Jean-Marie Monier | Guillaume Haberer

l'intégrale

MATHS PCSI-PTSI

TOUT LE 1er SEMESTRE

DUNOD

Direction et conception graphiques de la couverture :
Nicolas Weil - Elizabeth Riba (graphiste)

Retrouvez nos ouvrages pour les prépas scientifiques ici

http://dunod.link/prepassc

NOUS NOUS ENGAGEONS EN FAVEUR DE L'ENVIRONNEMENT :

Nos livres sont imprimés sur des papiers certifiés pour réduire notre impact sur l'environnement.

Le format de nos ouvrages est pensé afin d'optimiser l'utilisation du papier.

Depuis plus de 30 ans, nous imprimons 70 % de nos livres en France et 25 % en Europe et nous mettons tout en œuvre pour augmenter cet engagement auprès des imprimeurs français.

Nous limitons l'utilisation du plastique sur nos ouvrages (film sur les couvertures et les livres).

11 rue Paul Bert, 92240 Malakoff
www.dunod.com
ISBN 978-2-10-086828-5

Table des matières

Avant-propos

Cet ouvrage traite intégralement le programme du premier semestre de Mathématiques des classes de PCSI et PTSI, ces deux classes ayant quasi exactement le même programme sur cette période.

Il s'adresse aux élèves qui viennent d'entrer en PCSI ou PTSI.

Ils y trouveront les bases théoriques et le vocabulaire des ensembles dans les chapitres 1 à 4, et tout ce qui leur est nécessaire pour réviser et maîtriser les calculs usuels dans les chapitres 5 à 14.

Les élèves trouveront ensuite dans chacun des chapitres suivants une aide précieuse pour l'assimilation du cours et l'apprentissage des méthodes de résolution d'exercices, constituant un soutien solide pour leur travail tout au long du premier semestre.

Chaque chapitre est constitué de trois parties : cours, exercices d'apprentissage et exercices d'entraînement.

Le cours est détaillé, sans les démonstrations. Le programme officiel est exactement respecté. Chaque notion ou propriété est illustrée par des exemples et des contre-exemples. Des remarques répondent souvent par avance aux questions que l'élève pourrait logiquement se poser. De nombreuses figures permettent de mieux visualiser les situations.

Les nombreux exercices, de niveau très facile à facile, permettent à l'élève de mieux assimiler le cours et de l'appliquer dans des contextes classiques. Chaque énoncé d'exercice est suivi de son corrigé détaillé.

Les chapitres sont volontairement plus courts que dans un manuel, ce qui permet à l'élève de faire assez rapidement le tour des notions envisagées de façon à passer ensuite aux exercices en un temps raisonnable. Nous conseillons aux élèves un travail régulier, dès l'amorce en classe du chapitre concerné.

Les auteurs remercient Emmanuelle Chatelet et Brice Martin, des éditions Dunod, sans qui cet ouvrage n'aurait pu voir le jour.

1 Logique, ensembles

Depuis le début du XX^e siècle, l'utilisation du vocabulaire de la théorie des ensembles a permis de clarifier, simplifier, unifier toutes les mathématiques. Depuis de nombreuses années, ce vocabulaire s'est fixé et est devenu la langue universelle de tous ceux et celles qui font des mathématiques. Son emploi induit des modes de raisonnement simples, clairs, généraux, et l'étudiant ou l'étudiante en mathématiques peut ainsi cheminer sur une voie sûre.
Le but est ici d'exposer un vocabulaire et des propriétés utilisables et utilisés dans tous les domaines des mathématiques, sans masquer inutilement la puissance de leur généralité, mais également sans développement stérile.

Rappels de cours

1 Logique

Définition

Une **assertion** (ou aussi : affirmation) p, correctement exprimée, peut être **vraie** ou **fausse**, l'un des deux mais pas les deux simultanément.
Une **table de vérité** consigne ces deux possibilités, dans laquelle on note V pour vrai et F pour faux, ou encore 1 pour vrai et 0 pour faux :

p
V
F

Les deux lignes correspondent aux deux possibilités pour l'assertion p.

Définition

Une **proposition** (ou aussi : théorème, ou aussi : propriété) est une assertion vraie.

