# 1

# LOGIQUE ET THÉORIE DES ENSEMBLES

*Si l'économie veut être une vraie science, il est évident qu'elle doit être une science mathématique.*
— William Stanley Jones[1]

En mathématiques, l'argumentation requiert un raisonnement logique solide, et l'analyse économique moderne ne fait pas exception à cette règle. Nous allons donc commencer par présenter quelques concepts de base de la logique, ainsi qu'une brève section sur les démonstrations mathématiques.

Une courte introduction à la théorie des ensembles précède cet exposé. Ce rappel est utile à cause de l'importance de ce sujet en mathématiques, mais aussi en raison du rôle essentiel des ensembles en économie : dans la plupart des modèles économiques, on fait l'hypothèse que les agents économiques poursuivent un objectif précis, tel que le profit, et procèdent à un choix optimal parmi un ensemble d'alternatives possibles spécifiées.

Ce chapitre présente ensuite la technique de démonstration dite par induction. Si elle assez rarement employée directement en économie, elle est fondamentale pour comprendre les résultats mathématiques utilisés par les économistes.

## 1.1 Un aperçu de la théorie des ensembles

Dans la vie de tous les jours, nous regroupons des objets de la même sorte. Par exemple, le personnel universitaire regroupe tous les salariés d'une université. Un jardin se rapporte à toutes les plantes qui y poussent. Un économiste pourra s'intéresser à toutes les entreprises écossaises de plus de 300 employés, ou à tous les contribuables allemands qui gagnaient entre 50 000 € et 100 000 € en 2019. Une étudiante qui doit s'acheter un ordinateur et un smartphone pour son entrée à l'université envisagera toutes les combinaisons possibles dont le prix total ne dépasse pas son budget. Dans tous ces cas, on a une collection d'objets qu'on peut avoir à traiter comme un tout. En mathématiques, une collection de ce genre s'appelle un *ensemble* et les objets appartenant à cet ensemble sont appelés ses *éléments*.

(1) *The Theory of Political Economy* (1871).

Comment décrire un ensemble ? La manière la plus simple est d'énumérer ses éléments, sans que l'ordre ait de l'importance, en les plaçant entre des accolades { et }. L'ensemble $E = \{a, b, c\}$ des trois premières lettres de l'alphabet est un exemple. Bien entendu, ces lettres peuvent représenter autre chose qu'elles-mêmes. Par exemple, $E$ peut être l'ensemble des racines de l'équation du troisième degré $(x - a)(x - b)(x - c) = 0$ en l'inconnue $x$, où $a$, $b$ et $c$ sont trois nombres réels quelconques. Oralement, les accolades se prononcent « l'ensemble constitué de ».

Comme un ensemble est entièrement spécifié par la liste de tous ses éléments, les deux ensembles $A$ et $B$ sont *égaux* s'ils sont composés d'exactement les mêmes éléments : chaque élément de $A$ est un élément de $B$ et inversement. Dans ce cas on écrit $A = B$.

Le symbole $\varnothing$ désigne l'ensemble qui n'a pas d'éléments, appelé l'*ensemble vide*. Notez qu'on parle de « l' » ensemble vide et non d'« un » ensemble vide. En effet, un ensemble étant complètement défini par ses éléments, il ne peut y avoir qu'un seul ensemble ne contenant pas d'éléments.

## Description d'un ensemble par ses propriétés

Il n'est pas toujours possible de décrire un ensemble en énumérant ses éléments, particulièrement dans le cas où ceux-ci sont en nombre infini. De tels ensembles interviennent souvent en économie. Prenons l'exemple de l'*ensemble de budget* en théorie du consommateur. Une personne désire acheter deux biens en quantités respectives $x$ et $y$. Ces deux biens peuvent être respectivement achetés aux prix par unité $p$ et $q$. Chaque choix d'achat possible est caractérisée par un couple $(x, y)$, où $x$ est la quantité d'un bien et $y$ la quantité de l'autre bien. Sa valeur aux prix $p$ et $q$ est de $px + qy$. Supposons que la consommatrice a un budget maximal $m$ € à consacrer à cet achat. Elle se soumet donc à la *contrainte de budget* $px + qy \leqslant m$, en supposant que la consommatrice a la possibilité de ne pas dépenser tout son budget. Il est évident que les quantités $x$ et $y$ achetées doivent être des nombres positifs. Dans ces conditions, l'ensemble, noté $B$, de tous les choix possibles est l'ensemble des $(x, y)$ tels que $px + qy \leqslant m$, $x \geqslant 0$ et $y \geqslant 0$. Cet ensemble est représenté à la figure 4.4.12. La notation classique de cet ensemble est

$$B = \{(x, y) : px + qy \leqslant m, x \geqslant 0, y \geqslant 0\}. \tag{1.1.1}$$

Vous y reconnaissez les accolades de part et d'autre, puis, à gauche de « : »[2], la notation générale d'un élément de $B$ et, enfin, à droite de « : », les propriétés requises pour appartenir à l'ensemble.

