Table des matières

15 Calculs de dérivées

Dans ce chapitre, nous étudions les dérivées de façon élémentaire et du point de vue du calcul. Cette étude sera reprise, approfondie et complétée dans le chapitre 27.
Dans tout le chapitre, I désigne un intervalle de $\mathbb{R}$ non vide ni réduit à un point, et on note $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.
On rappelle que $\mathbb{K}^I$ désigne l'ensemble des applications de I dans $\mathbb{K}$.

Rappels de cours

1 Dérivée d'une fonction en un point

Définition

Soient $a \in I$, $f \in \mathbb{K}^I$.

On dit que f est **dérivable** en a si et seulement si $\lim\limits_{h \longrightarrow 0} \dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$ existe et est finie ; cette limite est alors notée $f'(a)$ (ou aussi : $\dfrac{\mathrm{d}\,f}{\mathrm{d}\,x}(a)$) et appelée **dérivée** de f en a.

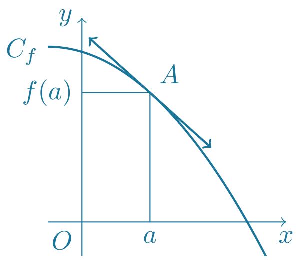
Ainsi, sous réserve d'existence : $$f'(a) = \lim_{h \longrightarrow 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

Exemple

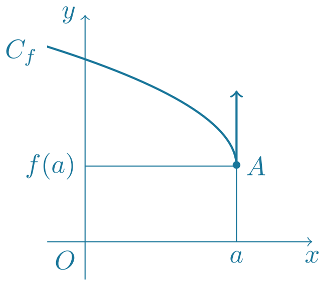
1) Pour tout $c \in \mathbb{K}$, la fonction constante $f : I \in \mathbb{K},\quad x \longmapsto c$ est dérivable en tout point $a \in I$, et $f'(a) = 0$.

2) La fonction $g : I \longrightarrow \mathbb{K},\quad x \longmapsto x$ est dérivable en tout point $a \in I$, et $f'(a) = 1$.

Le rapport $\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$ (pour $a \in I$ et $h \in \mathbb{R}^*$ tel que $a+h \in I$) est appelé le **taux d'accroissement** (ou aussi : taux de variation) de f entre a et $a+h$.
Si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, la dérivabilité de f en a se traduit graphiquement par l'existence d'une tangente, non parallèle à $(y'y)$, en le point de coordonnées $\big(a,\ f(a)\big)$ à la représentation graphique C_f de f.
Cette tangente a pour équation cartésienne : $y - f(a) = f'(a)(x-a)$.



Si $\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h} \underset{h \longrightarrow 0^\pm}{\longrightarrow} \pm\infty$, alors la représentation graphique C_f de f admet en $A\big(a,\, f(a)\big)$ une demi-tangente parallèle à $(y'y)$.



Proposition

On a, pour tous $a \in I$, $\lambda \in \mathbb{K}$, $f, g : I \longrightarrow \mathbb{K}$ dérivables en a :

- $f+g$ est dérivable en a et $(f+g)'(a) = f'(a) + g'(a)$
- λf est dérivable en a et $(\lambda f)'(a) = \lambda f'(a)$
- fg est dérivable en a et $(fg)'(a) = f'(a)g(a) + f(a)g'(a)$
- si $g(a) \neq 0$, alors $\dfrac{1}{g}$ est dérivable en a et $\left(\dfrac{1}{g}\right)'(a) = -\dfrac{g'(a)}{\big(g(a)\big)^2}$
- si $g(a) \neq 0$, alors $\dfrac{f}{g}$ est dérivable en a et $\left(\dfrac{f}{g}\right)'(a) = \dfrac{f'(a)g(a) - f(a)g'(a)}{\big(g(a)\big)^2}$
- si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, alors les trois assertions suivantes sont deux à deux équivalentes :
  (1) f est dérivable en a
  (2) $\overline{f}$ est dérivable en a
  (3) $\mathrm{Re}\,(f)$ et $\mathrm{Im}\,(f)$ sont dérivables en a.

De plus, si f est dérivable en a, alors :

$$(\overline{f})'(a) = \overline{f'(a)}, \qquad \big(\mathrm{Re}\,(f)\big)'(a) = \mathrm{Re}\,\big(f'(a)\big), \qquad \big(\mathrm{Im}\,(f)\big)'(a) = \mathrm{Im}\,\big(f'(a)\big).$$

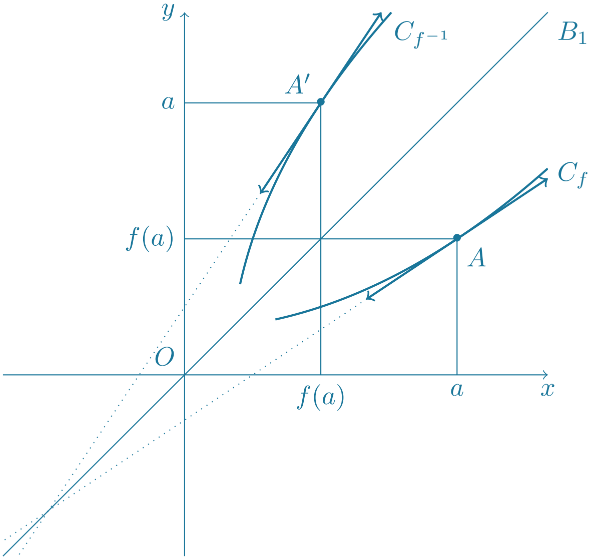
Théorème : dérivée d'une composée en un point

Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$, $a \in I$, $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction, J un intervalle de $\mathbb{R}$ tel que $f(I) \subset J$, $g : J \longrightarrow \mathbb{K}$ une fonction. Si f est dérivable en a et si g est dérivable en $f(a)$, alors $g \circ f$ est dérivable en a et : $\boxed{(g \circ f)'(a) = g'\big(f(a)\big)f'(a)}$

