Pierre Bernard | Mathieu Mansuy
Anne-Charline Chalmin | Oscar Devys | Marie Virat
Julien Freslon | Sylvain Gugger | Daniel Fredon | Jérôme Poineau

MATHS

PC-PSI

EXERCICES INCONTOURNABLES

j'intègre

4e édition

DUNOD

Couverture : création Hokus Pokus, adaptation Studio Dunod

Retrouvez nos ouvrages pour les prépas scientifiques ici

http://dunod.link/prepassc

NOUS NOUS ENGAGEONS EN FAVEUR DE L'ENVIRONNEMENT :

Nos livres sont imprimés sur des papiers certifiés pour réduire notre impact sur l'environnement.

Le format de nos ouvrages est pensé afin d'optimiser l'utilisation du papier.

Depuis plus de 30 ans, nous imprimons 70 % de nos livres en France et 25 % en Europe et nous mettons tout en œuvre pour augmenter cet engagement auprès des imprimeurs français.

Nous limitons l'utilisation du plastique sur nos ouvrages (film sur les couvertures et les livres).

11 rue Paul Bert, 92240 Malakoff
www.dunod.com
ISBN 978-2-10-086471-3

Table des matières

Algèbre

Analyse

Probabilités

Remerciements

Pierre BERNARD et Anne-Charline CHALMIN souhaitent remercier leurs collègues du lycée Saliège :

- Mathieu LEROY-LERÊTRE, pour ses conseils sur TeX,
- Emmanuel ROBIN, pour son expertise sur les programmes.

***

Mathieu MANSUY souhaite remercier Amandine POLET pour ses nombreux conseils, et a une pensée pour sa grand-mère Françoise.

***

Marie VIRAT souhaite remercier Dédé, Steph, Émeraude, Caro, Nicolas et Pierre pour leur soutien, leurs encouragements et leurs réflexions dans la réalisation de cet ouvrage.

Avant-propos

Cet ouvrage est conçu pour les élèves de deuxième année de classes préparatoires scientifiques en filières PSI et PC.

Il propose de mettre en pratique les notions abordées en cours de mathématiques par le biais d'exercices. Chacun est assorti d'une correction détaillée, dans laquelle l'accent est mis sur la méthode qui mène à la solution. Comme l'indique le titre, l'objectif a été de couvrir, pour l'ensemble des chapitres du programme, non seulement toutes les notions à connaître, mais encore les techniques, astuces essentielles, ainsi que quelques exercices-types, classiques ou de synthèse : en particulier, on progresse, au sein de chaque chapitre, des techniques les plus fondamentales d'application du cours vers des techniques plus avancées pouvant ressembler à des exercices d'oral de concours.

Cette 4e édition tient compte de toutes les nouveautés et modifications du nouveau programme, valable à partir de l'année 2022-2023. Au-delà d'une mise à jour nécessaire liée au changement de programme, nous avons cherché à améliorer et approfondir l'édition précédente. Il en résulte une centaine de pages supplémentaires, dédiées pour moitié à l'approfondissement des exercices existants, et pour moitié au traitement des nouveaux exercices.

Bien entendu, nous avons veillé à ce que ces apports respectent les principes qui ont fait le succès de cette collection :

- fournir un panel le plus représentatif possible des exercices-types, compétences et notions, sur chaque chapitre ;
- donner, pour chaque exercice, d'une part une rédaction exemplaire conforme aux attendus des épreuves écrites – tout en mettant en relief les canevas susceptibles de resservir –, d'autre part une explicitation des démarches inductives et déductives sous-jacentes – afin d'entraîner l'esprit des lecteurs à aborder des exercices originaux.

Enfin, nous souhaitons ici remercier les auteurs historiques, sur le travail desquels nous nous sommes fondés pour cette édition : Julien Freslon, Sylvain Gugger, Jérôme Poineau et Daniel Fredon.

Les auteurs,

Pierre BERNARD
(coordonnateur, référent TeX)

Mathieu MANSUY
(référent PC et probabilités)

Oscar DEVYS
(référent MP)

Anne-Charline CHALMIN
(référente PSI)

Marie VIRAT
(référente PT)

Structure de l'ouvrage

Le livre est divisé en 14 chapitres, chacun étant consacré à une partie du programme. Nous avons regroupé les chapitres selon les thèmes classiques : Algèbre, Topologie, Analyse et Probabilités. Au sein d'un même chapitre, les exercices, classés par ordre croissant de difficulté, ont été choisis de façon à passer en revue les notions à connaître, mais aussi à présenter les techniques susceptibles d'être utilisées.

En ce qui concerne les corrections, nous avons choisi de séparer clairement la réflexion préliminaire, comprenant analyse du problème et tâtonnements, de la rédaction finale, rigoureuse et précise. Cette dernière étape est signalée, dans le texte, par la présence d'un liseré gris sur la gauche et du pictogramme . Insistons sur le fait que nous ne prétendons nullement présenter l'unique cheminement permettant d'aboutir à la solution d'un exercice donné, ni la seule rédaction acceptable. Dans les deux cas, bien des possibilités existent.

Par ailleurs, lorsque nous avons souhaité mettre en lumière un point important, nous l'avons rédigé sur un fond grisé et indiqué par . De même, la présence d'un piège dont il faut se méfier est signalée par .

Cet ouvrage a été rédigé en vue d'une utilisation thématique, c'est-à-dire non linéaire :

- De manière intuitive, un étudiant qui veut approfondir un chapitre particulier s'attellera aux exercices du chapitre en question. Parfois, un exercice utilisera des notions d'autres chapitres pas encore étudiés ; dans ce cas l'énoncé de l'exercice le rappellera.
- De manière plus précise, il se référera à l'index en fin d'ouvrage, afin d'aller directement travailler les notions de son choix. Ainsi, un étudiant qui voudrait travailler spécifiquement l'utilisation du *lemme des coalitions* en probabilités n'aura pas besoin de feuilleter tous les exercices de la quatrième partie, mais pourra se contenter de chercher l'entrée « coalitions (lemme des) » de l'index qui le renverra directement aux exercices mentionnant cette notion.

Les programmes de mathématiques des sections PSI et PC étant extrêmement proches, nous avons choisi de les traiter dans ce même ouvrage. Dans les rares cas où une notion est abordée différemment dans les deux programmes, l'exercice explicite les attendus de chacun des deux programmes, quitte à proposer deux rédactions distinctes. Enfin, lorsqu'un exercice est réservé à la section PSI, son titre le mentionne.

Partie 1

Algèbre

CHAPITRE 1

Algèbre linéaire

Exercice 1.1 : Utilisation des polynômes de Lagrange

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $P \in \mathbb{R}_n[X]$ tels que, pour tout $x \in [0, n]$, $|P(x)| \leqslant 1$.
Montrer que :

$$|P(-1)| \leqslant 2^{n+1} - 1 \quad \text{et} \quad |P(n+1)| \leqslant 2^{n+1} - 1.$$

Les polynômes de Lagrange sont au programme des classes de spéciales PSI et PC. C'est un outil puissant qu'il faut savoir invoquer sans qu'on vous le demande. Le point essentiel qu'il convient de souligner dans la rédaction est que les $n+1$ réels sont distincts.
On peut alors exprimer P en fonction des $P(i)$ (de valeur absolue plus petite que 1) et des L_i. Il ne reste plus qu'à majorer les $|L_i(-1)|$ et $|L_i(n+1)|$.