## Élément d'un ensemble

Soit $E$ un ensemble. On dit que $x$ est un élément de $E$ ou que $x$ appartient à $E$ et on écrit $x \in E$. Notez le symbole particulier $\in$ (qui ressemble à la lettre grecque $\varepsilon$). Pour indiquer que $x$ n'est *pas* un élément de $E$, on écrit $x \notin E$. Par exemple, $d \notin \{a, b, c\}$ dit que $d$ n'est pas un élément de l'ensemble $\{a, b, c\}$.

---
[2] Pour signifier « tel que », on peut aussi utiliser le symbole |.

Pour mieux comprendre comment appliquer la notation d'appartenance à un ensemble, revenons sur l'exemple de l'étudiante de première année qui *doit* acheter un ordinateur et un smartphone. Supposons qu'il y ait deux sortes d'appareils, « bon marché » et « cher ». Supposons également que l'étudiante ne puisse pas se payer à la fois un ordinateur cher et un smartphone cher. L'ensemble des trois combinaisons abordables est donc {ordinateur bon marché et smartphone bon marché, ordinateur cher et smartphone bon marché, ordinateur bon marché et smartphone cher}. Le choix de l'étudiante est donc restreint à ces trois possibilités. Si on note $s$ le choix et $B$ l'ensemble des choix abordables, le choix de l'étudiante est contraint par la condition $s \in B$. Si on note $t$ la combinaison non abordable d'un ordinateur cher et d'un smartphone cher, on peut exprimer ce caractère inabordable en écrivant $t \notin B$.

Soit $A$ et $B$ deux ensembles. L'ensemble $A$ est un *sous-ensemble* de $B$ si chaque élément de $A$ est un élément de $B$. Dans ce cas, on écrit $A \subseteq B$. En particulier, $A \subseteq A$ et $\varnothing \subseteq A$. Rappelez-vous que deux ensembles sont *égaux* si ils contiennent les mêmes éléments. De ces définitions, nous déduisons que $A = B$ si et seulement si on a à la fois $A \subseteq B$ et $B \subseteq A$.

Reprenons l'exemple précédent. Supposons que l'étudiante peut se contenter d'un smartphone bon marché et choisit donc de ne pas acheter de smartphone cher. Une fois qu'elle a fait ce choix, elle n'a plus qu'à décider quel ordinateur acheter en plus du smartphone bon marché. Soit $A$ l'ensemble {ordinateur bon marché et smartphone bon marché, ordinateur cher et smartphone bon marché} des options que l'étudiante n'a pas éliminées. On a $A \subseteq B$.

## Opérations sur les ensembles

Trois opérations sur les ensembles sont essentielles : l'*union*, l'*intersection* et la *différence* de deux ensembles $A$ et $B$ (voir tableau 1.1.1).

**Tableau 1.1.1** Opérations élémentaires sur les ensembles

| Notation | Nom | Définition |
|---|---|---|
| $A \cup B$ | $A$ *union* $B$ | Tous les éléments qui appartiennent à au moins un des deux ensembles $A$ et $B$ |
| $A \cap B$ | $A$ *intersection* $B$ | Tous les éléments qui appartiennent à la fois à $A$ et à $B$ |
| $A \setminus B$ | $A$ *moins* $B$ | Tous les éléments qui appartiennent à $A$, mais pas à $B$ |

En notation ensembliste,

$$A \cup B = \{x : x \in A \ \text{ ou } \ x \in B\}.$$

$$A \cap B = \{x : x \in A \ \text{ et } \ x \in B\}.$$

$$A \setminus B = \{x : x \in A \ \text{ et } \ x \notin B\}.$$

Notons qu'en mathématiques, le mot « ou » n'est pas *exclusif*, au sens ou l'énoncé $x \in A$ ou $x \in B$ admet la possibilité que $x \in A$ et $x \in B$ soient *tous deux* vrais.

EXEMPLE 1.1.1

Soit $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ et $B = \{3, 6\}$. Déterminez les ensembles $A \cup B$, $A \cap B$, $A \setminus B$ et $B \setminus A$ [3].

***Solution*** $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, $A \cap B = \{3\}$, $A \setminus B = \{1, 2, 4, 5\}$, $B \setminus A = \{6\}$. ■

Si deux ensembles $A$ et $B$ n'ont pas d'éléments en commun, on dit qu'ils sont *disjoints*. Les ensembles $A$ et $B$ sont donc disjoints si et seulement si $A \cap B = \varnothing$.

EXERCICES de la section 1.1

**1.** Soit $A = \{2, 3, 4\}$, $B = \{2, 5, 6\}$, $C = \{5, 6, 2\}$ et $D = \{6\}$.

(a) Vrai ou faux ? $4 \in C$ ; $5 \in C$ ; $A \subseteq B$ ; $D \subseteq C$ ; $B = C$ ; $A = B$.