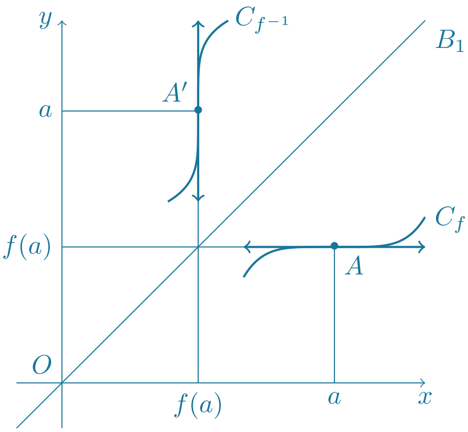
Théorème : dérivée d'une fonction réciproque en un point

Soient $a \in I$, $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue (on anticipe sur le chapitre 26) et strictement monotone sur I, dérivable en a et telle que $f'(a) \neq 0$.
Alors, la fonction $f^{-1} : f(I) \longrightarrow \mathbb{R}$, réciproque de f, est dérivable en $f(a)$ et :

$$\boxed{(f^{-1})'\big(f(a)\big) = \frac{1}{f'(a)}}$$



La représentation graphique $C_{f^{-1}}$ de f^{-1} est la symétrique de la représentation graphique C_f de f par rapport à la première bissectrice B_1 du repère, et la tangente en $A'\big(f(a), a\big)$ à $C_{f^{-1}}$ est la symétrique de la tangente à C_f en $A\big(a, f(a)\big)$ par rapport à B_1.



Si $f'(a) = 0$, c'est-à-dire si la tangente en A à C_f est parallèle à $(x'x)$, et si f est bijective, alors $C_{f^{-1}}$ admet une tangente en A' et celle-ci est parallèle à $(y'y)$.

2 Fonction dérivée d'une fonction

La plupart des définitions et propriétés de ce paragraphe peuvent être étendues aux fonctions définies sur la réunion d'un nombre fini d'intervalles ouverts deux à deux disjoints.

Définition

Soit $f \in \mathbb{K}^I$. On appelle **dérivée** (ou aussi : dérivée première, ou aussi : fonction dérivée) de f, et on note f' (ou aussi : $\dfrac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}$) la fonction qui, à chaque $x \in I$ tel que $f'(x)$ existe, associe $f'(x)$. Ainsi, $\mathrm{Def}\,(f')$ est l'ensemble des $x \in I$ tels que f soit dérivable en x, et on a : $f' : \mathrm{Def}\,(f') \longrightarrow \mathbb{K},\quad x \longmapsto f'(x)$.
On dit que f est dérivable sur I si et seulement si f est dérivable en tout point de I, ce qui revient à $\mathrm{Def}\,(f') = I$.

Exemple

1) La fonction $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\quad x \longmapsto x^2$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $f' : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\quad x \longmapsto 2x$
2) La fonction $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\quad x \longmapsto |x|$ est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ et n'est pas dérivable en 0 (les notions de dérivée à gauche et de dérivée à droite, seront vues dans le chapitre 27),
et $g' : \mathbb{R}^* \longrightarrow \mathbb{R},\quad x \longmapsto \begin{cases} -1 & \text{si} \quad x < 0 \\ 1 & \text{si} \quad x > 0 \end{cases}$
3) La fonction $h : [0\,;1] \longrightarrow \mathbb{R},\quad x \longmapsto x(1-x)$ est dérivable sur $[0\,;1]$
et sa fonction dérivée est $h' : [0\,;1] \longrightarrow \mathbb{R},\quad x \longmapsto 1-2x$.

Proposition

On a, pour tous $\lambda \in \mathbb{K}$, $f, g : I \longrightarrow \mathbb{K}$ dérivables sur I :

- $f+g$ est dérivable sur I et $(f+g)' = f' + g'$
- λf est dérivable sur I et $(\lambda f)' = \lambda f'$
- fg est dérivable sur I et $(fg)' = f'g + fg'$
- Si, pour tout $x \in I$, $g(x) \neq 0$, alors $\dfrac{1}{g}$ est dérivable sur I et $\left(\dfrac{1}{g}\right)' = -\dfrac{g'}{g^2}$
- Si, pour tout $x \in I$, $g(x) \neq 0$, alors $\dfrac{f}{g}$ est dérivable sur I et $\left(\dfrac{f}{g}\right)' = \dfrac{f'g - fg'}{g^2}$
- Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{C}$. Les assertions suivantes sont deux à deux équivalentes :
  (1) f est dérivable sur I
  (2) $\overline{f}$ est dérivable sur I
  (3) $\mathrm{Re}\,(f)$ et $\mathrm{Im}\,(f)$ sont dérivables sur I.

De plus, si f est dérivable sur I, alors :
$(\overline{f})' = \overline{f'}, \qquad \big(\mathrm{Re}\,(f)\big)' = \mathrm{Re}\,(f'), \qquad \big(\mathrm{Im}\,(f)\big)' = \mathrm{Im}\,(f')$.

Théorème : dérivée d'une composée

Soient I, J des intervalles de $\mathbb{R}$, $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ telle que $f(I) \subset J$, $g : J \longrightarrow \mathbb{K}$.
On note abusivement $g \circ f : I \longrightarrow \mathbb{K},\quad x \longmapsto g\big(f(x)\big)$.
Si f est dérivable sur I et si g est dérivable sur J, alors $g \circ f$ est dérivable sur I et