Considérons la famille $(a_0, a_1, \dots, a_n) = (0, 1, \dots, n)$. Ces $n+1$ réels sont distincts deux à deux, donc on peut leur associer les polynômes $L_0, \dots, L_n$ d'interpolation de Lagrange. Il vient alors :

$$P = \sum_{i=0}^{n} P(a_i) L_i = \sum_{i=0}^{n} P(i) L_i.$$

Soit $i \in [\![0, n]\!]$. Alors, on obtient :

$$\begin{aligned}
|L_i(-1)| &= \left| \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^{n} \frac{-1-j}{i-j} \right| = \prod_{j=0}^{i-1} \frac{j+1}{i-j} \prod_{j=i+1}^{n} \frac{j+1}{j-i} \\
&= \prod_{j=0}^{i-1} (j+1) \prod_{j=0}^{i-1} \frac{1}{i-j} \prod_{j=i+1}^{n} (j+1) \prod_{j=i+1}^{n} \frac{1}{j-i} \\
&= i! \times \frac{1}{i!} \times \frac{(n+1)!}{(i+1)!} \times \frac{1}{(n-i)!} = \frac{(n+1)!}{(i+1)!\,(n-i)!} \\
&= \binom{n+1}{i+1}.
\end{aligned}$$

Ainsi, par l'inégalité triangulaire, on en déduit :

$$\begin{aligned}|P(-1)| &= \left|\sum_{i=0}^{n} P(i)L_i(-1)\right| \leqslant \sum_{i=0}^{n} |P(i)L_i(-1)| \leqslant \sum_{i=0}^{n} \binom{n+1}{i+1}\\ &\leqslant \sum_{i=1}^{n+1} \binom{n+1}{i} = \sum_{i=0}^{n+1} \binom{n+1}{i} - 1 = 2^{n+1} - 1.\end{aligned}$$

De même, on trouve :

$$\begin{aligned}|L_i(n+1)| &= \left|\prod_{\substack{j=0\\ j\neq i}}^{n} \frac{n+1-j}{i-j}\right| = \prod_{j=0}^{i-1} \frac{n+1-j}{i-j} \prod_{j=i+1}^{n} \frac{n+1-j}{j-i}\\ &= \prod_{j=0}^{i-1}(n+1-j) \prod_{j=0}^{i-1} \frac{1}{i-j} \prod_{j=i+1}^{n} (n+1-j) \prod_{j=i+1}^{n} \frac{1}{j-i}\\ &= \frac{(n+1)!}{(n+1-i)!} \times \frac{1}{i!} \times (n-i)! \times \frac{1}{(n-i)!}\\ &= \frac{(n+1)!}{i!\,(n+1-i)!} = \binom{n+1}{i}.\end{aligned}$$

Puis, par l'inégalité triangulaire, on obtient :

$$\begin{aligned}|P(n+1)| &= \left|\sum_{i=0}^{n} P(i)L_i(n+1)\right| \leqslant \sum_{i=0}^{n} |P(i)L_i(n+1)|\\ &\leqslant \sum_{i=0}^{n} \binom{n+1}{i} = 2^{n+1} - 1.\end{aligned}$$

On aurait également pu appliquer le résultat concernant $P(-1)$ au polynôme $Q(X) = P(n-X)$, qui satisfait les mêmes hypothèses que P.

Exercice 1.2 : Somme de projecteurs

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie. Soient $n \in \mathbb{N} \setminus \{0,1\}$ et $p_1, \ldots, p_n$ des projecteurs de E tels que $p_1 + \ldots + p_n = \mathrm{Id}_E$.
1. Montrer que, pour tout $i \in [\![1,n]\!]$, $\mathrm{rg}(p_i) = \mathrm{tr}(p_i)$.
2. Montrer que $E = \mathrm{Im}(p_1) \oplus \ldots \oplus \mathrm{Im}(p_n)$.

1. L'idée immédiate pour calculer la trace de l'un des p_i est de déterminer sa matrice dans une base de E. On choisit une base adaptée à la décomposition $E = F_i \oplus G_i$, si p_i projette sur F_i parallèlement à G_i.

Soit $i \in [\![1, n]\!]$. Notons F_i et G_i les sous-espaces vectoriels de E tels que $E = F_i \oplus G_i$, et tels que p_i projette sur F_i parallèlement à G_i.
Soit $q \in [\![1, n-1]\!]$ tel que $(e_1, \ldots, e_q)$ est une base de F_i et $(e_{q+1}, \ldots, e_n)$ une base de G_i. Alors $\mathscr{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ est une base de E.
D'une part, pour $k \in [\![1, q]\!]$, $p_i(e_k) = e_k$. D'autre part, pour $k \in [\![q+1, n]\!]$, $p_i(e_k) = 0$. Par conséquent, la matrice de p_i dans la base $(e_1, \ldots, e_n)$ est :

$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(p_i) = \begin{pmatrix} I_q & O_{q,n-q} \\ O_{n-q,q} & O_{n-q,n-q} \end{pmatrix}.$$

Il en découle que $\mathrm{tr}(p_i) = q = \dim(F_i) = \dim(\mathrm{Im}(p_i)) = \mathrm{rg}(p_i)$.

Il est toujours utile de se souvenir que, si p est un projecteur, il projette sur $F = \mathrm{Im}(p)$ parallèlement à $G = \mathrm{Ker}(p)$.

2. La question précédente nous donne immédiatement une information sur les dimensions : la somme des rangs de p_i est la somme de leur trace, qui est $\mathrm{tr}(\mathrm{Id}_E)$ (par linéarité de la trace) donc qui vaut $d = \dim(E)$.
Il suffit donc de montrer que la somme est directe, ou qu'elle vaut E. L'hypothèse nous permettra de montrer plus facilement le fait qu'elle vaut E.

Soit $x \in E$. Alors $x = p_1(x) + \cdots + p_n(x)$ par hypothèse. Ceci se traduit par :

$$x \in \mathrm{Im}(p_1) + \cdots + \mathrm{Im}(p_n).$$

Comme $\mathrm{Im}(p_1) + \cdots + \mathrm{Im}(p_n)$ est clairement inclus dans E, on en déduit que :

$$\mathrm{Im}(p_1) + \cdots + \mathrm{Im}(p_n) = E.$$

De manière générale, seule l'inclusion directe est vraie :

$$\mathrm{Im}(p_1 + \cdots + p_n) \subset \mathrm{Im}(p_1) + \cdots + \mathrm{Im}(p_n).$$

D'autre part, comme tr est linéaire, on obtient :

$$\mathrm{tr}(p_1) + \cdots + \mathrm{tr}(p_n) = \mathrm{tr}(p_1 + \cdots + p_n) = \mathrm{tr}(\mathrm{Id}_E) = \dim(E).$$

Or, d'après la question précédente, $\mathrm{rg}(p_1) + \cdots + \mathrm{rg}(p_n) = \dim(E)$. Par conséquent, l'égalité suivante est vérifiée :

$$\dim(\mathrm{Im}(p_1) + \cdots + \mathrm{Im}(p_n)) = \dim(\mathrm{Im}(p_1)) + \cdots + \dim(\mathrm{Im}(p_n)).$$

Donc cette somme est directe. En conclusion, on obtient bien :

$$E = \mathrm{Im}(p_1) \oplus \ldots \oplus \mathrm{Im}(p_n).$$

Exercice 1.3 : Calcul par blocs

Soit $(n,r) \in (\mathbb{N}^*)^2$. Soit $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ une matrice de rang r, décomposée par blocs sous la forme :

$$M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \qquad \text{où } A \in GL_r(\mathbb{K}).$$

1. Montrer que, pour tout vecteur colonne $Y \in \mathscr{M}_{n-r,1}(\mathbb{K})$, il existe un vecteur colonne $X \in \mathscr{M}_{r,1}(\mathbb{K})$ tel que :

$$M \begin{pmatrix} O_{r,1} \\ Y \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} X \\ O_{n-r,1} \end{pmatrix}.$$

2. En déduire que $D = CA^{-1}B$.

1. Notons tout d'abord que comme A est de taille $r \times r$, nécessairement B est de taille $r \times (n-r)$, C est de taille $(n-r) \times r$ et D est de taille $(n-r) \times (n-r)$.
On peut commencer par chercher X de manière pratique, en effectuant les produits par blocs. On se rend cependant vite compte que le calcul sera utile dans la question suivante, pour montrer que $D = CA^{-1}B$, mais ne permettra pas de répondre à cette première question. Il faut ici montrer l'existence de X de manière théorique.
Pour Y donné, le premier produit est une combinaison linéaire des $n-r$ dernières colonnes de M. Le second produit correspond à une combinaison linéaire des r premières. Il faut donc montrer que toute combinaison linéaire de colonnes de A peut s'exprimer comme combinaison linéaire des r premières.
Par hypothèse, la matrice A est inversible. Ainsi, ses colonnes forment une famille libre dans $\mathscr{M}_{r,1}(\mathbb{K})$. Il en est donc de même des r premières colonnes de M. Comme M est de rang r, cette famille libre est en fait une base de l'espace vectoriel engendré par les colonnes de M.