(b) Déterminez les éléments des ensembles $A \cap B$ ; $A \cup B$ ; $A \setminus B$ ; $B \setminus A$ ; $(A \cup B) \setminus (A \cap B)$ ; $A \cup B \cup C \cup D$ ; $A \cap B \cap C$ ; $A \cap B \cap C \cap D$.

**2.** Faites une liste complète de tous les sous-ensembles différents de l'ensemble $\{a, b, c\}$. Combien sont-ils, y compris l'ensemble vide et l'ensemble lui-même ? Faites de même pour l'ensemble $\{a, b, c, d\}$.

**3.** Parmi ces propositions, lesquelles sont vraies ? Pour celles qui sont fausses, construisez un contre-exemple.

(a) $A \setminus B = B \setminus A$

(b) $A \cap (B \cup C) \subseteq (A \cap B) \cup C$

(c) $A \cup (B \cap C) \subseteq (A \cup B) \cap C$

(d) $A \setminus (B \setminus C) = (A \setminus B) \setminus C$

## 1.2 Quelques notions de logique

Les modèles mathématiques jouent un rôle essentiel dans les sciences empiriques, y compris en économie moderne. S'ils sont très utiles, il faut s'en servir avec précaution, car il est facile de commettre des erreurs de raisonnement dans la résolution d'un problème et d'arriver ainsi à une réponse fausse.

Voici un exemple montrant comment une logique erronée conduit à une réponse incorrecte. En cas de besoin, vous trouverez un rappel sur les racines carrées juste après.

EXEMPLE 1.2.1

Supposons qu'on veuille chercher *toutes* les valeurs de $x$ qui vérifient l'équation suivante : $x + 2 = \sqrt{4 - x}$. On commence par élever les deux membres de l'équation donnée au carré,

[3] Dès maintenant et tout au long du livre, nous écrivons souvent les exemples sous forme d'exercices. Nous vous recommandons vivement de commencer par essayer de résoudre le problème tout en cachant la solution, puis de révéler progressivement la réponse proposée pour vérifier si votre résultat est juste.

ce qui donne $(x+2)^2 = (\sqrt{4-x}\,)^2$. Si on développe le membre de gauche tout en utilisant la définition d'une racine carrée, on obtient $x^2 + 4x + 4 = 4 - x$. Après regroupement des termes semblables, l'équation devient $x^2 + 5x = 0$ et, après simplification par $x$, il reste $x + 5 = 0$ ou $x = -5$. D'après ce raisonnement, $x = -5$ serait une solution. C'est faux, car pour $x = -5$ on a $x + 2 = -3$, alors $\sqrt{4-x} = \sqrt{9} = 3$[4]. ■

Cet exemple souligne les dangers de calculer de façon routinière sans réfléchir. Quelques notions sur le raisonnement logique ne sont pas inutiles pour éviter de telles erreurs. En voici un exposé dans le reste de cette section.

## Un rappel sur les racines carrées

La racine carrée $\sqrt{a}$ d'un nombre positif $a$ est le (seul) nombre positif $x$ tel que $x^2 = a$. Ainsi, en particulier, $\sqrt{9} = 3$, car 3 est le seul nombre positif dont le carré vaut 9.

Dans les vieux livres de mathématiques, on trouve encore l'affirmation qu'un nombre positif possède deux racines carrées, l'une positive et l'autre négative. Par exemple, $\sqrt{64}$ pourrait être 8 ou $-8$. Permettre ainsi deux valeurs est devenu obsolète, car cela mène à la confusion. Par exemple, $\sqrt{49} + \sqrt{25}$ pourrait signifier chacun des quatre nombres $7+5$, $7-5$, $-7+5$ et $-7-5$. Pour éviter cette confusion, au lieu d'écrire $\sqrt{a}$, on utilise une notation plus explicite, $\pm\sqrt{a}$, pour désigner l'ensemble $\{\sqrt{a}, -\sqrt{a}\}$ constitué, dans le cas $a > 0$, des deux solutions distinctes de $x^2 = a$.

Rappelez-vous donc que $\sqrt{a}$ désigne toujours l'unique solution *positive* de l'équation $x^2 = a$. Bien sûr, si $a$ est strictement négatif, il ne possède aucune racine carrée (en tous cas aussi longtemps que la racine carrée doit être un nombre réel).

## Propositions

Des énoncés qui peuvent être vrais ou faux sont appelés des *propositions.* La plupart des propositions de ce livre ont un contenu mathématique, mais il y en a d'autres dans la vie courante. Par exemple, « tous les individus qui respirent sont en vie » est un exemple de proposition vraie, alors que « tous les individus qui respirent sont en bonne santé » est une proposition fausse. Il est parfois difficile de savoir si une proposition est vraie ou pas, faute de préciser les termes employés, comme par exemple « 67 est un grand nombre ».

