MATHS

MPSI-MP2I

Michaël Bages | Pierre Bernard
Christine Lagrange | Jérôme Levie | Mathieu Mansuy
Julien Freslon | Marie Hézard | Jérôme Poineau | Amaury Freslon

MATHS

MPSI-MP2I

EXERCICES INCONTOURNABLES

J'intègre

5e édition

DUNOD

Couverture : création Hokus Pokus, adaptation Studio Dunod

NOUS NOUS ENGAGEONS EN FAVEUR DE L'ENVIRONNEMENT :

Nos livres sont imprimés sur des papiers certifiés pour réduire notre impact sur l'environnement.

Le format de nos ouvrages est pensé afin d'optimiser l'utilisation du papier.

Depuis plus de 30 ans, nous imprimons 70% de nos livres en France et 25% en Europe et nous mettons tout en œuvre pour augmenter cet engagement auprès des imprimeurs français.

Nous limitons l'utilisation du plastique sur nos ouvrages (film sur les couvertures et les livres).

11 rue Paul Bert, 92240 Malakoff
www.dunod.com
ISBN 978-2-10-082884-5

Table des matières

1[er] semestre — Approfondissements de Terminale

1er semestre — Les bases des mathématiques

2^{nd} semestre — Algèbre linéaire et bilinéaire

2^{nd} semestre — Analyse

2^{nd} semestre — Probabilités

Avant-propos

Cet ouvrage s'adresse aux élèves de première année de classes préparatoires scientifiques en filières MPSI et MP2I. Il leur propose de mettre en pratique les notions abordées en cours de mathématiques par le biais d'exercices. Chacun est assorti d'une correction détaillée, dans laquelle l'accent est mis sur la méthode qui mène à la solution. Comme l'indique le titre, l'objectif a été de couvrir, pour l'ensemble des chapitres du programme, non seulement toutes les notions à connaître, mais encore les techniques, astuces essentielles, ainsi que quelques exercices-types, classiques ou de synthèse : en particulier, on progresse, au sein de chaque chapitre, des techniques les plus fondamentales d'application du cours vers des techniques plus avancées pouvant ressembler à des exercices d'oral de concours.

Cette 5e édition tient compte de toutes les nouveautés et modifications du nouveau programme, valable à partir de l'année 2021-2022. Au-delà d'une mise à jour nécessaire liée au changement de programme, nous avons cherché à améliorer et approfondir l'édition précédente, tout en respectant les principes qui ont fait le succès de cette collection :

- fournir un panel le plus représentatif possible des exercices-types, compétences et notions, sur chaque chapitre ;
- donner, pour chaque exercice, d'une part une rédaction exemplaire conforme aux attendus des épreuves écrites – tout en mettant en relief les canevas susceptibles de servir souvent –, d'autre part une explicitation des démarches heuristiques et déductives sous-jacentes – afin notamment de faciliter l'application des techniques apprises à d'autres exercices.

Nous souhaitons ici remercier les quatre auteurs historiques, sur le travail desquels nous nous sommes fondés pour cette édition : Julien Freslon, Marie Hézard, Jérôme Poineau et Amaury Freslon.

Les auteurs,

Michaël BAGES Pierre BERNARD Christine LAGRANGE

Jérôme LEVY Matthieu MANSUY

Structure de l'ouvrage

Le livre est divisé en vingt-deux chapitres, consacrés chacun à une partie du programme.

Au-delà de la répartition officielle des chapitres en deux semestres, nous avons bien distingué la première période du 1^{er} semestre (*grosso modo* de la rentrée jusqu'aux vacances de la Toussaint), qui consiste en un approfondissement des connaissances de lycée, afin de permettre un passage progressif de la classe de Terminale à l'enseignement supérieur.

La seconde partie du 1^{er} semestre s'attache à revenir de manière la plus rigoureuse possible sur les notions fondatrices des mathématiques sur lesquelles seront construites toutes les connaissances ultérieures.

Pour le 2^{nd} semestre, nous avons opté pour un découpage thématique traditionnel : « Algèbre », « Analyse » puis « Probabilités ».

En ce qui concerne les corrections, nous avons choisi de séparer clairement la réflexion préliminaire, comprenant analyse du problème et tâtonnements, de la rédaction finale, rigoureuse et précise. Cette dernière étape est signalée, dans le texte, par la présence d'un liseré gris sur la gauche et du pictogramme . Insistons sur le fait que nous ne prétendons nullement présenter l'unique cheminement permettant d'aboutir à la solution d'un exercice donné, ni la seule rédaction acceptable. Dans les deux cas, bien des possibilités existent.

Par ailleurs, lorsque nous avons souhaité mettre en lumière un point important, nous l'avons rédigé sur un fond grisé et indiqué par . De même, la présence d'un piège dont il faut se méfier est signalée par .