$$\boxed{(g \circ f)' = (g' \circ f)\, f'}$$

Dérivées des fonctions usuelles

- Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la fonction $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\ \ x \longmapsto x^n$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et, pour tout $x \in \mathbb{R},\ \ f'(x) = nx^{n-1}$. Par exemple, $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,x}(x^3) = 3x^2$.
- Pour tout $n \in \mathbb{Z}^*$, la fonction $g : \mathbb{R}^* \longrightarrow \mathbb{R},\ \ x \longmapsto x^n$ est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ et, pour tout $x \in \mathbb{R}^*,\ \ g'(x) = nx^{n-1}$. Par exemple, $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\dfrac{1}{x^2}\right) = -\dfrac{2}{x^3}$.
- La fonction $h : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R},\ \ x \longmapsto \sqrt{x}$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$, n'est pas dérivable en 0, et, pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*,\ \ h'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$.
- Pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$ la fonction $k : \mathbb{R}_+^* \longrightarrow \mathbb{R},\ \ x \longmapsto x^\alpha$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et, pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*,\ \ k'(x) = \alpha x^{\alpha-1}$.
- Les fonctions sin et cos sont dérivables sur $\mathbb{R}$ et : $\sin' = \cos,\ \ \cos' = -\sin$.
- La fonction tan est dérivable sur $D = \displaystyle\bigcup_{k\in\mathbb{Z}} \left]-\frac{\pi}{2} + k\pi\,;\frac{\pi}{2} + k\pi\right[$ et on a, pour tout $x \in D :\ \ \tan'(x) = 1 + \tan^2 x = \dfrac{1}{\cos^2 x}$.
- La fonction $u : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\ \ x \longmapsto \mathrm{e}^{\,x}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et on a, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $u'(x) = \mathrm{e}^{\,x}$.
- Pour tout $a \in]0\,;1\cup]1\,;+\infty[$ fixé, la fonction $v : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\ \ x \longmapsto a^x = \mathrm{e}^{\,x\ln a}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et, pour tout $x \in \mathbb{R},\ \ v'(x) = (\ln a)a^x$.
- Pour toute fonction $\varphi : I \longrightarrow \mathbb{C}$ dérivable sur I, la fonction
$$G : I \longrightarrow \mathbb{C},\ \ x \longmapsto \mathrm{e}^{\,\varphi(x)}$$
est dérivable sur I et on a, pour tout $x \in I$, $G'(x) = \varphi'(x)\,\mathrm{e}^{\,\varphi(x)}$.
- La fonction $w : \mathbb{R}_+^* \longrightarrow \mathbb{R},\ \ x \longmapsto \ln x$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et, pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, $w'(x) = \dfrac{1}{x}$.

Ce paragraphe sera complété dans les chapitres 17 et 18 par les dérivées des fonctions hyperboliques directes et les dérivées des fonctions circulaires réciproques.

Avec la notation différentielle et selon les ensembles de définition, on a donc :

$$\frac{\mathrm{d}(x^\alpha)}{\mathrm{d}x} = \alpha x^{\alpha-1},\quad \frac{\mathrm{d}(\sin x)}{\mathrm{d}x} = \cos x,\quad \frac{\mathrm{d}(\cos x)}{\mathrm{d}x} = -\sin x,\quad \frac{\mathrm{d}(\tan x)}{\mathrm{d}x} = 1 + \tan^2 x,$$
$$\frac{\mathrm{d}(\,\mathrm{e}^{\,x})}{\mathrm{d}x} = \mathrm{e}^{\,x},\quad \frac{\mathrm{d}(a^x)}{\mathrm{d}x} = (\ln a)a^x,\quad \frac{\mathrm{d}(\,\mathrm{e}^{\,\varphi(x)})}{\mathrm{d}x} = \varphi'(x)\,\mathrm{e}^{\,\varphi(x)},\quad \frac{\mathrm{d}(\ln x)}{\mathrm{d}x} = \frac{1}{x}$$

Dérivée logarithmique d'une fonction à valeurs > 0 :

Si une fonction f est un produit de puissances de fonctions, par exemple $f = u^\alpha v^\beta w^\gamma$ où $(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^3$ est fixé et $u, v, w : I \longrightarrow \mathbb{R}$ sont dérivables sur I et à valeurs > 0, alors f est dérivable sur I et, au, lieu d'exprimer f' comme somme de trois produits, $f' = \alpha u^{\alpha-1}u'v^\beta w^\gamma + u^\alpha \beta v^{\beta-1}v'w^\gamma + u^\alpha v^\beta \gamma w^{\gamma-1}w'$, il peut être plus intéressant, en particulier en Physique et Chimie, d'utiliser la dérivée du logarithme de f, appelée **dérivée logarithmique** de f (le terme n'est pas dans le Programme Officiel), qui est : $\quad (\ln\circ f)' = \dfrac{f'}{f} = \alpha\dfrac{u'}{u} + \beta\dfrac{v'}{v} + \gamma\dfrac{w'}{w}$.

Notion de dérivées partielles pour une fonction de plusieurs variables réelles :
Pour une fonction de plusieurs variables réelles, par exemple $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$, on peut, sous réserve d'existence, considérer les **dérivées partielles** de f par rapport à x, par rapport à y, par rapport à z, qui sont obtenues en fixant deux des trois variables et en faisant varier la troisième. Par exemple, la dérivée partielle de f par rapport à x, qui est notée $\dfrac{\partial f}{\partial x}$, est la fonction qui est obtenue en fixant y et z et en dérivant f par rapport à x.

Exemple

Pour $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}, \quad (x, y, z) \longmapsto x^5y^3z^2 + \mathrm{e}^{x^2y^3z^4}$, la dérivée partielle de f par rapport à x est obtenue en fixant y et z et en dérivant par rapport à x :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y, z) = 5x^4y^3z^2 + 2xy^3z^4\,\mathrm{e}^{x^2y^3z^4}$$

et, de même :

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y, z) = 3x^5y^2z^2 + 3x^2y^2z^4\,\mathrm{e}^{x^2y^3z^4}, \quad \frac{\partial f}{\partial z}(x, y, z) = 2x^5y^3z + 4x^2y^3z^3\,\mathrm{e}^{x^2y^3z^4}.$$

3 Variations des fonctions

Proposition

Si $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ est dérivable sur I, alors :

- f est constante si et seulement si $f' = 0$
- f est croissante sur I si et seulement si $f' \geqslant 0$
- f est décroissante sur I si et seulement si $f' \leqslant 0$
- f est strictement croissante sur I si et seulement si :

$f' \geqslant 0$ et f' ne s'annule sur aucun sous-intervalle non vide ni réduit à un point de I

- f est strictement décroissante sur I si et seulement si :

$f' \leqslant 0$ et f' ne s'annule sur aucun sous-intervalle non vide ni réduit à un point de I.