Définition

La **négation** d'une assertion p est l'assertion notée (non p) (ou : $\neg p$), définie par la table de vérité suivante :

p	non p
V	F
F	V

Définition

Les connecteurs logiques

conjonction « **et** » (ou aussi : $\wedge$), **disjonction** « **ou** » (ou aussi : $\vee$),
implication « $\Longrightarrow$ », **équivalence logique** « $\Longleftrightarrow$ »,

sont définis, pour deux assertions p, q, par les tables de vérité suivantes :

p	q	p et q	p ou q	$p \Longrightarrow q$	$p \Longleftrightarrow q$
V	V	V	V	V	V
V	F	F	V	F	F
F	V	F	V	V	F
F	F	F	F	V	V

Les quatre lignes correspondent aux quatre possibilités pour les assertions p, q.

On note aussi $\begin{cases} p \\ q \end{cases}$, et même $(p,\ q)$, pour $p \wedge q$.
Par exemple, $(x = 1,\ y = 2)$ signifie : $x = 1$ et $y = 2$.

Dans l'implication « $p \Longrightarrow q$ », p s'appelle l'**hypothèse**, q s'appelle la **conclusion**.
Lorsque l'implication « $p \Longrightarrow q$ » est vraie, on dit aussi que :

- p **entraîne** q ;
- p **implique** q ;
- **si** p est vraie **alors** q est vraie ;
- pour que p soit vraie il **faut** que q soit vraie ;
- pour que q soit vraie il **suffit** que p soit vraie ;
- p est une **condition suffisante** pour q ;
- q est une **condition nécessaire** de p.

Lorsque l'équivalence logique « $p \Longleftrightarrow q$ » est vraie, on dit aussi que :

- p est **équivalente** à q ;
- p est logiquement équivalente à q ;
- p et q sont équivalentes ;
- p et q sont logiquement équivalentes ;
- pour que p soit vraie **il faut et il suffit** que q soit vraie ;
- p est une **condition nécessaire et suffisante** (CNS) pour q ;
- p est vraie **si et seulement si** q est vraie, ou encore : p si et seulement si q.

Deux assertions sont logiquement équivalentes si et seulement si elles sont toutes les deux vraies, ou toutes les deux fausses.

L'implication « $q \implies p$ » est appelée la **réciproque** de l'implication « $p \implies q$ ».

Attention
Bien noter qu'une implication n'est pas équivalente à sa réciproque : il se peut que l'implication « $p \implies q$ » soit vraie et que sa réciproque « $q \implies p$ » soit fausse. Par exemple, si un nombre réel est positif ou nul, alors son carré est positif ou nul, mais la réciproque est fausse, comme le montre l'exemple du nombre -1, dont le carré est positif ou nul, mais -1 lui-même n'est pas positif ou nul.

Proposition

Les assertions suivantes sont toujours vraies, quelles que soient les valeurs de vérité (vrai ou faux) des assertions p, q, r qui interviennent :
$(p \text{ ou } p) \iff p$, $\quad (p \text{ et } p) \iff p$, $\quad p \text{ ou } (\text{non } p)$, $\quad \text{non}\big(p \text{ et } (\text{non } p)\big)$,
$p \implies p$, $\quad p \iff p$, $\quad \big(\text{non}(\text{non } p)\big) \iff p$,
$\big((p \text{ et } q) \text{ et } r\big) \iff \big(p \text{ et } (q \text{ et } r)\big)$, $\quad \big((p \text{ ou } q) \text{ ou } r\big) \iff \big(p \text{ ou } (q \text{ ou } r)\big)$,
$(p \implies q) \iff \big((\text{non } p) \text{ ou } q\big)$, $\quad (p \implies q) \iff \big((\text{non } q) \implies (\text{non } p)\big)$,
$\big(p \text{ et } (p \implies q)\big) \implies q$, $\quad \big(\text{non}(p \implies q)\big) \iff \big(p \text{ et } (\text{non } q)\big)$.

Définition

L'implication « $(\text{non } q) \implies (\text{non } p)$ » est appelée la **contraposée** (ou aussi : contre-apposée) de l'implication « $p \implies q$ », et ces deux implications sont équivalentes.

Attention
Ne pas confondre réciproque et contraposée.

Exemple
À titre d'exemple, démontrons, par une table de vérité, le théorème

$$\big(\text{non } (p \implies q)\big) \iff \big(p \text{ et } (\text{non } q)\big) \ :$$

p	q	$p \implies q$	$\text{non } (p \implies q)$	$\text{non } q$	$p \text{ et } (\text{non } q)$
V	V	V	F	F	F
V	F	F	V	V	V
F	V	V	F	F	F
F	F	V	F	V	F

Puisque les deux assertions $\big(\text{non}\,(p \implies q)\big)$, $\big(p \text{ et } \text{non}\, q\big)$ ont la même table de vérité, elles sont logiquement équivalentes.