Partie 1

1^{er} semestre — Approfondissements de Terminale

CHAPITRE 1

Calcul algébrique

Exercice 1.1 : Raisonnements pour la résolution d'équations

1. Déterminer les réels x tels que $\sqrt{x(x-3)} = \sqrt{3x-5}$.
2. Déterminer les réels strictement positifs x tels que $x^{(x^x)} = (x^x)^x$.
3. Déterminer les réels x tels que $\sqrt{x(x-3)} = 3x+5$.

Dans la résolution d'équations, comme face à toute expression mathématique comportant des variables, le premier réflexe est de se demander pour quelles valeurs des variables cette expression a un sens – on parlera ici de *domaine de l'équation*. Le mieux est de déterminer ce domaine au début du problème, mais il faudra également se poser la question en fin de résolution, au moment d'écrire l'ensemble des solutions.

1. Nous allons pouvoir raisonner par équivalences pour cette première équation.

▶ **Détermination du domaine de l'équation.**

Pour tout x réel, les deux membres de l'équation ont un sens si, et seulement si, les radicandes sont positifs, c'est-à-dire si, et seulement si :

$$x(x-3) \geqslant 0 \quad \text{et} \quad 3x-5 \geqslant 0.$$

La première condition est équivalente à $x \leqslant 0$ ou $x \geqslant 3$ (un trinôme du second degré est du signe de son coefficient en x^2 à l'extérieur de ses racines et du signe contraire entre les racines), et la deuxième est équivalente à $x \geqslant \frac{5}{3}$.
Ainsi, l'équation a un sens uniquement pour $x \in [3, +\infty[$.

▶ **Résolution proprement dite de l'équation.**
L'idée est de tout élever au carré pour nous ramener à une équation du second degré.

Pour tout $x \in [3, +\infty[$, les deux membres de l'équation étant positifs, et la fonction carré réalisant une bijection de $\mathbb{R}_+$ vers $\mathbb{R}_+$, l'équation est équivalente à l'égalité des carrés

$$x(x-3) = 3x-5,$$

laquelle se récrit

$$x^2 - 6x + 5 = 0.$$

Les réels x vérifiant cette équation du second degré sont 1 et 5, et, parmi ceux-ci, seul 5 appartient au domaine de l'équation, à savoir : $[3, +\infty[$.

Dans toute rédaction mathématique soignée, il faut veiller à avoir introduit correctement, et au bon moment, chaque objet considéré. On voit ici qu'il n'est pas possible d'introduire précisément la variable x sans avoir effectué préalablement la première étape, l'étude du domaine de l'équation.

▶ **Conclusion.**
On ne conserve que les solutions de l'équation qui appartiennent au domaine.

L'ensemble des solutions de l'équation est $\mathscr{S} = \{5\}$.

Attention, l'étape de résolution fait apparaître une « fausse solution » (dite également *solution parasite*). En effet, la fonction carré n'est pas injective sur $\mathbb{R}$: s'il est vrai que $a = b$ entraîne $a^2 = b^2$, la réciproque est fausse en général. Ainsi, en l'occurrence, l'équation $x(x-3) = 3x-5$ admet plus de solutions que l'équation de l'énoncé.

2. Pour cette deuxième équation, nous devrons raisonner par disjonction de cas :

▶ **Détermination du domaine de l'équation.**
L'énoncé nous limite aux réels strictement positifs, or x^y a bien un sens lorsque x et y sont strictement positifs, c'est donc le cas des deux membres de notre équation.

▶ **Résolution proprement dite de l'équation.**

Soit x un réel strictement positif. Le logarithme népérien étant une fonction bijective, l'équation est équivalente à :

$$x^x \ln(x) = x \ln(x^x),$$

donc à

$$x^x \ln(x) = x^2 \ln(x).$$

On ne peut en déduire $x^x = x^2$ en simplifiant par $\ln(x)$: en effet, $\ln(x)$ pourrait être nul. Il faut donc raisonner par disjonction de cas, afin de gérer à part le cas $x = 1$.

Raisonnons par disjonction de cas.
• Si $x \neq 1$, alors $\ln(x) \neq 0$. L'équation est alors équivalente à $x^x = x^2$, puis, en prenant à nouveau le logarithme des deux membres, à $x \ln(x) = 2\ln(x)$. Comme ici $x \neq 1$, ceci est équivalent à $x = 2$.
• Si $x = 1$, on constate alors immédiatement que $1^{(1^1)} = 1 = (1^1)^1$.

► **Conclusion.**
L'ensemble des solutions est la réunion de toutes les solutions trouvées dans chacun des cas traités.