Notons $M_1, \ldots, M_n$ les n colonnes de M, $A_1, \ldots, A_r$ celles de A et $C_1, \ldots, C_r$ celles de C.
Comme A est inversible, $(A_1, \ldots, A_r)$ est libre dans $\mathscr{M}_{r,1}(\mathbb{K})$. Montrons que la famille $(M_1, \ldots, M_r)$ est libre dans $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K})$: soit $(\lambda_1, \ldots, \lambda_r) \in \mathbb{K}^r$ tel que $\lambda_1 M_1 + \cdots + \lambda_r M_r = O_{n,1}$.
En calculant par blocs, il vient :

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 A_1 + \cdots + \lambda_r A_r \\ \lambda_1 C_1 + \cdots + \lambda_r C_r \end{pmatrix} = O_{n,1}.$$

En particulier $\lambda_1 A_1 + \cdots + \lambda_r A_r = O_{r,1}$ donc, comme $(A_1, \ldots, A_r)$ est libre, $\lambda_1 = \ldots = \lambda_r = 0$.
Ainsi la famille $(M_1, \ldots, M_r)$ est libre dans l'espace $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K})$, donc dans l'espace $F = \mathrm{Vect}(M_1, \ldots, M_n)$. Comme $\dim(F) = \mathrm{rg}(M) = r$, $(M_1, \ldots, M_r)$ est une base de F.

Soit $Y \in \mathscr{M}_{n-r,1}(\mathbb{K})$ tel que $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_{n-r} \end{pmatrix}$. Alors, on trouve :

$$M \begin{pmatrix} O_{r,1} \\ Y \end{pmatrix} = y_1 M_{r+1} + \cdots + y_{n-r} M_n \in F.$$

Le vecteur $M \begin{pmatrix} O_{r,1} \\ Y \end{pmatrix}$ admet donc des coordonnées dans la base $(M_1, \ldots, M_r)$. Notons-les $(x_1, \ldots, x_r)$. Il vient alors :

$$M \begin{pmatrix} O_{r,1} \\ Y \end{pmatrix} = x_1 M_1 + \cdots + x_r M_r = M \begin{pmatrix} X \\ O_{n-r,1} \end{pmatrix} \text{ en notant } X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_r \end{pmatrix}.$$

2. On exploite ici la question précédente en effectuant le calcul par blocs.

Notons que le nombre de lignes de X est égal au nombre de colonnes de A et aussi égal au nombre de colonnes de C, et que le nombre de lignes de Y est égal au nombre de colonnes de B et aussi égal au nombre de colonnes de D. Cette remarque essentielle rend licite le calcul par blocs.

Soit $Y \in \mathscr{M}_{n-r,1}(\mathbb{K})$. D'après la question précédente, il existe $X \in \mathscr{M}_{r,1}(\mathbb{K})$ tel que :

$$M \begin{pmatrix} O_{r,1} \\ Y \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} X \\ O_{n-r,1} \end{pmatrix}.$$

En calculant par blocs, on obtient :

$$M \begin{pmatrix} O_{r,1} \\ Y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} BY \\ DY \end{pmatrix} \text{ et } M \begin{pmatrix} X \\ O_{n-r,1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} AX \\ CX \end{pmatrix}.$$

Par conséquent, $BY = AX$ et $DY = CX$. Comme A est inversible, la première relation donne $X = A^{-1}BY$. On en déduit que $DY = (CA^{-1}B)Y$.
Soit $i \in [\![1, n-r]\!]$. Considérons le vecteur $Y_i \in \mathscr{M}_{n-r,1}(\mathbb{K})$ qui a tous ses coefficients nuls, sauf celui de position i qui vaut 1. En appliquant l'égalité précédente à Y_i, il vient $DY_i = (CA^{-1}B)Y_i$, ce qui implique que les matrices D et $CA^{-1}B$ ont même i-ème colonne. En conclusion $D = CA^{-1}B$.

Exercice 1.4 : Propriétés de la trace

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On se place dans le $\mathbb{K}$-espace vectoriel $E = \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.

1. En s'aidant des matrices élémentaires, déterminer une base de $\mathrm{Ker}(\mathrm{tr})$.

2. En déduire que $\mathrm{Ker}(\mathrm{tr}) = \mathrm{Vect}(\{AB - BA \mid (A, B) \in E^2\})$.

3. Soit $\varphi : \mathscr{M}_n(\mathbb{K}) \to \mathbb{K}$ une forme linéaire vérifiant :

$$\forall (A, B) \in E^2, \quad \varphi(AB) = \varphi(BA).$$

Montrer que φ est colinéaire à tr.

1. La trace étant une forme linéaire non nulle, son noyau est un hyperplan, donc de dimension $n^2 - 1$. Il suffit donc de trouver une famille libre composée de $n^2 - 1$ matrices pour en avoir une base.

L'énoncé nous invite à utiliser les matrices élémentaires $E_{i,j}$, dont tous les coefficients valent 0 sauf celui en position (i, j) qui vaut 1. Si $i \neq j$, il est clair que $\mathrm{tr}(E_{i,j}) = 0$. Ceci nous fait déjà $n^2 - n$ matrices. Il en manque $n - 1$, que l'on construit comme combinaison linéaire des $E_{i,i}$ (pour que la famille obtenue soit libre), par exemple les $E_{i,i} - E_{n,n}$ pour i entre 1 et $n - 1$.

L'application tr est une forme linéaire non nulle de E, par conséquent son noyau est un hyperplan de E. Donc $\dim(\mathrm{Ker}(\mathrm{tr})) = n^2 - 1$.

D'une part, pour tout $(i, j) \in [\![1, n]\!]^2$ tel que $i \neq j$, $\mathrm{tr}(E_{i,j}) = 0$. Ainsi, la famille $\bigcup\limits_{1 \leqslant i \neq j \leqslant n} \{E_{i,j}\}$ est incluse dans $\mathrm{Ker}(\mathrm{tr})$ et comporte $n^2 - n$ éléments.

D'autre part, pour tout $i \in [\![1, n-1]\!]$, $\mathrm{tr}(E_{i,i} - E_{n,n}) = 0$. Ainsi, la famille $\bigcup\limits_{1 \leqslant i \leqslant n-1} \{E_{i,i} - E_{n,n}\}$ est incluse dans $\mathrm{Ker}(\mathrm{tr})$ et comporte $n - 1$ éléments.

Notons $\mathscr{F}$ la réunion des deux familles précédentes. Alors $\mathscr{F}$ est une famille de $n^2 - 1$ éléments de $\mathrm{Ker}(\mathrm{tr})$. Montrons qu'elle est libre dans E.