L'affirmation « $x^2 - 1 = 0$ » inclut la variable $x$. Pour une affirmation de ce type, en attribuant à la variable $x$ des valeurs différentes, on peut générer différentes propositions, dont certaines sont vraies et d'autres fausses. On appelle ce type d'affirmation une *proposition ouverte*. Par exemple, la proposition « $x^2 - 1 = 0$ » n'est vraie que pour $x = 1$ et $x = -1$. Une proposition ouverte n'est donc ni vraie ni fausse jusqu'à ce qu'on choisisse une valeur particulière pour la variable. Ou plusieurs variables dans le cas d'affirmations telles que $x^2 + y^2 = 1$.

---

(4) Notez à quel point il est sage de vérifier la solution trouvée. La source de l'erreur est expliquée à l'exemple 1.2.4.

## Implications

Afin de garder la trace de chaque étape d'un raisonnement logique, on utilise souvent des flèches d'implication. Si $P$ et $Q$ sont deux propositions telles que, si $P$ est vraie, alors $Q$ l'est aussi, on écrit

$$P \;\Rightarrow\; Q. \tag{$*$}$$

On lit « $P$ implique $Q$ », ou « si $P$, alors $Q$ », ou « $Q$ est une conséquence de $P$ », ou encore « $Q$ si $P$ ». De plus, comme dans ce cas $Q$ ne peut pas être fausse tant que $P$ est vraie, l'implication peut encore être lue « $P$ seulement si $Q$ ». Le symbole $\Rightarrow$ est une *flèche d'implication* qui pointe dans la direction de l'implication logique. Ainsi, $P \Rightarrow Q$ peut aussi s'écrire $Q \Leftarrow P$.

EXEMPLE 1.2.2

Voici quelques exemples d'implications correctes.

(a) $x > 2 \Rightarrow x^2 > 4$.

(b) $xy = 0 \Rightarrow (x = 0$ ou $y = 0)$.

(c) $S$ est un carré $\Rightarrow$ $S$ est un rectangle.

(d) Elle vit à Paris $\Rightarrow$ Elle vit en France. ■

Dans certain cas où on a $P \Rightarrow Q$, il est possible de tirer une conclusion logique dans l'autre direction : $P \Rightarrow Q$ (ou $P \Leftarrow Q$). On dit alors que les deux propositions sont logiquement équivalentes et on écrit

$$P \;\Leftrightarrow\; Q.$$

Remarquez que, parmi les implications de cet exemple, la seule qui puisse être remplacée par une équivalence est la (b), car il est aussi vrai que $x = 0$ ou $y = 0$ implique $xy = 0$. Énoncez les implications réciproques des autres cas de l'exemple 1.2.2 et vérifiez qu'elles sont fausses en produisant un contre-exemple.

EXEMPLE 1.2.3

Voici trois exemples d'équivalences correctes.

(a) $(x < -2$ ou $x > 2) \;\Leftrightarrow\; x^2 > 4$

(b) $xy = 0 \;\Leftrightarrow\; (x = 0$ ou $y = 0)$

(c) $A \subseteq B \;\Leftrightarrow\; (a \in A \Rightarrow a \in B)$ ■

## Le principe de contraposition

Soit $P$ et $Q$ des propositions telles que l'implication $P \Rightarrow Q$ est valide. Cela signifie que, *si* $P$ est vraie, alors $Q$ doit aussi être vraie. Il s'ensuit que si $Q$ est fausse, alors $P$ aussi est fausse. Par conséquent, on a l'implication (non $Q \Rightarrow$ non $P$).

Nous venons de montrer que $P \Rightarrow Q$ implique (non $Q \Rightarrow$ non $P$). En vue de démontrer l'implication réciproque, remplaçons $P$ par non $P$ et $Q$ par non $Q$. La nouvelle implication qui en résulte est : (non $Q \Rightarrow$ non $P$) implique (non non $P \Rightarrow$ non non $Q$). Mais (non non $P$) est vraie si et seulement si (non $P$) est fausse, autrement dit si et seulement si $P$ est vraie. De même, (non non $Q$) est vraie si et seulement si $Q$ est vraie.

Nous avons donc montré que $P \Rightarrow Q$ implique (non $Q \Rightarrow$ non $P$) et que (non $Q \Rightarrow$ non $P$) implique $P \Rightarrow Q$. Ce résultat peut être formalisé de la manière suivante.

**LE PRINCIPE DE CONTRAPOSITION**

L'énoncé $P \Rightarrow Q$ est logiquement équivalent à l'énoncé

$$\text{non } Q \ \Rightarrow \ \text{non } P.$$

Cette équivalence logique est souvent utile pour démontrer des résultats mathématiques.

## Condition nécessaire et suffisante

Les implications et les équivalences entre propositions peuvent aussi s'exprimer en termes de conditions nécessaires et/ou suffisantes. Si la proposition $P$ implique la proposition $Q$, on dit que $P$ est une « condition suffisante » pour $Q$ ; après tout, pour que $Q$ soit vrai, il est suffisant que $P$ le soit. Ou encore, si $P$ est satisfait, il est certain que $Q$ l'est aussi. Dans ce cas, comme $Q$ doit nécessairement être vraie pour que $P$ soit vraie, on dit que $Q$ est une « condition nécessaire » à $P$. De là découlent les définitions suivantes.