Attention

Si f est strictement croissante, on ne peut pas en déduire que $f' > 0$, on déduit seulement que $f' \geqslant 0$ et, pour tout véritable sous-intervalle de I, f' n'est pas constamment nulle sur ce sous-intervalle.

Exemple

La fonction $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad x \longmapsto x^3$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et on a, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = 3x^2$, donc $f' \geqslant 0$ et f' ne s'annule qu'en 0, donc f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

Les propriétés précédentes sont surtout utilisées dans l'étude des variations des fonctions, et les résultats sont, en général, consignés dans un tableau de variations.

Exemple

La fonction $f : [0\,;+\infty[\longrightarrow \mathbb{R},\ \ x \longmapsto \dfrac{x}{1+x^2}$ est dérivable sur $[0\,;+\infty[$ et, pour tout $x \in [0\,;+\infty[,\ \ f'(x) = \dfrac{1-x^2}{(1+x^2)^2}$, d'où le tableau de variations de f :

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	0	$\nearrow$	$1/2$	$\searrow$	0

Le tableau de variations donne déjà une idée de l'allure de la représentation graphique de la fonction. Dans l'exemple ci-dessus, la fonction f admet un maximum en 1 et ce maximum est égal à $1/2$.

L'étude des variations des fonctions est un outil fondamental en analyse, entre autres pour le calcul d'extremums et l'obtention d'inégalités.

Théorème : dérivée d'une fonction réciproque

Si une fonction $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ est dérivable sur l'intervalle I et si $f' > 0$ ou $f' < 0$, alors l'application (encore notée f) $f : I \longrightarrow f(I),\ \ x \longmapsto f(x)$ est bijective, l'application réciproque $f^{-1} : f(I) \longrightarrow I$ est dérivable sur $f(I)$ et : $\boxed{(f^{-1})' = \dfrac{1}{f' \circ f^{-1}}}$

4 Fonctions de classe C^1

On anticipe ici sur la notion de continuité, qui sera étudiée dans le chapitre 26.

Définition

On dit qu'une fonction $f : I \longrightarrow \mathbb{K}$ est **de classe** C^1 sur I si et seulement si :

f est dérivable sur I et f' est continue sur I.

Remarque :

1) Il se peut qu'une fonction $f : I \longrightarrow \mathbb{K}$ soit dérivable sur I sans être de classe C^1 sur I, c'est-à-dire qu'il se peut que f' existe sur I et que f' ne soit pas continue sur I, ce qui est le cas, par exemple, de la fonction :

$$f : [0\,;+\infty[\longrightarrow \mathbb{R},\ \ x \longmapsto \begin{cases} x^{3/2}\sin\dfrac{1}{x} & \text{si}\ \ x > 0 \\ 0 & \text{si}\ \ x = 0. \end{cases}$$

2) Les fonctions de classe C^1 seront privilégiées par rapport aux fonctions plus généralement dérivables lors de l'étude de l'intégration sur un segment (au second semestre), puis, en seconde année, lors de l'étude des suites et séries de fonctions et des intégrales à paramètre.

Proposition

- Si $\lambda \in \mathbb{K}$ est fixé et si $f, g : I \longrightarrow \mathbb{K}$ sont de classe C^1 sur I, alors $f + g$, λf, fg sont de classe C^1 sur I
- Si $f, g : I \longrightarrow \mathbb{K}$ sont de classe C^1 sur I et si g ne s'annule en aucun point de I, alors $\dfrac{f}{g}$ est de classe C^1 sur I
- Si $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ est de classe C^1 sur I, si $f(I) \subset J$ et si $g : J \longrightarrow \mathbb{K}$ est de classe C^1 sur J, alors $g \circ f$ est de classe C^1 sur I
- Si $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ est de classe C^1 sur I et si $f' > 0$ ou $f' < 0$, alors f^{-1} est de classe C^1 sur $f(I)$.

En résumé : la somme, le produit, le quotient (à dénominateur ne s'annulant pas), la composée, la réciproque (avec $f' > 0$ ou $f' < 0$), de fonctions de classe C^1 sont de classe C^1.

5 Dérivées successives

On convient que, pour toute fonction $f : I \longrightarrow \mathbb{K}$, la dérivée 0-ème de f existe et est égale à f : $f^{(0)} = f$. On définit, sous réserve d'existence, les **dérivées successives** d'une fonction $f : I \longrightarrow \mathbb{K}$ en un point $a \in I$ ou sur tout l'intervalle :

$$f''(a) = (f')'(a), \quad f'' = (f')', \quad f^{(3)}(a) = (f'')'(a), \quad f^{(3)} = (f'')', \ldots$$
$$f^{(n)}(a) = \left(f^{(n-1)}\right)'(a), \quad f^{(n)} = \left(f^{(n-1)}\right)', \ldots$$

Exemple

1) Pour $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \longmapsto x^2$, les dérivées successives sont définies en tout point de $\mathbb{R}$ et on a, pour tout $x \in \mathbb{R}$: $f'(x) = 2x$, $f''(x) = 2$, $f^{(3)}(x) = 0$, $f^{(n)}(x) = 0$ pour tout $n \geqslant 3$.

2) Pour $\omega \in \mathbb{R}_+^*$ fixé, et $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$, $t \longmapsto \mathrm{e}^{\,\mathrm{i}\,\omega t}$ (donc à valeurs complexes), les dérivées successives sont définies en tout point de $\mathbb{R}$ et on a, pour tout $x \in \mathbb{R}$: $g'(x) = \mathrm{i}\,\omega\,\mathrm{e}^{\,\mathrm{i}\,\omega t}$, $g''(x) = -\omega^2\,\mathrm{e}^{\,\mathrm{i}\,\omega t}, \ldots, g^{(n)}(t) = (\mathrm{i}\,\omega)^n\,\mathrm{e}^{\,\mathrm{i}\,\omega t}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $f : I \longrightarrow \mathbb{K}$, on dit que f est n **fois dérivable sur** I si et seulement si, pour tout $x \in I$, les dérivées successives $f'(x), \ldots, f^{(n)}(x)$ existent.