Pour établir qu'une assertion p est vraie, surtout lorsque p s'exprime grammaticalement à l'aide d'une négation, on peut essayer de **raisonner par l'absurde** : on suppose que p est fausse, et on déduit que cela entraîne une contradiction, c'est-à-dire une assertion fausse.

Exemple

Dans le plan, soient D, D' deux droites parallèles entre elles, Δ une troisième droite. Montrer que si Δ est sécante à D (c'est-à-dire telle que D et Δ ont exactement un point commun), alors Δ est sécante à D'.

Raisonnons par l'absurde : supposons Δ non sécante à D'. Alors, puisque Δ et D' sont dans le même plan, Δ est parallèle à D'. Ainsi, D est parallèle à D' (par hypothèse), et Δ est parallèle à D', donc (cours de géométrie) D est parallèle à Δ, contradiction. Ce raisonnement par l'absurde montre que Δ est sécante à D'.

2 Ensembles

2.1 Ensembles, sous-ensembles

Définition

Lorsqu'un objet x est un **élément** d'un ensemble E, on note $x \in E$, et, lorsque x n'est pas un élément de E, on note $x \notin E$.

Exemple

$-4 \in \mathbb{Z}, \quad -4 \notin \mathbb{N}$.

Définition

On note $\varnothing$ l'ensemble vide, qui n'a aucun élément.

Définition

Pour tout objet x, on note $\{x\}$ le **singleton** formé de x tout seul, c'est-à-dire l'ensemble ne contenant que x.

Le quantificateur universel $\forall$ se lit « pour tout » ou « quel que soit ».
Le quantificateur existentiel $\exists$ se lit « il existe au moins un élément ».
La notation $\exists!$ signifie : il existe un élément et un seul.
Si $p(x)$ est une assertion portant sur un élément x d'une ensemble E, la notation $\big(\nexists x \in E,\ p(x)\big)$ signifie qu'il n'existe pas de $x \in E$ tel que $p(x)$, et revient donc à non $\big(\exists x \in E,\ p(x)\big)$, ou encore à $\big(\forall x \in E,\ \text{non } p(x)\big)$.
La lettre affectée par un quantificateur est **muette** : elle peut être remplacée par n'importe quelle lettre (n'ayant pas, par ailleurs, déjà une signification); par exemple, si P est une assertion portant sur un élément d'un ensemble E :

$$\big(\forall x \in E, \quad P(x)\big) \iff \big(\forall y \in E, \quad P(y)\big),$$
$$\big(\exists x \in E, \quad P(x)\big) \iff \big(\exists U \in E, \quad P(U)\big).$$

Une assertion est dite quantifiée lorsqu'elle comporte au moins un quantificateur.
La négation d'une assertion quantifiée est obtenue en changeant chaque $\forall$ en $\exists$, chaque $\exists$ en $\forall$, et en remplaçant l'assertion finale par sa négation ; par exemple :

$$\big(\text{non } \big(\forall x \in E,\ P(x)\big)\big) \iff \big(\exists x \in E,\ \text{non } P(x)\big)$$

$$\big(\text{non } \big(\exists x \in E,\ P(x)\big)\big) \iff \big(\forall x \in E,\ \text{non } P(x)\big)$$

Toute assertion quantifiée commençant par « $\exists\, x \in \varnothing$ » est fausse.

Toute assertion quantifiée commençant par « $\forall x \in \varnothing$ » est vraie.

Dans une assertion quantifiée, on ne peut pas, a priori, modifier l'ordre des quantificateurs.

Par exemple, l'assertion « $\forall x \in \mathbb{N},\ \exists\, y \in \mathbb{N},\quad x \leqslant y$ » est vraie, comme on le voit en prenant, par exemple, $y = x + 1$, mais l'assertion « $\exists\, y \in \mathbb{N},\ \forall x \in \mathbb{N},\quad x \leqslant y$ », obtenue en permutant $\forall x \in \mathbb{N}$ et $\exists\, y \in \mathbb{N}$, est fausse, car il n'existe pas d'entier y fixé (indépendant de tout x) tel que y soit plus grand que tout entier x.

Cependant, si les ensembles E et E' sont fixés et indépendants l'un de l'autre :

- on peut remplacer « $\forall x \in E,\ \forall x' \in E'$ » par « $\forall x' \in E',\ \forall x \in E$ »,
  ou encore par « $\forall (x, x') \in E \times E'$ » ;
- on peut remplacer « $\exists\, x \in E,\ \exists\, x' \in E'$ » par « $\exists\, x' \in E',\ \exists\, x \in E$ »,
  ou encore par « $\exists\, (x, x') \in E \times E'$ ».