**CONDITIONS NÉCESSAIRES ET SUFFISANTES**

(a) $P \Rightarrow Q$ signifie que $P$ est une *condition suffisante* pour $Q$ et, de manière équivalente, que $Q$ est une *condition nécessaire* pour $P$.

(b) L'expression correspondant à $P \Leftrightarrow Q$ s'énonce simplement « $P$ est une condition *nécessaire et suffisante* pour $Q$ ».

Dans les pages qui suivent, nous allons continuellement faire référence à des conditions nécessaires, des conditions suffisantes ou des conditions nécessaires et suffisantes. Bien comprendre ces trois expressions et distinguer les différences entre elles est une condition nécessaire à la maîtrise de l'analyse économique. Ce n'est malheureusement pas une condition suffisante !

### EXEMPLE 1.2.4

À l'exemple 1.2.1, pourquoi était-il nécessaire de vérifier que les valeurs trouvées étaient bien des solutions ? Pour répondre à cette question, il faut examiner la structure logique de notre résolution. La voici en termes d'implications successives marquées d'une lettre :

$$\begin{aligned} x + 2 = \sqrt{4 - x} &\overset{\text{(a)}}{\Rightarrow} (x + 2)^2 = 4 - x \\ &\overset{\text{(b)}}{\Rightarrow} x^2 + 4x + 4 = 4 - x \\ &\overset{\text{(c)}}{\Rightarrow} x^2 + 5x = 0 \\ &\overset{\text{(d)}}{\Rightarrow} x(x + 5) = 0 \\ &\overset{\text{(e)}}{\Rightarrow} [x = 0 \text{ ou } x = -5] \end{aligned}$$

L'implication (a) est correcte car $a = b \Rightarrow a^2 = b^2$ et $\sqrt{a}^2 = a$. Notons dès à présent que l'implication (a) ne peut pas être inversée En effet, l'implication $a^2 = b^2 \Rightarrow a = b$ est fausse. L'implication correcte est $a^2 = b^2 \Rightarrow a = b$ ou $a = -b$. Les implications (b), (c), (d) et (e) sont toutes correctes et sont même des équivalences. La chaîne d'implications va donc de la proposition $x + 2 = \sqrt{4 - x}$ à la proposition $x = 0$ ou $x = -5$, mais ne peut pas être inversée. Si $x$ est une solution de l'équation $x + 2 = \sqrt{4 - x}$, alors $x$ doit valoir 0 ou $-5$. Il n'est pas certain que ces deux valeurs conviennent. On s'aperçoit en effet après avoir remplacé $x$ par 0 et $-5$ que seule la valeur 0 est une solution.

Rétrospectivement, on peut remarquer qu'une erreur supplémentaire a été commise dans l'exemple 1.2.1. Dire $x^2 + 5x = 0 \Rightarrow x + 5 = 0$ est faux, car $x = 0$ est aussi une solution de $x^2 + 5x = 0$, comme rétabli dans l'implication (e).

La méthode utilisée à l'exemple 1.2.1 est la plus courante : elle établit une chaîne d'implications qui débute avec l'équation donnée et se termine aux solutions possibles. Parmi ces solutions, il reste à chercher celles qui satisfont réellement l'équation donnée. Même dans le cas où on utilise une chaîne d'équivalences, il est toujours bon de vérifier *a posteriori* si la réponse est correcte. ■

## EXERCICES de la section 1.2

**1.** Il y a bien d'autres manières d'exprimer des implications et des équivalences que celles que nous avons mentionnées jusqu'à présent. Représentez les propositions suivantes par des implications ou des équivalences appropriées.

(a) L'équation $2x - 4 = 2$ est satisfaite seulement si $x = 3$.

(b) Si $x = 3$, alors $2x - 4 = 2$.

(c) L'équation $x^2 - 2x + 1 = 0$ est satisfaite si $x = 1$.

(d) Si $x^2 > 4$, alors $|x| > 2$ et réciproquement.

**2.** Parmi ces propositions, lesquelles sont vraies ? Construisez un contre-exemple pour les autres.

(a) $A \subseteq B \iff A \cup B = B$

(b) $A \subseteq B \iff A \cap B = A$

(c) $A \cap B = A \cap C \Rightarrow B = C$

(d) $A \cup B = A \cup C \Rightarrow B = C$

(e) $A = B \iff (x \in A \iff x \in B)$

**3.** Pour chacune des implications suivantes, où $x$, $y$ et $z$ sont des nombres réels, examinez (i) si l'implication est vraie et (ii) si l'implication réciproque est vraie.

(a) $x = \sqrt{4} \Rightarrow x = 2$

(b) $(x = 2 \text{ et } y = 5) \Rightarrow x + y = 7$

(c) $(x-1)(x-2)(x-3) = 0 \Rightarrow x = 1$

(d) $x^2 + y^2 = 0 \Rightarrow x = 0 \text{ ou } y = 0$

(e) $(x = 0 \text{ et } y = 0) \Rightarrow x^2 + y^2 = 0$

(f) $xy = xz \Rightarrow y = z$

**4.** Soit la proposition $2x + 5 \geqslant 13$.

(a) La condition $x \geqslant 0$ est-elle nécessaire, suffisante ou nécessaire et suffisante pour que l'inégalité soit satisfaite ?