Proposition

On a, pour $\lambda \in \mathbb{K}$ fixé et $f, g : I \longrightarrow \mathbb{K}$ n fois dérivables sur I :

- $f + g$ est n fois dérivable sur I et $(f+g)^{(n)} = f^{(n)} + g^{(n)}$
- λf est n fois dérivable sur I et $(\lambda f)^{(n)} = \lambda f^{(n)}$
- fg est n fois dérivable sur I et $$(fg)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)} g^{(n-k)}$$ formule de Leibniz
- si, de plus, g ne s'annule en aucun point de I, alors $\dfrac{f}{g}$ est n fois dérivable sur I.

Il n'y a pas de formule simple pour la dérivée n-ème d'une composée en général ni pour la dérivée n-ème d'une fonction réciproque en général.

Exercices d'apprentissage

15.1

Calculer les dérivées des fonctions suivantes :

$$a : x \longmapsto \cos(x^2), \qquad b : x \longmapsto \sin\frac{1}{x}, \qquad c : x \longmapsto \mathrm{e}^{-x}\sin x.$$

a) La fonction a est dérivable sur $\mathbb{R}$, par composition, et, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$a'(x) = -2x\sin(x^2).$$

b) De même, la fonction b est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ et, pour tout $x \in \mathbb{R}^*$:

$$b'(x) = -\frac{1}{x^2}\cos\frac{1}{x}.$$

c) De même, la fonction c est dérivable sur $\mathbb{R}$ et, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$c'(x) = -\mathrm{e}^{-x}\sin x + \mathrm{e}^{-x}\cos x.$$

15.2

a) Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ symétrique par rapport à 0, c'est-à-dire tel que : $\forall x \in I, \quad -x \in I$, et $f : I \longrightarrow \mathbb{K}$ une application dérivable sur I.
Montrer que :

1) si f est paire, alors f' est impaire
2) si f est impaire, alors f' est paire.

b) Soient $T \in \mathbb{R}_+^*$, $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{K}$ une application dérivable sur $\mathbb{R}$.
Montrer que, si f est T-périodique, alors f' est aussi T-périodique.

a) 1) Supposons que f est paire, c'est-à-dire :

$$\forall x \in I, \quad f(-x) = f(x).$$

Par composition, la fonction $x \longmapsto f(-x)$ est dérivable sur I et on a, pour tout $x \in I$, en dérivant : $-f'(-x) = f'(x)$, donc f' est impaire.
2) Supposons que f est impaire, c'est-à-dire :

$$\forall x \in I, \quad f(-x) = -f(x).$$

Par composition, la fonction $x \longmapsto f(-x)$ est dérivable sur I et on a, pour tout $x \in I$, en dérivant : $-f'(-x) = -f'(x)$, d'où $f'(-x) = f'(x)$, donc f' est paire.
b) Supposons que f est T-périodique :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x+T) = f(x).$$

Par composition, la fonction $x \longmapsto f(x+T)$ est dérivable sur I et, pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a, en dérivant : $f'(x+T)\cdot 1 = f'(x)$, donc f' est T-périodique.

15.3

a) La fonction $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\quad x \longmapsto \sqrt[3]{(\sin x)^5}$ est-elle dérivable en 0 ?

b) La fonction $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\quad x \longmapsto \sqrt{|\sin x|}$ est-elle dérivable en 0 ?

a) On ne peut pas appliquer le théorème de dérivabilité d'une composée, puisque la fonction $t \longmapsto \sqrt[3]{t}$ n'est pas dérivable en 0. Il nous faut donc revenir à la définition de la dérivabilité en un point.

On a, pour $x \neq 0$: $\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0} = \dfrac{\sqrt[3]{(\sin x)^5}}{x} = \underbrace{\sqrt[3]{(\sin x)^2}}_{\longrightarrow\, 0}\ \underbrace{\dfrac{\sin x}{x}}_{\longrightarrow\, 1} \underset{x \longrightarrow 0}{\longrightarrow} 0.$

On conclut que f est dérivable en 0 et que $f\,'(0) = 0$.

Le lecteur verra au second semestre que, dans certains cas, l'étude de la dérivabilité d'une fonction en un point pourra être facilitée par l'utilisation des développements limités.

b) De même, pour $x \in]0\,;\pi[$: $\dfrac{g(x)-g(0)}{x-0} = \dfrac{\sqrt{|\sin x|}}{x} = \underbrace{\sqrt{\dfrac{\sin x}{x}}}_{\longrightarrow\, 1}\ \underbrace{\dfrac{1}{\sqrt{x}}}_{\longrightarrow\, +\infty} \underset{x \longrightarrow 0+}{\longrightarrow} +\infty.$

On conclut que g n'est pas dérivable en 0.

15.4

Montrer que la fonction $f : \mathbb{R}_+^* \longrightarrow \mathbb{R},\quad x \longmapsto \dfrac{1}{x} - \ln x$ est strictement décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$.

Par opérations, la fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et, pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$:

$$f\,'(x) = -\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x} < 0,$$

donc, d'après le cours, f est strictement décroissante sur l'intervalle $\mathbb{R}_+^*$.

Attention : bien s'assurer que l'on travaille sur un intervalle et non sur une réunion de plusieurs intervalles.

Par exemple, la fonction $g : \mathbb{R}^* \longrightarrow \mathbb{R},\quad x \longmapsto \dfrac{1}{x}$ est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ et, pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, $g'(x) = -\dfrac{1}{x^2} < 0$, mais g n'est pas strictement décroissante sur $\mathbb{R}^*$ car $-1 < 1$ et pourtant $g(-1) < g(1)$.