Soient $(\lambda_{i,j})_{1 \leqslant i \neq j \leqslant n} \in \mathbb{K}^{n^2 - n}$ et $(\mu_1, \ldots, \mu_{n-1}) \in \mathbb{K}^{n-1}$ tels que :

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} \lambda_{i,j} E_{i,j} + \sum_{k=1}^{n-1} \mu_k (E_{k,k} - E_{n,n}) = 0.$$

Alors :

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} \lambda_{i,j} E_{i,j} + \sum_{k=1}^{n-1} \mu_k E_{k,k} - \left(\sum_{k=1}^{n-1} \mu_k \right) E_{n,n} = 0.$$

La famille $(E_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$ étant une base de E, elle est libre. Donc tous les $\lambda_{i,j}$ sont nuls, ainsi que tous les μ_i pour $i \in [\![1, n-1]\!]$. Ainsi $\mathscr{F}$ est libre. Comme elle contient $n^2 - 1 = \dim(\mathrm{Ker}(\mathrm{tr}))$ éléments, c'est donc une base de $\mathrm{Ker}(\mathrm{tr})$.

2. Nous devons montrer que Ker(tr) est l'ensemble des combinaisons linéaires de matrices de la forme $AB - BA$. Il s'agit d'une égalité d'ensembles, on peut donc montrer deux inclusions.
La première vient du fait que $\mathrm{tr}(AB) = \mathrm{tr}(BA)$ pour tout $(A, B) \in E^2$. Par linéarité de tr, il vient alors $\mathrm{tr}(AB - BA) = 0$.
Pour la seconde, on utilise la question précédente en montrant que tous les éléments de la base de Ker(tr) qu'on a trouvée peuvent s'écrire sous la forme $AB - BA$. Pour ce faire, il faut se souvenir de la formule $E_{i,j}E_{k,l} = \delta_{j,k}E_{i,l}$ où $\delta_{j,k}$ est le symbole de Kronecker, qui vaut 0 si $j \neq k$, 1 si $j = k$.

Procédons par double inclusion.

- Soit $(A, B) \in E^2$. Alors $\mathrm{tr}(AB - BA) = \mathrm{tr}(AB) - \mathrm{tr}(BA) = 0$.
  Ainsi $AB - BA \in \mathrm{Ker}(\mathrm{tr})$. Comme $\mathrm{Ker}(\mathrm{tr})$ est stable par combinaison linéaire, on en déduit que :
  $$\mathrm{Vect}(\{AB - BA \mid (A, B) \in E^2\}) \subset \mathrm{Ker}(\mathrm{tr}).$$
- Réciproquement :
  Soit $(i, j) \in [\![1, n]\!]^2$, tel que $i \neq j$. Alors $E_{i,j} = E_{i,i}E_{i,j} - E_{i,j}E_{i,i}$.
  Soit $k \in [\![1, n-1]\!]$. Alors $E_{k,k} - E_{n,n} = E_{k,n}E_{n,k} - E_{n,k}E_{k,n}$.
  Ainsi tous les éléments de la base de $\mathrm{Ker}(\mathrm{tr})$ déterminée dans la question précédente peuvent s'écrire sous la forme $AB - BA$, avec $(A, B) \in E^2$. Tout élément de $\mathrm{Ker}(\mathrm{tr})$ est donc combinaison linéaire de matrices de cette forme ; par conséquent :
  $$\mathrm{Ker}(\mathrm{tr}) \subset \mathrm{Vect}(\{AB - BA \mid (A, B) \in E^2\}).$$

En conclusion, $\mathrm{Ker}(\mathrm{tr}) = \mathrm{Vect}(\{AB - BA \mid (A, B) \in E^2\})$.

3. Si φ est nulle, alors $\varphi = 0\,\mathrm{tr}$. Sinon, elle vérifie $\varphi(AB - BA) = 0$ par linéarité et $\mathrm{Ker}(\varphi)$ contient tous les éléments de la forme $AB - BA$, donc leurs combinaisons linéaires, donc Ker(tr). Comme Ker(tr) est de dimension $n^2 - 1$, un supplémentaire de Ker(tr) dans E est de dimension 1. On peut prendre par exemple $\mathbb{K}\,E_{1,1}$. On détermine alors la valeur de λ telle que $\varphi = \lambda\,\mathrm{tr}$ en comparant $\varphi(E_{1,1})$ et $\mathrm{tr}(E_{1,1}) = 1$.

Si $\varphi = 0$, alors $\varphi = 0\,\mathrm{tr}$, et le résultat est atteint.
Sinon, par linéarité de φ, pour tout $(A, B) \in E^2$, on obtient :
$$\varphi(AB - BA) = \varphi(AB) - \varphi(BA) = 0.$$
$\mathrm{Ker}(\varphi)$ contient donc toutes les matrices de la forme $AB - BA$, donc toutes leurs combinaisons linéaires. D'après la question précédente, on en déduit que $\mathrm{Ker}(\mathrm{tr}) \subset \mathrm{Ker}(\varphi)$. Or, φ est une forme linéaire non nulle de E, donc son noyau est un hyperplan de E, tout comme celui de tr. Ils sont donc de même dimension, et comme l'un est inclus dans l'autre, ils sont égaux.
Comme $\mathrm{tr}(E_{1,1}) = 1$, $E_{1,1} \notin \mathrm{Ker}(\mathrm{tr})$ et $\mathrm{Ker}(\mathrm{tr}) \cap (\mathbb{K}\,E_{1,1}) = \{O_n\}$. Comme $\dim(\mathrm{Ker}(\mathrm{tr})) + \dim(\mathbb{K}\,E_{1,1}) = n^2 = \dim(\mathscr{M}_n(\mathbb{K}))$, on en déduit que :
$$\mathrm{Ker}(\mathrm{tr}) \oplus \mathbb{K}\,E_{1,1} = \mathscr{M}_n(\mathbb{K}).$$

Posons $\lambda = \varphi(E_{1,1})$. Alors $\varphi(E_{1,1}) = \lambda \operatorname{tr}(E_{1,1})$. Soit $M \in \operatorname{Ker}(\operatorname{tr})$. On obtient $\varphi(M) = 0$ (comme justifié plus haut) et $\lambda \operatorname{tr}(M) = 0$.
Ainsi φ et $\lambda \operatorname{tr}$ coïncident sur deux espaces supplémentaires, elles sont donc égales.

Exercice 1.5 : Réduction des matrices de trace nulle

1. Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$ et f un endomorphisme de E. On suppose que, pour tout $x \in E$, $f(x) \in \mathbb{K}\, x$. Démontrer que f est une homothétie, c'est-à-dire qu'il existe un scalaire λ tel que $f = \lambda\ \mathrm{Id}_E$.
2. Soit $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ une matrice non nulle de trace nulle.
Montrer qu'il existe $P \in GL_n(\mathbb{K})$ telle que la première colonne de $P^{-1}MP$ soit nulle, sauf le deuxième coefficient qui vaut 1.
3. Montrer que toute matrice de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ de trace nulle est semblable à une matrice dont tous les coefficients diagonaux sont nuls. On pourra raisonner par récurrence sur n.

1. Ce résultat n'a *a priori* rien d'évident. L'hypothèse est que, pour tout élément x de E, il existe un scalaire λ_x tel que $f(x) = \lambda_x\, x$. La conclusion est qu'il existe un scalaire λ tel que, pour tout élément x de E, $f(x) = \lambda\, x$. Ces deux énoncés diffèrent par l'ordre des quantificateurs : dans le premier cas, le scalaire dépend de x, alors qu'il n'en dépend pas dans le second ! Autrement dit, il s'agit de montrer que les scalaires λ_x sont en fait tous égaux.