Définition

Étant donné deux ensembles E, F, on dit que E est **inclus** dans F (ou aussi : E est un **sous-ensemble** de F ; ou aussi : E est une **partie** de F ; ou aussi : F contient E), et on note $E \subset F$ (ou aussi : $F \supset E$), si et seulement si : $\forall x \in E,\quad x \in F$.

Exemple

1) L'ensemble $\{1, 2\}$ est une partie de $\mathbb{N}$.

2) L'ensemble $\mathbb{N}$ est une partie de $\mathbb{R}$.

3) L'ensemble $\{-1, 1\}$ n'est pas une partie de $\mathbb{N}$.

On note $\mathcal{P}(E)$ l'ensemble des parties d'un ensemble E.

Exemple

$\mathcal{P}(\varnothing) = \{\varnothing\},\quad \mathcal{P}(\{0, 1\}) = \big\{\varnothing,\ \{0\},\ \{1\},\ \{0, 1\}\big\}$.

On remarque que : $\big(A \in \mathcal{P}(E) \iff A \subset E\big),\quad \big(\{x\} \in \mathcal{P}(E) \iff x \in E\big)$.

On note $E \subsetneq F$ pour : $E \subset F$ et $E \neq F$.

On note $E \not\subset F$ la négation de $E \subset F$, c'est-à-dire : $\exists\, x \in E,\quad x \notin F$.

Attention

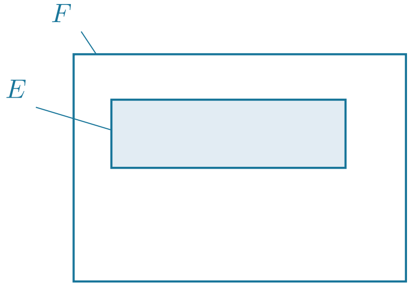
Ne pas confondre $E \subsetneq F$ et $E \not\subset F$.

Exemple

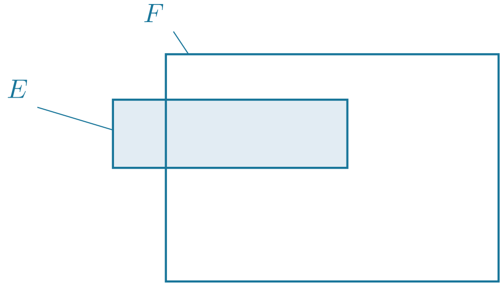
1) On a $\{1, 2\} \subsetneq \{1, 2, 3\}$ mais on n'a pas $\{1, 2\} \not\subset \{1, 2, 3\}$.

2) On a $\{1, 2\} \not\subset \{1, 3\}$ mais on n'a pas $\{1, 2\} \subsetneq \{1, 3\}$.

3) Sur des schémas (diagrammes de Venn) :



Exemple dans lequel
$E \subsetneq F$
(E est inclus dans F
et E est différent de F)



Exemple dans lequel
$E \not\subset F$
(E n'est pas inclus dans F)

On a, pour deux ensembles E, F : $\quad E = F \iff (E \subset F \text{ et } F \subset E)$,

et donc : $\quad E \neq F \iff \big(E \not\subset F \text{ ou } F \not\subset E\big)$

$$\iff \big((\exists\, x \in E,\ \ x \notin F) \text{ ou } (\exists\, y \in F,\ \ y \notin E)\big).$$

Les propriétés suivantes, pour tous ensembles E, F, G, sont immédiates :

$$\varnothing \subset E, \qquad E \subset E, \qquad \big(E \subset F \text{ et } F \subset G\big) \implies E \subset G.$$

2.2 Opérations sur les ensembles

Définition

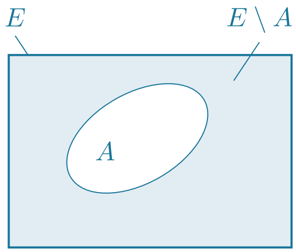
Soient E un ensemble, $A, B \in \mathcal{P}(E)$. On définit les parties suivantes de E :

$\overline{A} = E \setminus A = A^c = \complement_E(A) = \{x \in E\,;\, x \notin A\}$, **complémentaire** de A dans E,