Finalement,
$$\mathscr{S} = \{1, 2\}.$$

Ces deux premières questions mènent à deux constats :

- Si, dans la première question, on oublie pour quelles valeurs de la variable on raisonne, on aboutit à une solution parasite.
- Si, dans la deuxième question, on ne fait pas attention à ne pas diviser par 0 lors de la simplification par $\ln(x)$, on perd la solution $x = 1$.

Le manque de rigueur dans le raisonnement mathématique peut aboutir à trouver de « fausses solutions », ou au contraire à en oublier de vraies.

Pour éviter cela, il est nécessaire, d'une part, de systématiquement déterminer le domaine de l'équation et, d'autre part, de s'assurer que tous les calculs sont licites (ne pas diviser par zéro, ne pas prendre la racine carrée ou le logarithme d'un nombre négatif, etc.). Ne pas hésiter, au besoin, à distinguer des cas.

3. Cette équation semble similaire à la première. Pourtant, nous n'allons pas pouvoir la résoudre avec la même méthode. En effet, nous n'allons pas pouvoir raisonner par équivalences à cause du membre de droite dont le signe n'est pas constant. La fonction carré n'étant pas bijective sur $\mathbb{R}$, nous ne pouvons pas élever au carré tout en conservant les équivalences.
Lorsqu'il n'est pas possible de conserver les équivalences, le bon raisonnement à adopter est celui de l'analyse-synthèse. Avant cela toutefois, nous nous interrogeons sur le domaine de l'équation.

► **Domaine.**

Le premier membre de l'équation n'est défini que pour les réels x tels que $x(x-3) \geqslant 0$, c'est-à-dire pour $x \in \,]-\infty, 0] \cup [3, +\infty[$.
Ainsi, l'équation a un sens uniquement pour $x \in \,]-\infty, 0] \cup [3, +\infty[$.
Ceci implique évidemment que $\mathscr{S} \subset \,]-\infty, 0] \cup [3, +\infty[$.

► **Résolution par analyse-synthèse.**

Procédons par analyse-synthèse.
◊ *Analyse :*
Soit $x \in \mathscr{S}$. En appliquant la fonction carré à l'égalité $\sqrt{x(x-3)} = 3x + 5$, on obtient l'égalité
$$x(x-3) = (3x+5)^2,$$

qui, une fois développée et réduite, est équivalente à :

$$8x^2 + 33x + 25 = 0.$$

Or, les racines du trinôme $8x^2 + 33x + 2$ sont $x_1 = -\frac{25}{8}$ et $x_2 = -1$.
Par conséquent, si x est solution, alors il vaut nécessairement $-\frac{25}{8}$ ou -1.
Cela s'écrit ainsi de manière ensembliste :

$$\mathscr{S} \subset \left\{-\frac{25}{8}, -1\right\}.$$

◊ *Synthèse :*
On commence par vérifier l'appartenance au domaine. Les deux candidats-solutions sont tous les deux négatifs, donc appartiennent au domaine. Il faut donc vérifier qu'ils sont bien solutions en remplaçant dans l'égalité initiale.
Pour x_1,
d'une part, $\sqrt{-\frac{25}{8}\left(-\frac{25}{8}-3\right)} = \sqrt{-\frac{25}{8}\left(-\frac{49}{8}\right)} = \frac{5\times 7}{8} = \frac{35}{8}$,
d'autre part, $3 \times \left(-\frac{25}{8}\right) + 5 = -\frac{75}{8} + \frac{40}{8} = -\frac{35}{8} \neq \frac{35}{8}$. Donc $-\frac{25}{8} \notin \mathscr{S}$.
Pour x_2,
d'une part, $\sqrt{-1 \times (-1-3)} = \sqrt{4} = 2$,
d'autre part, $3 \times (-1) + 5 = 2$. Donc $-1 \in \mathscr{S}$.
L'ensemble des solutions de l'équation est donc

$$\mathscr{S} = \{-1\}.$$

L'intérêt du raisonnement par analyse-synthèse est de s'affranchir des conditions – souvent drastiques – des équivalences, pour aller plus rapidement repérer des « candidats-solutions » au sein du domaine.
Son défaut réside dans la phase de synthèse : il est parfois difficile, ou très long, de vérifier si chaque candidat est oui ou non solution.

Dans ce dernier exercice, on aurait pu raisonner par équivalence au prix d'une disjonction de cas sur le signe du second membre, $3x + 5$:

- Si $3x + 5 \geqslant 0$, c'est-à-dire si $x \geqslant -\frac{5}{3}$, les deux membres sont positifs, donc l'équivalence est valide, puisque la fonction carré est bijective sur $\mathbb{R}_+$. On trouve dans ce cas les deux mêmes candidats-solutions, -1 et $-\frac{25}{8}$; mais $-\frac{25}{8} < -\frac{5}{3}$. Donc il faut rejeter $-\frac{25}{8}$ puisqu'elle n'est pas dans le domaine considéré ici.
- Si $3x + 5 < 0$, une racine carrée ne pouvant être strictement négative, l'égalité n'est jamais vraie : l'équation n'admet pas de solution dans ce cas.