Soit $(e_1, \dots, e_n)$ une base de E. Par hypothèse, il existe des scalaires $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ tels que, pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, $f(e_k) = \lambda_k\, e_k$. Montrons que $\lambda_1 = \cdots = \lambda_n$.
Si $n = 1$, il n'y a rien à faire.
Sinon, pour $(k, l) \in [\![1, n]\!]^2$ avec k et l distincts, il vient par linéarité de f : $f(e_k + e_l) = \lambda_k\, e_k + \lambda_l\, e_l$. Mais il existe aussi un scalaire μ tel que : $f(e_k + e_l) = \mu\,(e_k + e_l)$, où $\mu = \lambda_{e_k + e_l}$ avec les notations utilisées plus haut.
Ainsi, on obtient :

$$\lambda_k\, e_k + \lambda_l\, e_l = \mu\,(e_k + e_l) = \mu\, e_k + \mu\, e_l.$$

Par liberté de la base $(e_1, \dots, e_n)$, il vient alors :

$$\lambda_k = \mu = \lambda_l.$$

Ainsi, $\lambda_1 = \cdots = \lambda_n$. Par conséquent, en posant $\lambda = \lambda_1$, on obtient $f = \lambda\ \mathrm{Id}_E$.
C'est bien une homothétie de E.

Il convient de bien faire la distinction entre une phrase logique du type $\forall\, x, \exists\, \lambda$, où pour chaque x, on obtient un λ **dépendant** de x, et une phrase du type $\exists\, \lambda, \forall\, x$ qui nous donne un λ **constant** par rapport à x.

2. Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{K}^n$ canoniquement associé à M. On cherche une matrice inversible P telle que $P^{-1}MP$ soit de la forme décrite dans l'énoncé. Supposons qu'une telle matrice P existe et soit $\mathscr{B}$ la base de $\mathbb{K}^n$ telle que P est la matrice de passage de la base canonique à $\mathscr{B}$. Alors $P^{-1}MP$ est la matrice de f dans la base $\mathscr{B}$ et le fait que la première colonne de cette matrice soit nulle, sauf le deuxième coefficient qui vaut 1, signifie que l'image par f du premier vecteur de $\mathscr{B}$ est le deuxième vecteur de $\mathscr{B}$. Ainsi, il s'agit de démontrer l'existence d'une base $(e_1,\dots,e_n)$ de E telle que $f(e_1)=e_2$.
Il suffit pour cela de disposer d'un vecteur x tel que $(x,f(x))$ est libre : en complétant cette famille en une base de E, nous aurons une base qui convient.

Nous devons envisager le cas où toutes les familles $(x,f(x))$ sont liées puisqu'alors l'argument précédent ne tient pas. C'est précisément ici qu'intervient le résultat de la première question : il faut distinguer deux cas selon que f est une homothétie ou non.

Considérons f, l'endomorphisme canoniquement associé à M, et distinguons deux cas :

- Si f est une homothétie ; alors M est de la forme $\lambda\,\mathrm{I}_n$ et sa trace est $\lambda\,n$. Ainsi, $\lambda=0$ et donc $M=O_n$, ce qui est exclu. Ce cas est donc impossible.
- Si f n'est pas une homothétie ; alors il existe $x_0\in E$ non nul tel que $f(x_0)\notin\mathbb{K}\,x_0$. Montrons la liberté de la famille $(x_0,f(x_0))$.

  Soit $(a,b)\in\mathbb{K}^2$ tel que $ax_0+bf(x_0)=0_E$. Si $b\neq 0$, alors $f(x_0)=-\left(\frac{a}{b}\right)x_0\in\mathbb{K}\,x_0$, ce qui est absurde. Donc $b=0$, et par suite, comme $x_0\neq 0_E$, $a=0$. Ainsi, la famille $(x_0,f(x_0))$ est libre dans E.

  D'après le théorème de la base incomplète, il existe une base $\mathscr{B}=(e_1,\dots,e_n)$ de E telle que $e_1=x_0$ et $e_2=f(x_0)$. Alors la première colonne de $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f)$ est nulle, sauf le deuxième coefficient qui vaut 1, car $f(e_1)=e_2$. En notant P la matrice de passage de la base canonique à $\mathscr{B}$, la matrice précédente n'est autre que $P^{-1}MP$, qui possède donc la propriété désirée.

3. Conformément à l'indication, commençons une démonstration par récurrence.

Montrons par récurrence sur $n\in\mathbb{N}^*$ la propriété $\mathscr{H}_n$: « Toute matrice de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ de trace nulle est semblable à une matrice dont tous les coefficients diagonaux sont nuls ».
♦ *Initialisation :*
H_1 est clairement vraie puisqu'une matrice 1×1 de trace nulle est nulle.
♦ *Hérédité :*
Soient $n\in\mathbb{N}^*$ tel que $\mathscr{H}_n$ est vraie et $M\in\mathscr{M}_{n+1}(\mathbb{K})$ de trace nulle.
Si $M=O_{n+1}$, M est semblable à elle-même, et donc ses coefficients diagonaux sont nuls.

Si $M \neq O_{n+1}$, alors la question précédente donne l'existence de $P \in GL_{n+1}(\mathbb{K})$ telle que :

$$P^{-1}MP = \left(\begin{array}{c|c} 0 & L \\ \hline 1 & \\ 0 & \\ \vdots & N \\ 0 & \end{array}\right) \quad \text{où } L \in \mathscr{M}_{1,n}(\mathbb{K}) \text{ et } N \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K}).$$

Nous n'avons à ce stade fait que reprendre les résultats précédents.
Il reste à voir comment utiliser l'hypothèse de récurrence : où y a-t-il une matrice d'ordre strictement inférieur à $n+1$ et de trace nulle ? Clairement, la matrice N convient. Nous allons utiliser l'hypothèse de récurrence pour réduire N, et des produits matriciels par blocs permettront de réduire M comme demandé.

On remarque que $\operatorname{tr}(N) = \operatorname{tr}(P^{-1}MP) = \operatorname{tr}(M) = 0$. Ainsi, par hypothèse de récurrence, il existe une matrice $Q \in GL_n(\mathbb{K})$ telle que tous les coefficients diagonaux de $Q^{-1}NQ$ sont nuls.
Soit $R = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & Q \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{n+1}(\mathbb{K})$. Alors, R est inversible, d'inverse $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & Q^{-1} \end{pmatrix}$.
Par ailleurs :

$$(PR)^{-1}M(PR) = R^{-1} \left(\begin{array}{c|c} 0 & L \\ \hline 1 & \\ 0 & \\ \vdots & N \\ 0 & \end{array}\right) R = \left(\begin{array}{c|c} 0 & * \\ \hline * & Q^{-1}NQ \end{array}\right).$$

Ainsi, $(PR)^{-1}M(PR)$ est une matrice semblable à M donc tous les coefficients diagonaux sont nuls. La propriété est donc démontrée par récurrence.

Dans la dernière égalité, nous n'avons pas pris la peine d'expliciter tous les blocs de la matrice : en effet, seuls les blocs diagonaux nous intéressaient ici.

Exercice 1.6 : Racines carrée de $-\mathrm{I}_n$

Soient E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$ et $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $A^2 = -\mathrm{I}_n$. On se donne une base de E, et on note f l'endomorphisme associé à A dans cette base.

1. Montrer que, pour tout $a \in E \setminus \{0\}$, la famille $(a, f(a))$ est libre.
On note $F_a = \mathrm{Vect}(a, f(a))$.