15.5

Montrer, pour tout $x \in]-1\,;+\infty[$: $\qquad \dfrac{x}{1+x} \leqslant \ln(1+x) \leqslant x.$

1) La fonction $f :]-1\,;+\infty[\longrightarrow \mathbb{R},\quad x \longmapsto \ln(1+x) - \dfrac{x}{1+x}$ est dérivable sur $]-1\,;+\infty[$ et on a, pour tout $x \in]-1\,;+\infty[$:

$$f\,'(x) = \frac{1}{1+x} - \frac{1}{(1+x)^2} = \frac{x}{(1+x)^2},$$

d'où le tableau de variations de f :

x	-1		0		$+\infty$
$f'(x)$	$\|$	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$\|$	$\searrow$	0	$\nearrow$	

Comme $f(0) = 0$, on déduit : $\forall x \in]-1\,;+\infty[,\quad f(x) \geqslant 0$, d'où :

$$\forall x \in]-1\,;+\infty[,\quad \frac{x}{1+x} \leqslant \ln(1+x).$$

2) La fonction $g :]-1\,;+\infty[\longrightarrow \mathbb{R},\quad x \longmapsto x - \ln(1+x)$ est dérivable sur $]-1\,;+\infty[$ et on a, pour tout $x \in]-1\,;+\infty[$:

$$g'(x) = 1 - \frac{1}{1+x} = \frac{x}{1+x},$$

d'où le tableau de variations de g :

x	-1		0		$+\infty$
$g'(x)$	$\|$	$-$	0	$+$	
$g(x)$	$\|$	$\searrow$	0	$\nearrow$	

Comme $g(0) = 0$, on déduit : $\forall x \in]-1\,;+\infty[,\quad g(x) \geqslant 0$, d'où : $\forall x \in]-1\,;+\infty[,\quad \ln(1+x) \leqslant x$.

On conclut à l'encadrement demandé.

Remarque : L'inégalité

$$\forall x \in]-1+\infty[,\quad \ln(1+x) \leqslant x$$

est classique et doit être mémorisée.

15.6

Calculer, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la dérivée n-ème de

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\quad x \longmapsto (x^3 + x - 2)\,\mathrm{e}^{-x}.$$

Par multiplication, pour tout $n \in \mathbb{N}$, f est n fois dérivable sur $\mathbb{R}$ et, en notant $u : x \longmapsto x^3 + x - 2$ et $v : x \longmapsto \mathrm{e}^{-x}$, on a, par la formule de Leibniz, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$f^{(n)}(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} u^{(k)}(x) v^{(n-k)}(x).$$

Attention : Ne pas oublier les coefficients binomiaux dans la formule de Leibniz, ainsi que dans la formule du binôme de Newton.

D'une part, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$u^{(0)}(x) = u(x) = x^3 + x - 2, \qquad u^{(1)}(x) = u'(x) = 3x^2 + 1,$$
$$u^{(2)}(x) = 6x, \qquad u^{(3)}(x) = 6,$$
$$u^{(k)}(x) = 0 \quad \text{pour tout } k \geqslant 4.$$

D'autre part, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$v^{(0)}(x) = v(x) = \mathrm{e}^{-x}, \qquad v^{(1)}(x) = v'(x) = -\mathrm{e}^{-x},$$
$$v^{(\ell)}(x) = (-1)^{\ell}\,\mathrm{e}^{-x} \quad \text{pour tout } \ell \geqslant 0.$$

Ainsi, dans l'expression de $f^{(n)}(x)$, il ne reste au plus que les quatre premiers termes, et on obtient :

$$f^{(n)}(x) = (x^3 + x - 2)(-1)^n\,\mathrm{e}^{-x} + n(3x^2+1)(-1)^{n-1}\,\mathrm{e}^{-x} + \frac{n(n-1)}{2}6x(-1)^{n-2}\,\mathrm{e}^{-x} + \frac{n(n-1)(n-2)}{6}6(-1)^{n-3}\,\mathrm{e}^{-x}$$

et on conclut : $f^{(n)}(x) = (-1)^n\big(x^3 - 3nx^2 + (3n^2-3n+1)x - (n^3-3n^2+3n+2)\big)\,\mathrm{e}^{-x}$.
On peut remarquer que la première formule est vraie pour $n = 0, \ldots, 3$, car, dans ces cas, les facteurs n, $\dfrac{n(n-1)}{2}$, … sont nuls.

15.7

Calculer, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la dérivée n-ème de $\quad f : \mathbb{R}^* \longrightarrow \mathbb{R}, \quad x \longmapsto \dfrac{1}{x}$.

Par quotient, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, f est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ et, pour tout $x \in \mathbb{R}^*$:

$$f(x) = x^{-1}, \qquad f'(x) = -x^{-2}, \qquad f''(x) = (-1)(-2)x^{-3} = 2!\,x^{-3}.$$

Montrons, par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$: $\quad \forall n \in \mathbb{N},\ \forall x \in \mathbb{R}^*, \quad f^{(n)}(x) = (-1)^n\dfrac{n!}{x^{n+1}}$.

1) C'est vrai pour $n = 0$, évident.

2) Si c'est vrai pour un $n \in \mathbb{N}$, alors, pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, en dérivant :

$$f^{(n+1)}(x) = (-1)^n n!\big(-(n+1)\big)x^{-(n+1)-1} = (-1)^{n+1}\frac{(n+1)!}{x^{(n+1)+1}},$$

donc c'est vrai pour $n+1$.

On conclut, par récurrence sur n : $\quad \forall n \in \mathbb{N},\ \forall x \in \mathbb{R}^*, \quad f^{(n)}(x) = (-1)^n\dfrac{n!}{x^{n+1}}$.

15.8

On considère la fonction $\; f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad x \longmapsto \mathrm{e}^{x}\cos x$. Calculer $f^{(100)}(1)$.

Passons par les nombres complexes :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = \mathrm{e}^{x}\cos x = \mathrm{e}^{x}\,\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}x} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}x}}{2} = \frac{1}{2}\,\mathrm{e}^{(1+\mathrm{i})x} + \frac{1}{2}\,\mathrm{e}^{(1-\mathrm{i})x}.$$

Par opérations, pour tout $n \in \mathbb{N}$, f est n fois dérivable sur $\mathbb{R}$ et, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$f^{(n)}(x) = \frac{1}{2}(1+\mathrm{i})^n\,\mathrm{e}^{(1+\mathrm{i})x} + \frac{1}{2}(1-\mathrm{i})^n\,\mathrm{e}^{(1-\mathrm{i})x}.$$

En particulier : $f^{(100)}(1) = \dfrac{1}{2}(1+\mathrm{i})^{100}\,\mathrm{e}^{1+\mathrm{i}} + \dfrac{1}{2}(1-\mathrm{i})^{100}\,\mathrm{e}^{1-\mathrm{i}}$.