Nous aborderons dans l'exercice **2.1** du chapitre 2 une équation qui ne peut être raisonnablement résolue que par analyse-synthèse.

Exercice 1.2 : Calcul de produits par factorielles

Pour tout $(p,n) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}^*$, écrire les expressions suivantes à l'aide de factorielles.
1. $A = (p+1)(p+2)\cdots(p+n)$.
2. $B = 2 \times 4 \times 6 \times \cdots \times (2p)$.
3. $C = 1 \times 3 \times 5 \times 7 \times \cdots \times (2p+1)$.

Les factorielles ne sont compatibles avec aucune opération. La seule formule utilisable est donc celle issue de la définition, à savoir :

$$\forall\, n \in \mathbb{N}^*, \quad n! = n \times (n-1) \times \cdots \times 2 \times 1 = \prod_{k=1}^{n} k \quad \text{et} \quad 0! = 1$$

1. Dans cette expression, on reconnaît une partie des facteurs de $(p+n)!$, nous allons faire apparaître les facteurs manquants.

Soit $(p,n) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}^*$. Il vient successivement :

$$\begin{aligned} A &= (p+1) \times (p+2) \times \cdots \times (p+n) \\ &= \frac{1 \times 2 \times \cdots \times p}{1 \times 2 \times \cdots \times p} \times (p+1) \times (p+2) \times \cdots \times (p+n) \\ &= \frac{1 \times 2 \times \cdots \times (p+n)}{1 \times 2 \times \cdots \times p} \\ &= \frac{(p+n)!}{p!}. \end{aligned}$$

2. Ici n'apparaissent que des facteurs pairs ; en factorisant 2 dans chacun d'entre eux, on obtiendra $p!$.

Le facteur 2 apparaît dans chaque facteur d'un *produit* de p facteurs, c'est donc la puissance 2^p qui se factorise.

Soit $p \in \mathbb{N}$.
Faisons apparaître 2 dans chaque facteur :

$$\begin{aligned} B &= 2 \times 4 \times 6 \times \cdots \times (2p) \\ &= (2 \times 1) \times (2 \times 2) \times (2 \times 3) \times \cdots (2 \times p) \\ &= 2^p \times 1 \times 2 \times 3 \times \cdots \times p \\ &= 2^p p! \end{aligned}$$

Il ne faut pas confondre $(2p)!$, qui est le produit de *tous* les entiers de 1 à $2p$, et B, qui est le produit des nombres *pairs* jusqu'à $2p$; par ailleurs, le symbole de la factorielle est prioritaire, ce qui signifie que $2p!$ doit être compris comme $2(p!)$, le double de la factorielle de p, ce qui est encore différent des expressions précédentes.

3. Nous allons procéder comme pour le calcul de A : introduire les facteurs manquants pour obtenir une factorielle, ici $(2p+1)!$. On reconnaîtra alors B.

Soit $p \in \mathbb{N}$.
Multiplions numérateur et dénominateur par le produit des nombres pairs de 2 à $2p$, c'est-à-dire B :

$$\begin{aligned}C &= 1 \times 3 \times 5 \times \cdots \times (2p+1)\\ &= \frac{1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5 \times \cdots \times (2p) \times (2p+1)}{2 \times 4 \times \cdots \times (2p)}\\ &= \frac{(2p+1)!}{B} = \frac{(2p+1)!}{2^p p!}.\end{aligned}$$

Nous avons choisi de rédiger les trois démonstrations précédentes avec des « $\cdots$ », afin de permettre aux lecteurs débutants de bien comprendre ce qui se passe.
Le lecteur plus aguerri devra démontrer ces résultats avec le symbole produit. C'est l'objectif que vous devez vous fixer à court terme (c'est-à-dire d'ici la fin du premier semestre).