(b) Répondez à la même question si $x \geqslant 0$ est remplacé par $x \geqslant 50$.

(c) Répondez à la même question si $x \geqslant 0$ est remplacé par $x \geqslant 4$.

**5.** [PLUS DIFFICILE] Si $P$ est une proposition, sa *négation* est la proposition qui est vraie quand $P$ est fausse, et fausse quand $P$ est vraie. Par exemple, la négation de la proposition $2x + 3y \leqslant 8$ est $2x + 3y > 8$. Pour chacune des six propositions, énoncez la négation le plus simplement possible.

(a) $x \geqslant 0$ et $y \geqslant 0$.

(b) Tous les $x$ satisfont à $x \geqslant a$.

(c) Ni $x$ ni $y$ ne sont inférieurs à 5.

(d) Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un $\delta > 0$ tel que $B$ est vérifiée.

(e) Personne ne peut s'empêcher d'aimer les chats.

(f) Tout le monde aime quelqu'un à un moment donné.

# 1.3 Les démonstrations en mathématiques

En mathématiques, les résultats les plus importants sont appelés des *théorèmes*. Que ces résultats soient vrais repose sur des démonstrations logiquement bien structurées et loin d'être faciles à construire[5]. Dans ce livre, l'accent est mis sur une compréhension intuitive profonde des résultats que les théorèmes énoncent, plutôt que sur leur démonstration formelle. Néanmoins, il est utile de discerner quelques types de raisonnements usuels en mathématiques.

*Tout* théorème mathématique peut être mis sous la forme d'une ou plusieurs implications de la forme

$$P \Rightarrow Q \tag{$*$}$$

[5] Prenons l'exemple du « théorème des quatre couleurs », qui s'intéresse à la coloration d'une carte divisée en plusieurs régions. Le problème est de colorer ces régions de façon à ce que deux régions adjacentes n'aient jamais la même couleur. Comme son nom l'indique, le théorème des quatre couleurs énonce qu'au plus quatre couleurs sont nécessaires. Ce résultat a été conjecturé dès le milieu du XIXe siècle. Mais la démonstration a impliqué la vérification de centaines de milliers de cas différents. Ce n'est que dans les années 1980 qu'un programme informatique sophistiqué a rendu possible une démonstration maintenant acceptée par les mathématiciens comme correcte.

où $P$ représente une ou plusieurs propositions appelées *prémisses* (ce que l'on sait déjà) et où $Q$ représente une ou plusieurs propositions appelées *conclusions* (ce que l'on souhaite savoir). Les mathématiciens parleront plus volontiers d'hypothèse(s) et de thèse(s).

Habituellement, une démonstration se déroule naturellement des prémisses $P$ vers les conclusions $Q$ ; c'est ce qu'on appelle une *démonstration directe*. Pourtant, il convient parfois de procéder par une démonstration *indirecte* ou *par contraposition*, c'est-à-dire en supposant que $Q$ n'est pas vraie et sur cette base conclure que $P$ ne peut être vraie. Cette méthode est parfaitement légitime en raison du principe de contraposition énoncé à la section 1.2.

### LE PRINCIPE DE LA CONTRAPOSITION

La proposition $P \Rightarrow Q$ est équivalente à la proposition *non* $Q \Rightarrow$ *non* $P$.

La méthode de la démonstration indirecte (par contraposition) est proche d'une autre méthode dite *par contradiction* ou *raisonnement par l'absurde*. Dans cette méthode, pour prouver que $P \Rightarrow Q$, on suppose que $P$ est vraie et que $Q$ ne l'est pas et, sur cette base, on déroule une argumentation qui aboutit à une conclusion qui *ne peut pas* être vraie, autrement dit une contradiction. Ainsi, puisque $P$ et la négation de $P$ mènent à quelque chose d'absurde, cela signifie que si $P$ est vrai, alors $Q$ doit l'être aussi.

Voici cette équivalence logique appliquée à un exemple : dire « s'il pleut, l'herbe est mouillée » revient exactement à dire « si l'herbe n'est pas mouillée, c'est qu'il ne pleut pas ».

### EXEMPLE 1.3.1

Démontrez que $-x^2 + 5x - 4 > 0 \Rightarrow x > 0$.

**Solution** On peut utiliser chacune de ces trois méthodes pour la démonstration.

(a) *Démonstration directe*. Si $-x^2 + 5x - 4 > 0$, par addition aux deux membres de $x^2 + 4$, on obtient l'inégalité $5x > x^2 + 4$. Comme $x^2 + 4 \geqslant 4$, quel que soit $x$, on a $5x > 4$ et donc aussi $x > 4/5$. *A fortiori*, $x > 0$.