On calcule : $(1+\mathrm{i})^{100} = \big((1+\mathrm{i})^2\big)^{50} = (2\mathrm{i})^{50} = 2^{50}(-1)^{25} = -2^{50}$ et, de même, ou par conjugaison : $(1-\mathrm{i})^{100} = -2^{50}$.
D'où :

$$f^{(100)}(1) = -2^{49}(\mathrm{e}^{1+\mathrm{i}} + \mathrm{e}^{1-\mathrm{i}}) = -2^{49}\,\mathrm{e}\,(\mathrm{e}^{\mathrm{i}} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}}) = -2^{50}\,\mathrm{e}\cos 1.$$

Exercices d'entraînement

15.9 Un encadrement classique de $\ln(1+x)$

Montrer : $\forall x \in [0\,;+\infty[, \quad x - \dfrac{x^2}{2} \leqslant \ln(1+x) \leqslant x.$

15.10 Exemple de fonction bijective, de fonction réciproque et d'étude de classe

On considère l'application $f : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}_+, \quad x \longmapsto \sqrt{x} + x.$

a) Montrer que f n'est pas de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+$.

b) Montrer que f est une bijection de $\mathbb{R}_+$ sur $\mathbb{R}_+$ et exprimer la fonction réciproque f^{-1} de f.

c) Montrer que f^{-1} est de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+$.

d) Tracer, sur un même schéma, les représentations graphiques de f et f^{-1}.

15.11 Une inégalité classique sur $\sin x$

a) Montrer : $\forall x \in \left[0\,;\dfrac{\pi}{2}\right], \quad \cos x \geqslant 1 - \dfrac{2x}{\pi}.$

b) En déduire : $\forall x \in \left[0\,;\dfrac{\pi}{2}\right], \quad \sin x \geqslant \dfrac{2x}{\pi}.$

15.12 L'équation fonctionnelle la plus classique, cas dérivable

Trouver toutes les applications $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ dérivables telles que :

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \quad f(x+y) = f(x) + f(y).$$

15.13 Résolution d'équation par utilisation des variations d'une fonction

Résoudre l'équation, d'inconnue $x \in \mathbb{R}$: $\quad 3^x + 4^x = 5^x$.

15.14 Exemple d'inégalité à deux variables, utilisation d'une fonction auxiliaire

Montrer, pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ tel que $0 < x < y$:

$$\mathrm{e}^{y} - \mathrm{e}^{x} < y\,\mathrm{e}^{y} - x\,\mathrm{e}^{x}.$$

15.15 Exemple d'inégalité à deux variables successives

Montrer, pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$: $\quad xy \leqslant x \ln x + \mathrm{e}^{y-1}$.

Corrigés des exercices d'entraînement

15.9

1) La fonction

$$f : [0\,;+\infty[\ \longrightarrow \mathbb{R},\qquad x \longmapsto \ln(1+x) - \left(x - \frac{x^2}{2}\right)$$

est dérivable sur $[0\,;+\infty[$ et on a, pour tout $x \in [0\,;+\infty[$:

$$f'(x) = \frac{1}{1+x} - (1-x) = \frac{1-(1-x^2)}{1+x} = \frac{x^2}{1+x},$$

d'où le tableau de variations de f :

x	0		$+\infty$
$f'(x)$	0	$+$	
$f(x)$	0	$\nearrow$	

On déduit : $\forall x \in [0\,;+\infty[,\quad f(x) \geqslant 0$,
ce qui montre la première inégalité.

2) La seconde de inégalité est classique et a déjà été montrée dans l'exercice 15.5.

15.10

a) On a, pour $x > 0$:

$$\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \frac{\sqrt{x}+x}{x} = \frac{1}{\sqrt{x}} + 1 \underset{x \to 0}{\longrightarrow} +\infty,$$

donc f n'est pas dérivable en 0, et donc f n'est pas de classe C^1 sur $[0\,;+\infty[$.

b) D'abord, il est clair que f est bien une application de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}_+$.
On a, pour tout $(x,y) \in (\mathbb{R}_+)^2$, en notant $t = \sqrt{x} \in \mathbb{R}_+$:

$$y = f(x) \iff y = t + t^2 \iff t^2 + t - y = 0.$$

Le discriminant Δ de ce trinôme du second degré en t est $\Delta = 1 + 4y > 0$, donc ce trinôme admet, dans $\mathbb{R}$, deux zéros, qui sont

$$\frac{-1-\sqrt{1+4y}}{2},\quad \text{qui est } < 0,$$
$$\frac{-1+\sqrt{1+4y}}{2},\quad \text{qui est } \geqslant 0.$$

Il en résulte :

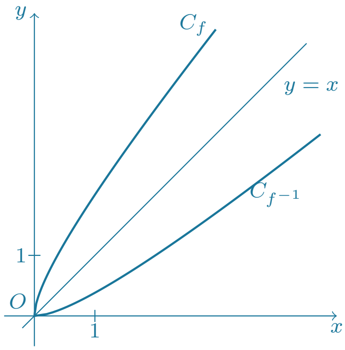
$$y = f(x) \iff t = \frac{-1+\sqrt{1+4y}}{2} \iff x = \left(\frac{-1+\sqrt{1+4y}}{2}\right)^2.$$

On conclut que f est une bijection de $\mathbb{R}_+$ sur $\mathbb{R}_+$ et que l'application réciproque f^{-1} de f est donnée par :

$$\forall y \in \mathbb{R}_+,\quad f^{-1}(y) = \left(\frac{\sqrt{1+4y}-1}{2}\right)^2.$$

c) Puisque, pour tout $y \in \mathbb{R}_+$, $1+4y > 0$ et que la fonction racine carrée est de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+^*$, on déduit de la formule précédente, par composition, que f^{-1} est de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+$.