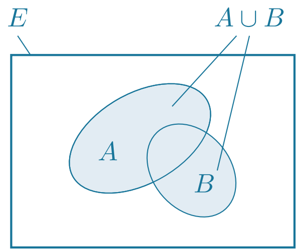
$A \cup B = \{x \in E\,;\, x \in A \text{ ou } x \in B\}$, **réunion** (ou aussi : union) de A et B,

$A \cap B = \{x \in E\,;\, x \in A \text{ et } x \in B\}$, **intersection** de A et B,

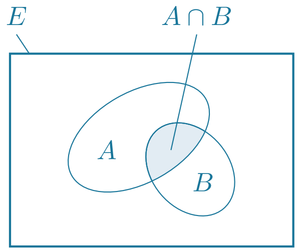
$A \setminus B = \{x \in E\,;\, x \in A \text{ et } x \notin B\}$, **différence**, A **privé de** B.



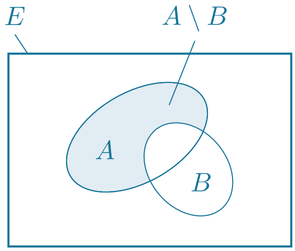
Complémentaire
de A dans E



Réunion de A et B



Intersection de A et B



A privé de B

Attention

Ne pas confondre, pour une partie A d'un ensemble E, la notation $\overline{A}$, complémentaire de A dans E, et la même notation $\overline{A}$ dans l'étude des espaces vectoriels normés, qui désigne l'adhérence de A dans E.

Si F, G sont des ensembles (et pas seulement, comme plus haut, des parties d'un même ensemble), on admet qu'on peut définir $F \cup G$, $F \cap G$, $F \setminus G$, $F \triangle G$ de façon analogue à celle vue ci-dessus.

Exemple

1) Pour $E = \{1, 2, 3\}$ et $F = \{2, 4\}$, on a :

$E \cup F = \{1, 2, 3, 4\}$, $E \cap F = \{2\}$, $E \backslash F = \{1, 3\}$, $F \backslash E = \{4\}$, $E \triangle F = \{1, 3, 4\}$.

2) Pour $E = \mathbb{R}$, $A =]0\,;2]$, $B = [1\,;3]$, on a :

$A \cup B =]0\,;3]$, $A \cap B = [1\,;2]$, $A \backslash B =]0\,;1[$, $B \backslash A =]2\,;3]$, $A \triangle B =]0\,;1[\cup]2\,;3]$.

3) Pour $E = \mathbb{R}$, $A = \mathbb{R}_+$, $B = \mathbb{N}$, on a :

$$A \cup B = \mathbb{R}_+, \quad A \cap B = \mathbb{N}, \quad A \setminus B = \bigcup_{n \in \mathbb{N}}]n\,;n+1[= A \triangle B, \quad B \setminus A = \varnothing,$$

en utilisant une notation désignant la réunion d'une infinité d'ensembles.

Remarque : Pour définir un objet à partir d'autres objets déjà définis, on peut utiliser la notation « $:=$ ». Par exemple, au lieu de « Pour $E = \{1, 2, 3\}$ », on peut écrire : « $E := \{1, 2, 3\}$ ».

Définition

Deux ensembles F, G sont dits **disjoints** si et seulement si $F \cap G = \varnothing$.

Exemple

1) Les ensembles $\mathbb{R}_+$ et $\mathbb{R}_-^*$ sont disjoints.

2) Les ensembles $\mathbb{R}_+^*$ et $\mathbb{R}_-^*$ sont disjoints.

3) Les ensembles $[0\,;1]$ et $[1\,;2]$ ne sont pas disjoints, car leur intersection est l'ensemble $\{1\}$, qui n'est pas vide.

Attention
Ne pas confondre disjoints (c'est-à-dire $E \cap F = \varnothing$) et distincts (c'est-à-dire $E \neq F$).

On dispose des propriétés suivantes, pour toutes parties A, B, C d'un ensemble E :

Proposition

$\overline{\varnothing} = E, \quad \overline{E} = \varnothing, \quad \overline{\overline{A}} = A, \quad A \subset B \iff \overline{B} \subset \overline{A},$
$A \cup \varnothing = A,\ A \cup A = A,\ A \cup E = E,\ A \cup B = B \cup A,\ (A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C),$
$A \cap \varnothing = \varnothing,\ A \cap A = A,\ A \cap E = A,\ A \cap B = B \cap A,\ (A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C),$
$\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}, \quad \overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B},$
$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C), \quad A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C).$

Il pourra être utile de remarquer : $A \cap B = \varnothing \iff A \subset \overline{B} \iff B \subset \overline{A}$.