2. Montrer que n est pair.

3. Si on note $n = 2p$, montrer que :

$$\exists\, (a_1, \ldots, a_p) \in E^p, \quad E = F_{a_1} \oplus \ldots \oplus F_{a_p}.$$

4. En déduire que A est semblable à une matrice diagonale par blocs « simples » que l'on précisera.

1. Pour montrer que $(a, f(a))$ est libre, comme $a \neq 0$, il suffit de montrer que $f(a)$ n'est pas colinéaire à a.

Supposons que $(a, f(a))$ soit liée. Alors a et $f(a)$ sont colinéaires, et, comme $a \neq 0$, il existe $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que $f(a) = \lambda a$.
Par hypothèse, $f^2 = -\mathrm{Id}_E$ donc, en particulier, $f^2(a) = -a$. Et comme f est linéaire, on en déduit $\lambda^2 a = -a$. Ceci implique, par non-nullité de a, que $\lambda^2 = -1$, ce qui est absurde puisque λ est réel.
Ainsi $(a, f(a))$ est libre.

Le fait que E soit un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ est essentiel ici car, dans $\mathbb{C}$, l'équation $\lambda^2 = -1$ admet des solutions.

2. On montre que n est pair en raisonnant par l'absurde sur l'équation $A^2 = -\mathrm{I}_n$.

Par hypothèse, $A^2 = -\mathrm{I}_n$. Donc $\det(A^2) = \det(-\mathrm{I}_n)$, autrement dit $\det(A)^2 = (-1)^n$. Comme A est à coefficients réels, $\det(A)^2 \geqslant 0$ et donc n est nécessairement pair.

3. On construit la famille de sous-espaces par récurrence finie. On part de F_{a_1} donné en prenant $a_1 \neq 0$. Ou bien F_{a_1} vaut E, ou bien on peut trouver un vecteur $a_2 \in E \setminus F_{a_1}$. On montre alors que la somme $F_{a_1} + F_{a_2}$ est directe, et on réitère : ou bien cet espace vaut E, ou bien on peut trouver a_3 dans E privé de cet espace. On continue ainsi jusqu'à obtenir $a_1, \ldots, a_p$ (le procédé s'arrêtant en au plus $\frac{n}{2}$ étapes).

On construit $a_1, \ldots, a_p$ une suite finie de vecteurs de E telle que $F_{a_1} + \cdots + F_{a_p}$ soit directe par récurrence finie sur p.

♦ *Initialisation :*
Soit $a_1 \in E \setminus \{0\}$. C'est bien possible puisque E est un espace vectoriel de dimension $n \neq 0$, donc il contient des vecteurs non nuls.
On construit alors $F_{a_1} = \mathrm{Vect}(a_1, f(a_1))$. D'après la question précédente, la famille $(a_1, f(a_1))$ est libre, donc $\dim(F_{a_1}) = 2$.
♦ *Hérédité :*
Soit $p \in \mathbb{N}^*$ tel qu'il existe $(a_1, \ldots, a_p) \in E^p$ vérifiant que, pour tout $i \in [\![1, p]\!]$, $F_{a_i} = \mathrm{Vect}(a_i, f(a_i))$ est un sous-espace vectoriel de E de dimension 2 tel que la somme $F_{a_1} + \cdots + F_{a_p}$ soit directe.
Si $E = F_{a_1} \oplus \ldots \oplus F_{a_p}$, on arrête la récurrence.
Sinon, il existe $a_{p+1} \in E \setminus (F_{a_1} \oplus \ldots \oplus F_{a_p})$. On pose alors $F_{a_{p+1}} = \mathrm{Vect}(a_{p+1}, f(a_{p+1}))$. Montrons que $F_{a_1} + \cdots + F_{a_{p+1}}$ est directe.
Soit $(x_1, \ldots, x_{p+1}) \in F_{a_1} \times \ldots \times F_{a_{p+1}}$ tel que $x_1 + \cdots + x_{p+1} = 0_E$.
Comme $x_{p+1} \in F_{a_{p+1}}$, il existe $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ tel que $x_{p+1} = \lambda\, a_{p+1} + \mu\, f(a_{p+1})$.
Par conséquent :

$$(1) \qquad x_1 + \cdots + x_p + \lambda a_{p+1} + \mu f(a_{p+1}) = 0_E$$

et, en appliquant f, il vient :

$$(2) \qquad f(x_1) + \cdots + f(x_p) + \lambda f(a_{p+1}) - \mu a_{p+1} = 0_E$$

puisque f est linéaire et $f^2 = -\mathrm{Id}_E$.

On ne peut pas directement diviser par λ ou par μ pour faire des opérations sur ces deux équations.
On ruse en multipliant chacune des équations par λ ou μ, dans le but de faire disparaître les termes en $f(a_{p+1})$.

En effectuant $\lambda\,(1) - \mu\,(2)$, il vient :

$$(\lambda\, x_1 - \mu f(x_1)) + \cdots + (\lambda x_p - \mu f(x_p)) + (\lambda^2 + \mu^2) a_{p+1} = 0_E.$$

Si $(\lambda, \mu) \neq (0, 0)$, alors $\lambda^2 + \mu^2 \neq 0$ et on trouve alors :

$$a_{p+1} = -\frac{1}{\lambda^2 + \mu^2}\big[(\lambda x_1 - \mu f(x_1)) + \cdots + (\lambda x_p - \mu f(x_p))\big].$$

Or, pour tout $i \in [\![1, p]\!]$, $(\lambda\, x_i - \mu\, f(x_i)) \in F_{a_i}$. Donc $a_{p+1} \in F_{a_1} \oplus \ldots \oplus F_{a_p}$.
Or ceci est exclu par hypothèse.
Donc $\lambda = \mu = 0$. Et par suite $x_{p+1} = 0_E$, puis $x_1 + \cdots + x_p = 0_E$, dont on déduit $x_1 = \ldots = x_p = 0_E$, puisque $F_{a_1} + \ldots + F_{a_p}$ est directe.
La somme $F_{a_1} + \ldots + F_{a_{p+1}}$ est donc directe, ce qui conclut la récurrence.
♦ *Conclusion :*
Lorsque la récurrence se termine, on a construit $a_1, \ldots, a_p \in E$ tels que :

$$F_{a_1} \oplus \ldots \oplus F_{a_p} = E$$

et, pour tout $i \in [\![1, p]\!]$, $\dim(F_{a_i}) = 2$.

4. Dans une base adaptée à la décomposition précédente, comme chacun des F_{a_i} est stable par f (car $f^2 = -\operatorname{Id}_E$), la matrice de f est diagonale par blocs.
En choisissant comme base des F_{a_i} les $(a_i, f(a_i))$, on obtient des blocs simples.

Puisque, pour tout $i \in [\![1, p]\!]$, $F_{a_i} = \operatorname{Vect}(a_i, f(a_i))$ et que cette famille est libre, c'est donc une base de F_{a_i}. De plus, elle est stable par f puisque $f^2(a_i) = -a_i$. Comme par ailleurs

$$F_{a_1} \oplus \ldots \oplus F_{a_p} = E,$$

la famille $\mathscr{B} = (a_1, f(a_1), \ldots, a_p, f(a_p))$ est une base de E, adaptée à la décomposition en sous-espaces stables de f.
Ainsi, dans cette base, la matrice de f est de la forme :

$$\operatorname{Mat}_{\mathscr{B}}(f) = \begin{pmatrix} A_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & A_p \end{pmatrix} \text{ avec : } \forall\, i \in [\![1, p]\!],\ A_i = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

C'est une matrice diagonale par blocs, semblable à A puisque ces deux matrices sont les matrices d'un même endomorphisme f dans deux bases différentes.

Exercice 1.7 : Matrices de rang 1

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On considère $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ une matrice de rang 1.
1. Établir l'existence de X et Y non nuls de $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ vérifiant $A = XY^T$. Réciproquement, que peut-on dire d'une matrice de cette forme ?
2. En déduire l'existence de $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que $A^2 = \lambda A$.
3. Calculer $\det(\mathrm{I}_n + A)$.
4. Expliciter l'inverse de $\mathrm{I}_n + A$, quand il existe. On pourra chercher un inverse de la forme $\mathrm{I}_n + \mu A$ où $\mu \in \mathbb{K}$.