(b) *Démonstration par contraposition*. Si $x$ était négatif, $5x$ le serait aussi et donc aussi $-x^2 + 5x - 4$, en tant que somme de trois termes négatifs.

(c) *Démonstration par l'absurde*. Supposons que les deux inégalités $-x^2 + 5x - 4 > 0$ et $x \leqslant 0$ soient vraies simultanément. Cela mène, comme dans la démonstration directe, à $5x > x^2 + 4$ et, comme dans la première étape de la démonstration par contraposition, à $5x \leqslant 0$. D'où $x^2 + 4 < 0$, ce qui n'est pas possible. Par cette contradiction, nous avons démontré que $-x^2 + 5x - 4 > 0$ et $x \leqslant 0$ ne peuvent pas être tous deux vrais, et que, comme annoncé, $-x^2 + 5x - 4 > 0 \Rightarrow x > 0$. ■

## EXERCICES de la section 1.3

**1.** Parmi les énoncés suivants, quels sont ceux qui sont équivalents à la proposition (incertaine) : « Si l'inflation augmente, le chômage diminue » ?

(a) Pour que le chômage diminue, l'inflation doit augmenter.

(b) Une condition suffisante pour que le chômage diminue est que l'inflation augmente.

(c) Le chômage ne peut diminuer que si l'inflation augmente.

(d) Si le chômage ne diminue pas, l'inflation n'augmente pas.

(e) Une condition nécessaire pour que l'inflation augmente est que le chômage diminue.

**2.** Démontrez par un raisonnement par contraposition que, si $x$ et $y$ sont des entiers et si $xy$ est un nombre impair, alors $x$ et $y$ sont tous les deux des nombres impairs.

# 1.4 L'induction mathématique

L'induction est une technique importante pour démontrer des formules et même des théorèmes qui impliquent les entiers naturels. Considérons par exemple la somme des $n$ premiers nombres impairs. Voici les résultats des calculs dans les cas $n = 1, 2, 3, 4$ et 5.

$$\begin{aligned} 1 &= 1 &&= 1^2 \\ 1+3 &= 4 &&= 2^2 \\ 1+3+5 &= 9 &&= 3^2 \\ 1+3+5+7 &= 16 &&= 4^2 \\ 1+3+5+7+9 &= 25 &&= 5^2 \end{aligned}$$

Ces résultats suggèrent que la somme cherchée est égale à $n^2$,

$$P(n): \quad 1 + 3 + 5 + \cdots + (2n-1) = n^2. \tag{$*$}$$

On appelle l'équation $(*)$ l'*hypothèse d'induction* ou *de récurrence*. Pour démontrer que $P(n)$ est vraie quel que soit $n$ entier naturel, on procède comme suit. On commence par l'*initialisation* : on vérifie $P(1)$, c'est-à-dire que la formule $(*)$ est correcte au rang 1 (pour $n$ égal à 1).

On passe à l'étape d'*hérédité* de la récurrence, qui consiste à montrer que, pour tout $k \geqslant 1$, si $P(k)$ est vraie, alors il s'ensuit que $P(k+1)$ est vraie. Autrement dit, on démontre que $P(k) \Rightarrow P(k+1)$. Ici, il suffit d'ajouter le $(k+1)$-ième nombre impair, qui est $2k+1$, à chaque membre de $(*)$. Cela donne

$$1 + 3 + 5 + \cdots + (2k-1) + (2k+1) = k^2 + (2k+1) = (k+1)^2.$$

Mais c'est précisément $P(k+1)$ dans lequel : (i) le membre de gauche de $(*)$ se termine non pas avec le $k$-ième nombre impair $2k-1$, mais avec le $(k+1)$-ième nombre impair $2k+1$ ; (ii) le membre de droite de $(*)$ a été « incrémenté » de $k^2$ à $(k+1)^2$. Cela termine la preuve de l'hérédité, à savoir que, si $P(k)$ est vraie parce que la somme des $k$ premiers nombres impairs est bien égale à $k^2$, alors $P(k+1)$ est vraie, car la somme des $k+1$ nombre impairs est égale à $(k+1)^2$.

D'après l'initialisation, qui énonce que la formule $(*)$ est vraie pour $n = 1$, l'étape d'hérédité implique que $(*)$ est vraie pour tout $n$. En effet, si $(*)$ est vraie pour $n = 1$, l'étape d'hérédité a montré qu'alors c'est vrai pour $n = 2$ ; que si c'est vrai pour $n = 2$, alors c'est aussi vrai pour $n = 3$ ; ... ; que si c'est vrai pour $n$, alors c'est vrai pour $n+1$ ; etc.

Une démonstration de ce type est qualifiée de *démonstration par induction* (ou *démonstration par récurrence*)[6].