2.3 Partitions d'un ensemble

Définition
On appelle **partition** d'un ensemble E toute famille $(A_i)_{i \in I}$ de parties de E telles que :

- $\forall i \in I, \quad A_i \neq \varnothing$,
- $\forall (i, j) \in I^2, \quad (i \neq j \implies A_i \cap A_j = \varnothing)$,
- $\forall x \in E,\ \exists i \in I, \quad x \in A_i$.

Autrement dit, la famille $(A_i)_{i \in I}$ de parties de E est une partition de E si et seulement si les A_i sont toutes non vides, deux à deux disjointes, et de réunion égale à E.
La notion de famille sera vue dans le chapitre 3.

Exemple
1) La famille $(\mathbb{R}_-^*, \{0\}, \mathbb{R}_+^*)$ est une partition de $\mathbb{R}$.
2) La famille $(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}_-)$ n'est pas une partition de $\mathbb{R}$, car $\mathbb{R}_+ \cap \mathbb{R}_- = \{0\} \neq \varnothing$.
3) La famille $(\mathbb{R}_-^*, \varnothing, \mathbb{R}_+)$ n'est pas une partition de $\mathbb{R}$, car elle contient l'élément $\varnothing$.
4) La famille $(\mathbb{R}_-,]0\,;2])$ n'est pas une partition de $\mathbb{R}$, car la réunion des éléments de cette famille n'est pas égale à $\mathbb{R}$.

Nous retrouverons la notion de partition lors de l'étude d'une relation d'équivalence, dans le chapitre 2.

2.4 Produits cartésiens d'ensembles

Définition

Pour deux éléments x, y, on appelle **couple** (x, y) la liste ordonnée formée par x puis y.

Exemple

On peut considérer le couple $(-1, 2)$, le couple $(1, 1)$, le couple $(\mathbb{R}, \mathbb{C})$.

Proposition

On a, pour tous couples (x, y), (a, b) : $\boxed{(x, y) = (a, b) \iff (x = a \text{ et } y = b)}$

Définition

Pour des ensembles E, F, on appelle **produit cartésien** $E \times F$ de E par F l'ensemble de tous les couples (x, y) où $x \in E$, $y \in F$: $\boxed{E \times F = \big\{(x, y)\,;\, x \in E \text{ et } y \in F\big\}}$

Le produit cartésien $E \times E$ est souvent noté E^2.
Par exemple, $\mathbb{R}^2$ est l'ensemble des couples de deux nombres réels.
En pratique, écrire « $\forall (x, y) \in E \times F$, ... », revient à écrire « $\forall x \in E$, $\forall y \in F$, ... ».

Définition

La notion de couple (x, y) se généralise en n-**uplet** $(x_1, ..., x_n)$, et la notion de produit cartésien $E \times F$ de deux ensembles se généralise en **produit cartésien** $E_1 \times \cdots \times E_n$ de plusieurs ensembles :

$$\boxed{E_1 \times \cdots \times E_n = \big\{(x_1, ..., x_n)\,;\, \forall k \in \{1, ..., n\},\ \ x_k \in E_k\big\}}$$

Si $E_1 = ... = E_n = E$, le produit cartésien $E_1 \times \cdots \times E_n$ est noté E^n.

Exemple

$\mathbb{R}^n = \{(x_1, ..., x_n)\,;\, x_1 \in \mathbb{R}, ..., x_n \in \mathbb{R}\}$.

Exercices d'apprentissage

1.1

Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que n est pair si et seulement si n^2 est pair, et que n est impair si et seulement si n^2 est impair.

1) Montrons d'abord que si n est pair, alors n^2 est pair et que, si n est impair, alors n^2 est impair.

- Supposons n pair. Il existe alors $k \in \mathbb{N}$ tel que $n = 2k$.

On a : $n^2 = (2k)^2 = 4k^2 = 2(2k^2)$ et $2k^2 \in \mathbb{N}$, donc n^2 est pair.

- Supposons n impair. Il existe alors $k \in \mathbb{N}$ tel que $n = 2k+1$.

On a : $n^2 = (2k+1)^2 = 4k^2 + 4k + 1 = 2(2k^2 + 2k) + 1$ et $2k^2 + 2k \in \mathbb{N}$, donc n^2 est impair.

2) Montrons maintenant les réciproques, en utilisant un raisonnement par l'absurde.

- Supposons que n^2 est pair.

Raisonnons par l'absurde : supposons que n n'est pas pair. Alors n est impair, donc, d'après *1)*, n^2 est impair, contradiction avec l'hypothèse n^2 pair.