Voici comment rédiger rigoureusement, à l'aide du symbole produit :

$$A = \prod_{k=p+1}^{p+n} k = \frac{\prod_{k=1}^{p} k}{\prod_{k=1}^{p} k} \times \prod_{k=p+1}^{p+n} k = \frac{\prod_{k=1}^{p+n} k}{\prod_{k=1}^{p} k} = \frac{(p+n)!}{p!}$$

$$B = \prod_{k=1}^{p} (2k) = 2^p \prod_{k=1}^{p} k = 2^p p!$$

$$\begin{aligned}C &= \prod_{k=1}^{p} (2k+1) = \frac{B}{B} \times \prod_{k=1}^{p} (2k+1) = \frac{1}{B} \times \prod_{k=1}^{p} (2k) \times \prod_{k=1}^{p} (2k+1)\\ &= \frac{1}{B} \times \prod_{\substack{k=1\\ k \text{ pair}}}^{2p} k \times \prod_{\substack{k=1\\ k \text{ impair}}}^{2p+1} k = \frac{1}{B} \prod_{k=1}^{2p+1} k = \frac{(2p+1)!}{2^p p!}\end{aligned}$$

Exercice 1.3 : Calcul de somme par décomposition de fraction

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $u_n = \dfrac{1}{n(n+1)(n+2)}$.

1. Déterminer $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ tel que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$u_n = \frac{a}{n} + \frac{b}{n+1} + \frac{c}{n+2}.$$

2. En déduire, pour tout $N \in \mathbb{N}^*$, une expression simplifiée de $\displaystyle\sum_{n=1}^{N} u_n$.

3. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $x_n = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{n+1}\right)$. Vérifier que $u_n = x_n - x_{n+1}$, puis retrouver la valeur de $\displaystyle\sum_{n=1}^{N} u_n$ pour tout $N \in \mathbb{N}^*$.

1. Nous allons réduire au même dénominateur l'expression proposée, réorganiser le numérateur et comparer l'expression obtenue à la définition de u_n.

Soit $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$.
En mettant les fractions au même dénominateur, l'égalité de l'énoncé est équivalente à

$$u_n = \frac{a(n+1)(n+2) + b\,n(n+2) + c\,n(n+1)}{n(n+1)(n+2)},$$

c'est-à-dire à

$$u_n = \frac{(a+b+c)n^2 + (3\,a + 2\,b + c)n + 2\,a}{n(n+1)(n+2)}.$$

Il y a donc égalité si, et seulement si, le système suivant a une solution :

$$\begin{cases} a+b+c=0 \\ 3\,a+2\,b+c=0 \\ 2\,a=1 \end{cases} \underset{L_4 \leftarrow \frac{1}{2} L_4}{\Longleftrightarrow} \begin{cases} a+b+c=0 \\ 3\,a+2\,b+c=0 \\ a=\frac{1}{2} \end{cases} \underset{\text{substitution}}{\Longleftrightarrow} \begin{cases} b+c=\frac{-1}{2} \\ 2b+c=\frac{-3}{2} \\ a=\frac{1}{2} \end{cases}$$

$$\underset{L_2 \leftarrow L_2 - L_1}{\Longleftrightarrow} \begin{cases} b+c=-\frac{1}{2} \\ b=-1 \\ a=\frac{1}{2} \end{cases} \underset{\text{substitution}}{\Longleftrightarrow} \begin{cases} c=\frac{1}{2} \\ b=-1 \\ a=\frac{1}{2} \end{cases}.$$

Ainsi, le triplet $\left(\frac{1}{2}, -1, \frac{1}{2}\right)$, et seulement lui, convient.

Attention à bien regrouper les termes de même degré dans l'expression du numérateur avant de former un système sur a, b et c.

2. Nous allons sommer les u_n en utilisant l'expression trouvée précédemment : cela nous fournira trois sommes analogues se prêtant à un changement d'indice.

Soit $N \in \mathbb{N}^*$. Alors, par linéarité de la somme,

$$\sum_{n=1}^{N} u_n = \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n} - \sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n+1} + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n+2}.$$

En effectuant les changements d'indice $\ell = n+1$ et $\ell = n+2$ dans les deux dernières sommes, on obtient

$$\sum_{n=1}^{N} u_n = \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n} - \sum_{n=2}^{N+1}\frac{1}{n} + \frac{1}{2}\sum_{n=3}^{N+2}\frac{1}{n}.$$

Notez que l'on a implicitement renommé les nouveaux indices avec l'ancienne lettre n, ce que l'on fait régulièrement lors d'un changement d'indice.
Les trois sommes obtenues ne sont pas tout à fait identiques : les termes généraux sont les mêmes, mais les bornes sont différentes. Pour simplifier ces sommes, nous allons toutes les exprimer en fonction de l'une d'elles, par exemple la première.

