe un réel L tel que :

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = L.$$

Le réel L est appelé nombre dérivé de f en a.
Notation : $L = f'(a)$.