Ce raisonnement par l'absurde montre que n est pair.

- Supposons que n^2 est impair.

Raisonnons par l'absurde : supposons que n n'est pas impair. Alors n est pair, donc, d'après *a)*, n^2 est pair, contradiction avec l'hypothèse n^2 impair.

Ce raisonnement par l'absurde montre que n est impair.

1.2

Soient p, q, r des assertions. Montrer que l'assertion $\big((p \text{ ou } q) \implies r\big)$ est équivalente à l'assertion $(p \implies r)$ ou $(q \implies r)$.

On a :

$$\begin{aligned}
\big((p \text{ ou } q) \implies r\big) &\iff \Big(\big(\text{non}\,(p \text{ ou } q)\big) \text{ ou } r\Big) \iff \Big(\big((\text{non}\,p) \text{ et } (\text{non}\,q)\big) \text{ ou } r\Big)\\
&\iff \Big(\big((\text{non}\,p) \text{ ou } r\big) \text{ et } \big((\text{non}\,q) \text{ ou } r\big)\Big)\\
&\iff \big((p \implies r) \text{ et } (q \implies r)\big).
\end{aligned}$$

1.3

Soient E, F des ensembles. Montrer : $E \subset F \iff \mathcal{P}(E) \subset \mathcal{P}(F)$.

Nous allons montrer l'équivalence en montrant deux implications, un sens puis sa réciproque.

1) Supposons $E \subset F$.

Soit $A \in \mathcal{P}(E)$. On a alors $A \subset E$, puis $A \subset F$, c'est-à-dire $A \in \mathcal{P}(F)$.

Ceci montre : $\mathcal{P}(E) \subset \mathcal{P}(F)$.

2) Réciproquement, supposons $\mathcal{P}(E) \subset \mathcal{P}(F)$.

Utilisons les singletons. Soit $x \in E$. On a alors $\{x\} \in \mathcal{P}(E)$, puis, comme $\mathcal{P}(E) \subset \mathcal{P}(F)$, on déduit $\{x\} \in \mathcal{P}(F)$, c'est-à-dire $\{x\} \subset F$, d'où $x \in F$.

Ceci montre : $E \subset F$.

1.4

Soient E un ensemble, $A, B \in \mathcal{P}(E)$.
Montrer : $A \setminus B = A \setminus (A \cap B) = (A \cup B) \setminus B$.

Il est conseillé, dans les calculs, de partir de l'objet apparemment le plus compliqué.
On a, en utilisant entre autres le complémentaire d'une intersection, la distributivité de l'intersection sur la réunion :

$$A \setminus (A \cap B) = A \cap \left(\overline{A \cap B}\right) = A \cap (\overline{A} \cup \overline{B}) = (A \cap \overline{A}) \cup (A \cap \overline{B}) = A \setminus B$$
$$(A \cup B) \setminus B = (A \cup B) \cap \overline{B} = (A \cap \overline{B}) \cup (B \cap \overline{B}) = A \setminus B.$$

Remarquons que les égalités demandées sont apparentes sur un diagramme de Venn.

1.5

Soient E un ensemble, $A, B, C \in \mathcal{P}(E)$. Montrer :

a) $A \cap B = A \iff A \subset B$

b) $A \cup B = A \iff B \subset A$.

a) 1) Si $A \cap B = A$, alors $A = A \cap B \subset B$.
2) Réciproquement, on a toujours $A \cap B \subset A$, et, d'autre part, si $A \subset B$, alors, tout élément de A est dans A et dans B, donc $A \subset A \cap B$, d'où finalement $A \cap B = A$.

b) 1) Si $A \cup B = A$, alors $B \subset B \cup A = A \cup B$.
2) Réciproquement, on a toujours $A \subset A \cup B$, et, d'autre part, si $B \subset A$, alors tout élément de $A \cup B$ est dans A, donc $A \cup B \subset A$, d'où finalement $A \cup B = A$.

1.6

Soient E un ensemble, $A, B \in \mathcal{P}(E)$. Simplifier $\overline{(A \cap B) \cup \overline{A}} \cup \overline{A \cup B}$.