Posons $H_N = \displaystyle\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n}$. Il vient

$$\sum_{n=1}^{N} u_n = \frac{1}{2}H_N - \left(H_N - 1 + \frac{1}{N+1}\right) + \frac{1}{2}\left(H_N - 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{N+1} + \frac{1}{N+2}\right),$$

c'est-à-dire, toutes simplifications effectuées,

$$\sum_{n=1}^{N} u_n = \frac{1}{4} - \frac{1}{2(N+1)(N+2)}.$$

Les simplifications dans les sommes ne sont pas toujours simples à repérer. Pour les détecter, au brouillon, on peut écrire les premiers termes des différentes sommes et apercevoir ainsi qu'il y a des simplifications entre les différentes sommes. Par exemple, ici, si l'on écrit les premiers termes, on obtient

$$\frac{1}{2}\left(\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\cdots\right) - \left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\cdots\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\cdots\right).$$

Ensuite, au moment de rédiger, on effectue les changements d'indice mettant en évidence les simplifications.

3. Suivons les indications de l'énoncé.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Le calcul donne

$$\begin{aligned} x_n - x_{n+1} &= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2}\right) \\ &= \frac{1}{2}\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} + \frac{1}{2}\frac{1}{n+2} \\ &= u_n. \end{aligned}$$

Grâce à cette égalité, nous pouvons à présent écrire $\sum_{n=1}^{N} u_n$ sous forme d'une somme télescopique, ce qui va grandement faciliter son calcul.

Soit $N \in \mathbb{N}^*$.
On déduit de ce qui précède que

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{N} u_n &= \sum_{n=1}^{N} (x_n - x_{n+1}) \\ &= x_1 - x_{N+1} \quad \text{par télescopage} \\ &= \frac{1}{4} - \frac{1}{2}\frac{1}{N+1} + \frac{1}{2}\frac{1}{N+2}, \end{aligned}$$

qui est bien le résultat obtenu précédemment.

Exercice 1.4 : Sommes doubles

Soit $n \in \mathbb{N}$. Calculer les sommes doubles suivantes.

1. $S_1 = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} i2^j$.

2. $S_2 = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=0}^{n} (1 - 2^i)2^{ij}$.

3. $S_3 = \sum_{k=1}^{n} \sum_{i=k}^{n} \frac{1}{i}$.

Le principe « général » (on verra que la troisième somme est un contre-exemple) de calcul des sommes doubles est de commencer par calculer la somme « interne », en considérant lors de ce calcul que l'indice de la somme « externe » est constant. On effectue ensuite le calcul de la somme externe, ce qui revient donc à calculer les sommes successivement, en partant de la plus intérieure.

1. Nous allons calculer S_1 en deux temps. À i fixé, nous allons calculer $\sum_{j=1}^{n} i2^j$ en faisant apparaître une somme géométrique, puis nous sommerons sur i.

Soit $i \in [\![1, n]\!]$. L'indice i est constant du point de vue de j, donc on peut le mettre en facteur de la somme :

$$\begin{aligned}
\sum_{j=1}^{n} i2^j &= i\sum_{j=1}^{n} 2^j \quad \text{par linéarité de la somme} \\
&= i\left(\sum_{j=0}^{n} 2^j - 1\right) \\
&= i\left(\frac{1-2^{n+1}}{1-2} - 1\right) \quad \text{somme géométrique de raison 2} \\
&= i(2^{n+1} - 2).
\end{aligned}$$

Ainsi,

$$\begin{aligned}
S_1 &= \sum_{i=1}^{n} i(2^{n+1} - 2) \\
&= (2^{n+1} - 2)\sum_{i=1}^{n} i \quad \text{par linéarité de la somme} \\
&= (2^{n+1} - 2)\frac{n(n+1)}{2} \quad \text{d'après une formule usuelle} \\
&= (2^n - 1)n(n+1).
\end{aligned}$$

Le fait que le terme général de la somme soit le produit d'un facteur dépendant uniquement de i et d'un autre dépendant uniquement de j permet d'effectuer plus rapidement le calcul, de la façon suivante.

$$\begin{aligned}
S_1 &= \sum_{i=1}^{n}\left(i\sum_{j=1}^{n} 2^j\right) = \left(\sum_{i=1}^{n} i\right)\left(\sum_{j=1}^{n} 2^j\right) \\
&= \frac{n(n+1)}{2}\left(\frac{1-2^{n+1}}{1-2} - 1\right) = (2^n - 1)n(n+1).
\end{aligned}$$

En effet, i ne dépendant pas de j, on peut le « sortir » de la somme interne. On obtient alors une somme de la forme $\sum_{i=1}^{n}(i \times A)$, où A ne dépend pas de i, et ainsi

$$S_1 = A\sum_{i=1}^{n} i = \left(\sum_{i=1}^{n} i\right)\left(\sum_{j=1}^{n} 2^j\right).$$

Cette manipulation est cependant impossible lorsque l'on ne peut pas factoriser séparément les indices, comme c'est le cas dans la question suivante.