1. Cette question en renferme deux : un sens direct et un sens réciproque.
Pour le sens direct, le fait que A soit de rang 1 peut se traduire par la proportionnalité de toutes ses lignes. Il ne reste plus alors qu'à faire apparaître les vecteurs X et Y par produit par blocs.
Pour le sens réciproque, on utilise la même idée : il suffit de montrer que la matrice XY^T est semblable à une matrice dont toutes les lignes sont proportionnelles.

► Sens direct
A est de rang 1, par conséquent toutes ses lignes sont proportionnelles à une d'entre elles. Comme A n'est pas de rang 0, A n'est pas la matrice nulle, donc elle admet au moins une ligne non nulle. Notons-la L. En conclusion, la matrice A peut s'écrire :

$$A = \begin{pmatrix} \lambda_1 L \\ \vdots \\ \lambda_n L \end{pmatrix} \quad \text{où } (\lambda_1, \cdots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n \setminus \{0_{\mathbb{K}^n}\}.$$

Remarquons que les λ_i sont bien non tous nuls car sinon A serait nulle.
Ensuite, par produit par blocs, il vient :

$$\underbrace{\begin{pmatrix}\lambda_1 L\\ \vdots\\ \lambda_n L\end{pmatrix}}_{n,n} = \underbrace{\begin{pmatrix}\lambda_1\\ \vdots\\ \lambda_n\end{pmatrix}}_{n,1} \times \underbrace{L}_{1,n} = XY^T,$$

où $X = \begin{pmatrix}\lambda_1\\ \vdots\\ \lambda_n\end{pmatrix}$ et $Y = L^T$ sont bien des vecteurs non nuls de $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K})$.

▶ Sens réciproque

Soit $(X, Y) \in (\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K})\backslash\{O_{n,1}\})^2$. Notons $X = \begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix}$ et $Y = \begin{pmatrix}y_1\\ \vdots\\ y_n\end{pmatrix}$. Alors :

$$XY^T = \begin{pmatrix} x_1y_1 & x_1y_2 & \cdots & x_1y_n\\ x_2y_1 & x_2y_2 & \cdots & x_2y_n\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ x_ny_1 & x_ny_2 & \cdots & x_ny_n\end{pmatrix} \neq O_n.$$

Soit $i \in [\![1, n]\!]$. On note L_i la i-ème ligne de XY^T. Raisonnons par disjonction de cas :

- Si $x_i = 0$, alors L_i est nulle.
- Sinon, on applique l'opération $L_i \leftarrow (x_i)^{-1}L_i$ et la i-ème ligne devient $\begin{pmatrix}y_1 & y_2 & \cdots & y_n\end{pmatrix}$.

On obtient ainsi une matrice A' dont les lignes sont ou bien nulles, ou bien égales à $\begin{pmatrix}y_1 & y_2 & \cdots & y_n\end{pmatrix}$. Puisque $XY^T \neq O_n$, A' contient au moins une de ces lignes non nulles. Comme ce sont toutes les mêmes, $\mathrm{rg}(A') = 1$.
Par conséquent, $\mathrm{rg}(XY^T) = \mathrm{rg}(A') = 1$.

On a démontré la caractérisation suivante :
Une matrice carrée est de rang 1 si, et seulement si, elle peut s'écrire comme le produit d'un vecteur colonne non nul par un vecteur ligne non nul.

2. Cette question propose une application directe de la décomposition établie en question 1. Le seule difficulté consiste à reconnaître le scalaire Y^TX au beau milieu d'un produit matriciel.

D'après la caractérisation établie en question 1, il existe X et Y, deux vecteurs colonnes non nuls de $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K})$, tels que $A = XY^T$. Donc :

$$A^2 = (XY^T)(XY^T) = X(Y^T X)Y^T.$$

Or, $Y^T X \in \mathscr{M}_{1,1}(\mathbb{K})$. Notons $\lambda = Y^T X$. Ainsi :

$$A^2 = X(Y^T X)Y^T = X(\lambda Y^T) = \lambda XY^T = \lambda A.$$

$Y^T X \in \mathscr{M}_{1,1}(\mathbb{K})$. C'est donc une matrice avec un unique coefficient. Le programme en vigueur demande explicitement de confondre matrice de taille 1 et scalaire, bien que ces deux objets soient différents.

3. Il semble là aussi naturel d'utiliser la forme $A = XY^T$ établie en question 1. Dans le calcul du déterminant, on utilise la multilinéarité et le fait que le déterminant d'une famille de vecteurs est nul si deux vecteurs sont colinéaires.

D'après la caractérisation établie en question 1, il existe X et Y, deux vecteurs colonnes non nuls de $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K})$, tels que $A = XY^T$. En reprenant les notations de $X = \begin{pmatrix} x_1 & \cdots & x_n \end{pmatrix}^T$ et $Y = \begin{pmatrix} y_1 & \cdots & y_n \end{pmatrix}^T$, il vient :

$$\Delta = \det(\mathrm{I}_n + A) = \det(\mathrm{I}_n + XY^T) = \begin{vmatrix} 1 + x_1 y_1 & x_1 y_2 & \cdots & x_1 y_n \\ x_2 y_1 & 1 + x_2 y_2 & \cdots & x_2 y_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_n y_1 & x_n y_2 & \cdots & 1 + x_n y_n \end{vmatrix}$$

$$= \det(E_1 + y_1 X, E_2 + y_2 X, \cdots, E_n + y_n X),$$

où $(E_1, \ldots, E_n)$ est la base canonique de $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K})$.
Comme le déterminant est une application n-linéaire et alternée, on obtient :

$$\det(I_n + A) = \det(E_1, \ldots, E_n) + \sum_{j=1}^{n} \det(E_1, \ldots, E_{j-1}, y_j X, E_{j+1}, \cdots, E_n).$$

Dans la somme, en développant $j-1$ fois par rapport à la première colonne, on est amené à calculer le déterminant d'une matrice triangulaire supérieure ; il vaut $x_j y_j$.

Finalement, $\det(I_n + A) = 1 + \sum_{j=1}^{n} x_j y_j = 1 + Y^T X$.

4. L'énoncé nous donne la marche à suivre. On n'oublie pas d'utiliser les questions déjà traitées.

Soit $\mu \in \mathbb{K}$. En gardant les notations de la question précédente : $I_n + A$ est inversible si, et seulement si, $\det(I_n + A) \neq 0$ si, et seulement si, $Y^T X \neq -1$. Supposons donc que $Y^T X \neq -1$ dans la suite. On calcule, en utilisant ce qui a été fait à la question 2 ($A^2 = Y^T X A$) :

$$(I_n + \mu A)(I_n + A) = I_n + (\mu + 1 + Y^T X \mu)A.$$

La matrice $I_n + \mu A$ est l'inverse de $I_n - A$ si, et seulement si, $\mu + 1 + Y^T X \mu = 0$ si, et seulement si, $\mu = -\frac{1}{1+Y^T X}$.
Finalement $\mathrm{I}_n + A$ est inversible si, et seulement si, $X^T Y \neq -1$. Et dans ce cas, l'inverse de $\mathrm{I}_n + A$ est :

$$(\mathrm{I}_n + A)^{-1} = \mathrm{I}_n - \frac{1}{1 + Y^T X} X Y^T = \mathrm{I}_n - \frac{1}{1 + Y^T X} A.$$

Exercice 1.8 : Utilisation d'un polynôme annulateur

Considérons la matrice suivante

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -2 \\ 3 & 5 & -6 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

1. Déterminer un polynôme annulateur de A.
2. En déduire que A est inversible et calculer son inverse.
3. Exprimer A^k en fonction de A et I_3 pour tout $k \in \mathbb{N}$.