### EXEMPLE 1.4.1

Démontrez par induction que, quel que soit l'entier naturel $n$,

$$3 + 3^2 + 3^3 + 3^4 + \cdots + 3^n = \tfrac{1}{2}(3^{n+1} - 3). \tag{$**$}$$

***Solution*** Initialisation : pour $n = 1$, les deux membres sont égaux à 3. Hérédité : on suppose $(**)$ vraie pour $n = k$. Si on ajoute le terme suivant $3^{k+1}$ à chaque membre de $(**)$, on obtient

$$3 + 3^2 + 3^3 + 3^4 + \cdots + 3^k + 3^{k+1} = \tfrac{1}{2}\,(3^{k+1} - 3) + 3^{k+1} = \tfrac{1}{2}\,(3^{k+2} - 3)$$

qui est précisément $(**)$ énoncé pour $n = k+1$ au lieu de $n = k$. Ainsi, par induction, $(**)$ est vraie quel que soit $n$. ■

Ces exemples ont mis en évidence la structure générale d'une démonstration par induction. L'objectif est de démontrer qu'un énoncé logique, par exemple une formule mathématique $P(n)$ qui dépend de $n$, est valable pour tous les entiers naturels $n$. Dans les deux exemples précédents, les énoncés respectifs $P(n)$ étaient

$$\begin{aligned} P(n):&\quad 1 + 3 + 5 + \cdots + (2n-1) = n^2 \\ \text{et }\ P(n):&\quad 3 + 3^2 + 3^3 + 3^4 + \cdots + 3^n = \tfrac{1}{2}\,(3^{n+1} - 3). \end{aligned}$$

Les étapes nécessaires à chaque démonstration par récurrence sont les suivantes. On commence par l'initialisation, en vérifiant que $P(1)$ est vraie pour $n = 1$. Ensuite, on démontre que, quel que soit l'entier naturel $k$, si $P(k)$ est vraie, *alors* $P(k+1)$ est vraie. C'est l'étape d'hérédité. Si $P(1)$ est vraie et que l'hérédité a été démontrée pour un entier naturel $k$, on peut conclure par induction que l'énoncé $P(n)$ est vrai pour tout $n$[7].

---

[6] On trouve des raisonnements par récurrence dès l'Antiquité chez les philosophes et mathématiciens grecs, y compris chez Platon et Euclide.

[7] L'analogie de l'échelle aide à comprendre ce principe : si vous êtes capable d'atteindre le premier échelon d'une échelle et si, par ailleurs, vous êtes capable de passer de n'importe quel échelon au suivant, vous êtes capable de gravir l'échelle (d'un nombre infini d'échelons !).

## LE PRINCIPE DE L'INDUCTION (OU RÉCURRENCE) MATHÉMATIQUE

Pour tout entier naturel $n$, soit $P(n)$ une proposition qui dépend de $n$. Si :

(a) $P(1)$ est vraie ;

(b) quel que soit l'entier naturel $k$, si $P(k)$ est vraie, alors $P(k+1)$ est vraie ;

alors $P(n)$ est vraie pour tout entier naturel $n$.

## EXERCICES de la section 1.4

**1.** Démontrez par induction que pour tout entier naturel $n$,

$$1 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{1}{2}n(n+1). \tag{$*$}$$

**2.** Démontrez par induction que pour tout entier naturel $n$,

$$\frac{1}{1 \times 2} + \frac{1}{2 \times 3} + \frac{1}{3 \times 4} + \cdots + \frac{1}{n(n+1)} = \frac{n}{n+1}. \tag{$**$}$$

**3.** En remarquant que la somme $1^3 + 2^3 + 3^3 = 36$ est divisible par 9, démontrez par induction que la somme $n^3 + (n+1)^3 + (n+2)^3$ de trois cubes consécutifs est toujours divisible par 9.

## EXERCICES RÉCAPITULATIFS du chapitre 1

**1.** Soit $A = \{1, 3, 4\}$, $B = \{1, 4, 6\}$, $C = \{2, 4, 3\}$ et $D = \{1, 5\}$. Déterminez $A \cap B$ ; $A \cup B$ ; $A \setminus B$ ; $B \setminus A$ ; $(A \cup B) \setminus (A \cap B)$ ; $A \cup B \cup C \cup D$ ; $A \cap B \cap C$ ; $A \cap B \cap C \cap D$.

**2.** Soit $x$ et $y$ des nombres réels. Décidez si les implications suivantes sont vraies et si elles sont vraies en sens inverse.

(a) $x = 5$ et $y = -3 \Rightarrow x + y = 2$

(b) $x^2 = 16 \Rightarrow x = 4$

(c) $(x-3)^2\,(y+2)$ est un nombre positif $\Rightarrow y$ est supérieur à $-2$

(d) $x^3 = 8 \Rightarrow x = 2$

**3.** [PLUS DIFFICILE] Démontrez le résultat suivant, appelé *inégalité de Bernoulli*[8] : pour tout réel $x \geqslant -1$ et tout entier naturel $n$, on a : $(1+x)^n \geqslant 1 + nx$. (Si besoin vous trouverez des rappels sur les inégalités et les puissances $n$-ièmes aux sections 2.2 et 2.6.)

[8] Nommé d'après Jacques Bernoulli (1654-1705), membre d'une grande famille de savants et mathématiciens.