Il est un bon réflexe, lors de l'établissement de telles formules, de les vérifier pour de petites valeurs de n.
Ici, pour $n = 0$, la somme est vide et vaut donc 0, et $(2^0 - 1) \times 0 \times (0+1)$ donne bien 0.
Pour $n = 1$, la somme n'a qu'un terme, qui vaut 2, et $(2^1 - 1) \times 1 \times (1+1)$ donne bien 2.

2. On procède comme dans la question précédente : on commence par fixer i pour calculer $\sum\limits_{j=0}^{n} 2^{ij}$, puis on somme l'expression obtenue (qui dépend de i, mais plus de j) pour i allant de 1 à n. Les calculs font intervenir deux fois la formule donnant la somme des termes d'une suite géométrique.

Effectuons le calcul en commençant par la somme interne.

$$\begin{aligned}
S_2 &= \sum_{i=1}^{n} \left((1 - 2^i) \sum_{j=0}^{n} 2^{ij} \right) \\
&= \sum_{i=1}^{n} \left((1 - 2^i) \sum_{j=0}^{n} \left(2^i\right)^j \right) \\
&= \sum_{i=1}^{n} \left[(1 - 2^i) \frac{1 - \left(2^i\right)^{n+1}}{1 - 2^i} \right] \quad \text{(somme géométrique de raison } 2^i \neq 1\text{)} \\
&= \sum_{i=1}^{n} \left(1 - 2^{i(n+1)} \right) \\
&= \sum_{i=1}^{n} 1 - \sum_{i=1}^{n} \left(2^{n+1}\right)^i \quad \text{par linéarité de la somme} \\
&= n - 2^{n+1} \frac{1 - \left(2^{n+1}\right)^n}{1 - 2^{n+1}} \quad \text{(somme géométrique de raison } 2^{n+1} \neq 1\text{).}
\end{aligned}$$

Attention à ne pas oublier le premier terme de la somme d'une suite géométrique. On rappelle la formule au départ de $n_0 \in \mathbb{N}$:

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, n \geqslant n_0, \forall\, q \in \mathbb{C}, q \neq 1, \quad \sum_{k=n_0}^{n} q^k = q^{n_0} \times \frac{1 - q^{n-n_0+1}}{1 - q}.$$

3. Cette somme double est plus difficile que les précédentes : elle est « triangulaire », c'est-à-dire que l'une des bornes de la somme interne dépend de l'indice de la somme externe.

Cela n'a pas de sens de permuter les deux sommes et d'écrire
$$\sum_{i=k}^{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{i}.$$
En effet, dans la première somme, i varie de k à n, alors que k n'est pas encore défini (il ne l'est que pour la somme interne).

Soit $k \in [\![1, n]\!]$ fixé. Aucune formule ne permet de simplifier la somme $\sum\limits_{i=k}^{n} \frac{1}{i}$, et nous allons donc la récrire différemment pour pouvoir la calculer. Pour cela, nous allons commencer par écrire la somme double sous forme d'une seule somme avec un double indice. Pour ce faire, il suffit de remarquer que, si $(k, i) \in \mathbb{N}^2$, alors

$$1 \leqslant k \leqslant n \quad \text{et} \quad k \leqslant i \leqslant n \quad \Longleftrightarrow \quad 1 \leqslant k \leqslant i \leqslant n.$$

Cette chaîne d'inégalités traduit bien le fait que k peut prendre toutes les valeurs entre 1 et n, et i les valeurs entre k et n.
Ensuite, de la même façon, on remarque que, si $(k, i) \in \mathbb{N}^2$, alors

$$1 \leqslant k \leqslant i \leqslant n \quad \Longleftrightarrow \quad 1 \leqslant i \leqslant n \quad \text{et} \quad 1 \leqslant k \leqslant i.$$

Autrement dit, on interprète désormais cette chaîne d'inégalités de la façon suivante : tout d'abord, i varie entre 1 et n, ensuite k varie entre 1 et i. Ceci nous donne la nouvelle écriture sous forme de somme double.
La totalité de ce raisonnement se rédige élégamment avec les sommes.

S_3 est une somme triangulaire ; inversons l'ordre de sommation :
$$S_3 = \sum_{k=1}^{n}\sum_{i=k}^{n}\frac{1}{i} = \sum_{1\leqslant k\leqslant i\leqslant n}\frac{1}{i} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{i}\frac{1}{i}.$$
Or, pour tout $i \in [\![1, n]\!]$ fixé, $\displaystyle\sum_{k=1}^{i}\frac{1}{i} = \frac{1}{i}\sum_{k=1}^{i} 1 = \frac{1}{i} \times i = 1$. Ainsi,
$$S_3 = \sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{i}\frac{1}{i} = \sum_{i=1}^{n} 1 = n.$$