1. Chercher un polynôme annulateur à l'aveuglette se révèle souvent coûteux en temps. En effet, la méthode consiste à calculer les puissances de A et à tenter de les combiner linéairement pour obtenir la matrice nulle. Un premier problème consiste à savoir jusqu'à quelle puissance de A il convient de pousser notre recherche. Dans cet exercice, la dernière question laisse à penser qu'il faut pousser jusqu'à 2.
On commence donc par calculer A^2 et on cherche si on peut l'exprimer comme combinaison linéaire de A et I_3. Ici, dans le calcul de A^2, on reconnaît en dehors de la diagonale les coefficients de $6A$. On calcule ensuite $A^2 - 6A$ et on constate qu'il s'agit d'une matrice scalaire.

Par calcul direct, on obtient :

$$A^2 = \begin{pmatrix} 10 & 6 & -12 \\ 18 & 22 & -36 \\ 6 & 6 & -8 \end{pmatrix}.$$

Par suite, on trouve $A^2 - 6\,A = -8\,\mathrm{I}_3$, donc $A^2 - 6\,A + 8\,\mathrm{I}_3 = O_3$ et $X^2 - 6\,X + 8$ est un polynôme annulateur de A.

Lorsque vous maîtriserez le chapitre 2, vous saurez que le polynôme caractéristique fournit un autre polynôme annulateur de A (théorème de Cayley-Hamilton). Cependant ce polynôme est de degré 3, et complique les calculs que nous allons mener par la suite.

2. On montre que A est inversible et on exhibe son inverse en isolant d'un côté le terme en I_3 dans l'équation $A^2 - 6\,A + 8\,\mathrm{I}_3 = O_3$.

De $A^2 - 6\,A + 8\,\mathrm{I}_3 = O_3$, on déduit que :

$$\frac{1}{8}(6\,\mathrm{I}_3 - A)\,A = \mathrm{I}_3,$$

donc A est inversible, d'inverse :

$$A^{-1} = \frac{1}{8}(6\,\mathrm{I}_3 - A) = \frac{1}{8}\begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ -3 & 1 & 6 \\ -1 & -1 & 6 \end{pmatrix}.$$

On sait qu'une matrice carrée est inversible si, et seulement si, elle est inversible à droite ou à gauche. Il est donc inutile de vérifier que le produit dans l'autre sens donne aussi I_3.

3. Pour calculer A^k pour tout $k \in \mathbb{N}$, on exploite le polynôme annulateur de A précédemment calculé ($P = X^2 - 6\,X + 8$) de la façon suivante : on cherche le reste R_k dans la division euclidienne de X^k par P : $X^k = PQ_k + R_k$. Comme R_k est de degré inférieur ou égal à 1, il est de la forme $a_kX + b_k$, et on trouve a_k et b_k en évaluant X^k aux deux racines de P, qui sont 2 et 4.
Reste à résoudre le système associé pour trouver a et b, puis R ; et finalement :

$$A^k = P(A)Q_k(A) + R_k(A) = R_k(A).$$

Soit $k \in \mathbb{N}$. Par division euclidienne de X^k par $P = X^2 - 6\,X + 8$, il existe deux polynômes Q_k et R_k tels que $X^k = PQ_k + R_k$ et $\deg(R_k) < \deg(P_k)$.
Or $\deg(P) = 2$, donc R_k est de la forme $a_kX + b_k$, avec $(a_k, b_k) \in \mathbb{R}^2$. En évaluant l'expression $X^k = PQ_k + R_k$ en les deux racines de P, qui sont 2 et 4, on obtient le système :

$$\begin{cases} 2a_k + b_k = 2^k & (L_1) \\ 4a_k + b_k = 4^k & (L_2). \end{cases}$$

En effectuant $(L_2) - (L_1)$, on trouve $2a_k = 4^k - 2^k$, donc $a_k = \dfrac{4^k - 2^k}{2}$ et :

$$b_k = 2^k - 2a_k = 2^k - (4^k - 2^k) = 2^{k+1} - 4^k.$$

Ainsi, comme $A^k = P(A)Q_k(A) + R_k(A) = R_k(A)$, on trouve, pour tout $k \in \mathbb{N}$:

$$A^k = \left(2^{2k-1} - 2^{k-1}\right)A + \left(2^{k+1} - 2^{2k}\right)\mathrm{I}_3.$$

Dans ce type d'exercice, on peut vérifier à peu de frais nos calculs en testant les premières valeurs de k dans la formule obtenue.
Par ailleurs, on remarque également que la relation est encore vraie dans le cas $k = -1$. En effet, à l'aide de la question 2, on peut écrire :

$$\left(2^{2(-1)-1} - 2^{(-1)-1}\right) A + (2^{(-1)+1} - 2^{2(-1)})\,\mathrm{I}_3 = -\frac{1}{8}A + \frac{3}{4}I_3 = A^{-1}.$$

On conclut ensuite aisément que la relation est en fait valable sur $\mathbb{Z}$.

Exercice 1.9 : Intersection de p hyperplans

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On se place dans un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E de dimension n.
1. Considérons $(\psi_1, \ldots, \psi_n)$ une base de $\mathscr{L}(E, \mathbb{K})$. On définit alors :

$$\Psi : E \to \mathbb{K}^n, x \mapsto (\psi_1(x), \ldots, \psi_n(x)).$$

Montrer que l'application Ψ est un isomorphisme.
2. En déduire qu'il existe une base $(e_1, \ldots, e_n)$ de E telle que :

$$\forall\,(i,j) \in [\![1,n]\!]^2, \quad \psi_i(e_j) = \delta_{i,j}.$$

3. Soit $p \in \mathbb{N}^*$. On considère p formes linéaires de E : $\varphi_1, \ldots, \varphi_p$ formant une famille libre de $\mathscr{L}(E, \mathbb{K})$. Montrer que :

$$\dim\left(\mathrm{Ker}(\varphi_1) \cap \ldots \cap \mathrm{Ker}(\varphi_p)\right) = n - p.$$

1. La linéarité de Ψ découle directement de celles des ψ_i et ne pose donc par de problèmes.

Soient $(x, y) \in E^2$ et $(\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2$. Calculons :

$$\begin{aligned}\Psi(\lambda\, x + \mu\, y) &= (\psi_1(\lambda\, x + \mu\, y), \ldots, \psi_n(\lambda\, x + \mu\, y))\\ &= (\lambda\,\psi_1(x) + \mu\,\psi_1(y), \ldots, \lambda\,\psi_n(x) + \mu\,\psi_n(y))\\ &= \lambda\,(\psi_1(x), \ldots, \psi_n(x)) + \mu\,(\psi_1(y), \ldots, \psi_n(y))\\ &= \lambda\,\Psi(x) + \mu\,\Psi(y)\end{aligned}$$

donc Ψ est linéaire.

Comme $\dim(E) = \dim(\mathbb{K}^n)$, il suffit de montrer que l'application Ψ est injective. Un élément x_0 du noyau de Ψ annule tous les ψ_i. Comme $(\psi_1, \ldots, \psi_n)$ forme une base de $\mathscr{L}(E, \mathbb{K})$, toute forme linéaire s'annule donc en x_0.
On montre alors que $x_0 = 0_E$ par l'absurde : s'il est non nul, on peut trouver une base qui commence par x_0, et l'application première coordonnée (qui est une forme linéaire) dans cette base ne s'annule pas en x_0.

Soit $x_0 \in \mathrm{Ker}(\Psi)$. Alors $\psi_1(x_0) = \ldots = \psi_n(x_0) = 0$.