d)



15.11

a) L'application

$$f : [0\,;\pi/2] \longrightarrow \mathbb{R},\quad x \longmapsto \cos x - 1 + \frac{2x}{\pi}$$

est deux fois dérivable sur $[0\,;\pi/2]$ et on a, pour tout $x \in [0\,;\pi/2]$:

$$f'(x) = -\sin x + \frac{2}{\pi},\qquad f''(x) = -\cos x.$$

d'où le tableau de variations de f :

x	0		α		$\pi/2$
$f''(x)$		$-$		$-$	
$f'(x)$		$\searrow$	0	$\searrow$	
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	0	$\nearrow$		$\searrow$	0

Puisque f' est continue et strictement décroissante sur $[0\,;\pi/2]$ et que $f'(0) = \dfrac{2}{\pi} > 0$ et $f'(\pi/2) = \dfrac{2}{\pi} - 1 < 0$, on déduit, par le théorème de la bijection monotone, en anticipant sur le chapitre 26, que f' s'annule et change de signe en un point $\alpha \in]0\,;\pi/2[$ unique.
Enfin, comme $f(0) = 0$ et $f\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = 0$, on déduit : $f \geqslant 0$, ce qui montre l'inégalité demandée.
b) Soit $x \in [0\,;\pi/2]$. Comme $\pi/2 - x \in [0\,;\pi/2]$, on peut appliquer le résultat de la question *a)* à $\pi/2 - x$ à la place de x, d'où :

$$\sin x = \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) \geqslant 1 - \frac{2}{\pi}\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \frac{2}{\pi}x.$$

15.12

1) Soit f convenant.
Pour tout $x \in \mathbb{R}$, en dérivant par rapport à y, on déduit, pour tout $y \in \mathbb{R}$:

$$f'(x+y) = f'(y),$$

puis, en remplaçant y par 0 : $f'(x) = f'(0)$.
Ceci montre que la fonction f' est constante sur $\mathbb{R}$, $f' = a$, $a \in \mathbb{R}$ fixé, puis, comme la fonction $x \longmapsto f(x) - ax$ est de dérivée nulle, il existe $b \in \mathbb{R}$ tel que : $\forall x \in \mathbb{R},\quad f(x) = ax + b$.
Enfin, en remplaçant x et y par 0 dans l'hypothèse de l'énoncé, on a : $f(0) = f(0) + f(0)$, d'où $f(0) = 0$, donc $b = 0$.
Ceci montre qu'il existe $a \in \mathbb{R}$ tel que :

$$\forall x \in \mathbb{R},\quad f(x) = ax.$$

2) Réciproquement, pour tout $a \in \mathbb{R}$ fixé, l'application $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\quad x \longmapsto ax$ convient, car f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et, pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$:

$$f(x+y) = a(x+y) = ax + ay = f(x) + f(y).$$

On conclut :

$$\mathcal{S} = \big\{f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\quad x \longmapsto ax\,;\, a \in \mathbb{R}\big\}.$$

15.13

1) On a, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$3^x + 4^x = 5^x \iff \left(\frac{3}{4}\right)^x + 1 = \left(\frac{5}{4}\right)^x.$$

La fonction
$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\quad x \longmapsto \left(\frac{3}{4}\right)^x + 1 - \left(\frac{5}{4}\right)^x$$
est dérivable sur $\mathbb{R}$ et, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$f'(x) = \underbrace{\left(\ln\frac{3}{4}\right)}_{<0}\left(\frac{3}{4}\right)^x - \underbrace{\left(\ln\frac{5}{4}\right)}_{>0}\left(\frac{5}{4}\right)^x < 0$$

donc f est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$.
Il en résulte que f s'annule en au plus un point.
2) On remarque :

$$f(2) = \left(\frac{3}{4}\right)^2 + 1 - \left(\frac{5}{4}\right)^2 = 0.$$

On conclut : $\mathcal{S} = \{2\}$.

15.14

On a, pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ tel que $0 < x < y$:

$$\mathrm{e}^{\,y} - \mathrm{e}^{\,x} < y\,\mathrm{e}^{\,y} - x\,\mathrm{e}^{\,x} \iff \mathrm{e}^{\,y} - y\,\mathrm{e}^{\,y} < \mathrm{e}^{\,x} - x\,\mathrm{e}^{\,x}.$$

La fonction $f :]0\,;+\infty[\longrightarrow \mathbb{R},\quad t \longmapsto \mathrm{e}^{\,t} - t\,\mathrm{e}^{\,t}$ est dérivable sur $]0\,;+\infty[$ et on a, pour tout $t \in]0\,;+\infty[$:

$$f'(t) = \mathrm{e}^{\,t} - \mathrm{e}^{\,t} - t\,\mathrm{e}^{\,t} = -t\,\mathrm{e}^{\,t} < 0,$$

donc f est strictement décroissante sur l'intervalle $]0\,;+\infty[$.
Il en résulte que, pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ tel que $0 < x < y$, on a $f(y) < f(x)$, d'où l'inégalité voulue.

15.15

Soit $y \in \mathbb{R}$ fixé.
La fonction (qui dépend de y fixé précédemment)

$$f : \mathbb{R}_+^* \longrightarrow \mathbb{R},\quad x \longmapsto x\ln x + \mathrm{e}^{\,y-1} - xy$$

est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et, pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$:

$$f'(x) = \ln x + 1 - y.$$

On a, pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$:
$f'(x) > 0 \iff \ln x > y - 1 \iff x > \mathrm{e}^{\,y-1}$.
On en déduit le tableau des variations de f :

x	0		e^{y-1}		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$		$\searrow$		$\nearrow$	

On a :

$$f(\mathrm{e}^{\,y-1}) = \mathrm{e}^{\,y-1}(y-1) + \mathrm{e}^{\,y-1} - \mathrm{e}^{\,y-1}y = 0.$$

Il en résulte : $\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\quad f(x) \geqslant 0$
et on conclut à l'inégalité demandée.