Exercice 1.5 : Triangle de Pascal généralisé

1. Soit p entier naturel fixé. Démontrer, par récurrence, que

$$\forall n \in \mathbb{N}, n \geqslant p, \quad \sum_{k=p}^{n} \binom{k}{p} = \binom{n+1}{p+1}.$$

2. Proposer une autre démonstration utilisant un télescopage.
3. À l'aide de cette formule, retrouver les sommes classiques :

$$\sum_{k=1}^{n} k \quad \text{et} \quad \sum_{k=1}^{n} k^2.$$

1. L'énoncé indique clairement le raisonnement à utiliser, à savoir une récurrence. Mais il faut préciser que la récurrence va porter sur la variable n. C'est implicitement fait lorsqu'on prend la peine de définir la propriété qui va être démontrée par récurrence.

On pose, pour tout n entier supérieur ou égal à p, $\mathscr{H}_n$: « $\sum\limits_{k=p}^{n} \binom{k}{p} = \binom{n+1}{p+1}$ ».

- **Initialisation.** Pour $n = p$. Alors $\mathscr{H}_p$ se réduit à $\binom{p}{p} = \binom{p+1}{p+1}$, c'est-à-dire $1 = 1$. Donc $\mathscr{H}_p$ est vraie.
- **Hérédité.** Soit $n \in \mathbb{N}, n \geqslant p$ tel que $\mathscr{H}_n$ vraie. Il vient successivement :

$$\begin{aligned}
\sum_{k=p}^{n+1} \binom{k}{p} &= \sum_{k=p}^{n} \binom{k}{p} + \binom{n+1}{p} \\
&= \binom{n+1}{p+1} + \binom{n+1}{p} && \text{par hypothèse de récurrence} \\
&= \binom{n+2}{p+1} && \text{par la formule du triangle de Pascal.}
\end{aligned}$$

  Donc $\mathscr{H}_{n+1}$ est vraie.
- **Conclusion.** Ainsi, $\mathscr{H}_n$ est vraie pour tout entier $n \geqslant p$.

Il est essentiel de bien préciser quelle est la variable de la récurrence : ici, *a priori*, trois variables entières sont présentes dans la formule : k, p et n. La variable k étant muette, il n'est pas possible de faire une récurrence dessus ; pour p, il ne paraît pas simple de relier la formule au rang p à la formule au rang $p+1$. Par ailleurs, p est fixé par l'énoncé. Il est donc plus naturel de procéder à une récurrence sur n.

2. Nous allons retrouver ce résultat sans utiliser de raisonnement par récurrence, mais en utilisant exclusivement les formules du cours connues sur les coefficients du binôme. L'avantage de cette seconde méthode est qu'elle ne nécessite pas de connaître *a priori* le résultat.

Conformément au programme, nous appliquons la convention suivante pour les coefficients binomiaux :

$$\forall\,(n,k)\in\mathbb{N}\times\mathbb{Z},\qquad \binom{n}{k}=0 \quad \text{dès que} \quad k<0 \;\text{ ou }\; k>n.$$

Soit $n \in \mathbb{N}$. On peut écrire directement la formule du triangle de Pascal dans la somme :

$$\begin{aligned}\sum_{k=p}^{n}\binom{k}{p} &= \sum_{k=p}^{n}\left(\binom{k+1}{p+1}-\binom{k}{p+1}\right)\\ &= \binom{n+1}{p+1}-\binom{p}{p+1} \quad \text{par télescopage}\\ &= \binom{n+1}{p+1} \quad \text{car } \binom{p}{p+1}=0 \text{ par convention.}\end{aligned}$$

3. Nous cherchons d'abord à calculer $\sum\limits_{k=1}^{n} k$. Étant donné que, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $\binom{k}{1}=k$, nous allons utiliser le résultat démontré précédemment avec $p=1$.

Soit $n \in \mathbb{N}$. On suppose que $p=1$, et donc $n \geqslant 1$. La formule devient alors

$$\sum_{k=1}^{n}\binom{k}{1}=\binom{n+1}{2},$$

c'est-à-dire

$$\sum_{k=1}^{n} k=\frac{n(n+1)}{2}.$$

Et ceci reste vrai pour $n=0$.

Ensuite, pour calculer $\sum\limits_{k=1}^{n} k^2$, nous pouvons utiliser $\binom{k}{2}=\frac{k(k-1)}{2}$, autrement dit le cas $p=2$.

On suppose que $p=2$, et donc $n \geqslant 2$. La formule devient alors

$$\sum_{k=2}^{n}\binom{k}{2}=\binom{n+1}{3},$$

c'est-à-dire

$$\sum_{k=2}^{n}\frac{k(k-1)}{2}=\frac{(n+1)n(n-1)}{6}.$$