Plusieurs calculs sont possibles. On peut commencer, par exemple, par exprimer tous les complémentaires sur des parties plus simples, en utilisant les formules sur le complémentaire d'une réunion, le complémentaire d'une intersection, et la distributivité de l'intersection sur la réunion :

$$\begin{aligned}\overline{(A \cap B) \cup \overline{A}} \cup \overline{A \cup B} &= \left(\overline{A \cap B} \cap A\right) \cup (\overline{A} \cap \overline{B}) = \left((\overline{A} \cup \overline{B}) \cap A\right) \cup (\overline{A} \cap \overline{B}) \\ &= \left((\overline{A} \cap A) \cup (\overline{B} \cap A)\right) \cup (\overline{A} \cap \overline{B}) = (A \cap \overline{B}) \cup (\overline{A} \cap \overline{B}) \\ &= (A \cup \overline{A}) \cap \overline{B} \; = \; E \cap \overline{B} \; = \; \overline{B}.\end{aligned}$$

Exercices d'entraînement

1.7 Différences sur plusieurs ensembles

Soient E un ensemble, $A, B \in \mathcal{P}(E)$.
Simplifier : $A \setminus (A \setminus B)$, $A \setminus (B \setminus A)$, $(A \setminus B) \setminus A$, $(A \setminus B) \setminus B$.

1.8 Équivalence logique entre des égalités d'ensembles

Soient E un ensemble, $A, B, C \in \mathcal{P}(E)$.
Montrer : $A \cup B = A \cup C \iff A \cup \overline{B} = A \cup \overline{C}$.

1.9 Exemple de résolution d'une équation d'inconnue $X \in \mathcal{P}(E)$

Soient E un ensemble, $A, B \in \mathcal{P}(E)$ telles que $B \subset A$.
Résoudre l'équation $A \cap X = B$, d'inconnue $X \in \mathcal{P}(E)$.

1.10 Complémentaire d'un produit et produit des complémentaires

Soient E, F des ensembles, $A \subset E$, $B \subset F$, $\overline{A}$ le complémentaire de A dans E, $\overline{B}$ le complémentaire de B dans F, $\overline{A \times B}$ le complémentaire de $A \times B$ dans $E \times F$.
Peut-on affirmer : $\overline{A \times B} = \overline{A} \times \overline{B}$?

Corrigés des exercices d'entraînement

1.7

Exprimons toutes les différences d'ensembles par la définition, en nous ramenant à des complémentaires, intersections, réunions :

- $A \setminus (A \setminus B) = A \cap \left(\overline{A \cap \overline{B}}\right)$
  $= A \cap (\overline{A} \cup B) = (A \cap \overline{A}) \cup (A \cap B)$
  $= \varnothing \cup (A \cap B) = A \cap B,$
- $A \setminus (B \setminus A) = A \cap \left(\overline{B \cap \overline{A}}\right)$
  $= A \cap (\overline{B} \cup A) = A,$
- $(A \setminus B) \setminus A = (A \cap \overline{B}) \cap \overline{A}$
  $= (A \cap \overline{A}) \cap \overline{B} = \varnothing,$
- $(A \setminus B) \setminus B = (A \cap \overline{B}) \cap \overline{B}$
  $= A \cap (\overline{B} \cap \overline{B}) = A \cap \overline{B} = A \setminus B.$

1.8

Plusieurs calculs sont possibles, et on peut, d'autre part, passer par les éléments.

1) On a :

$$\begin{aligned}
& A \cup B = A \cup C \\
\iff\ & \overline{A \cup B} = \overline{A \cup C} \\
\iff\ & \overline{A} \cap \overline{B} = \overline{A} \cap \overline{C} \\
\implies\ & A \cup (\overline{A} \cap \overline{B}) = A \cup (\overline{A} \cap \overline{C}) \\
\iff\ & (A \cup \overline{A}) \cap (A \cup \overline{B}) \\
& \qquad = (A \cup \overline{A}) \cap (A \cup \overline{C}) \\
\iff\ & E \cap (A \cup \overline{B}) = E \cap (A \cup \overline{C}) \\
\iff\ & A \cup \overline{B} = A \cup \overline{C}.
\end{aligned}$$

Ceci montre l'implication :

$$A \cup B = A \cup C \implies A \cup \overline{B} = A \cup \overline{C}.$$

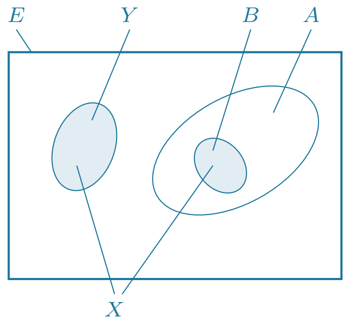
2) En appliquant le résultat de *1)* à $(\overline{B}, \overline{C})$ à la place de (B, C), on a :

$$\begin{aligned}
A \cup \overline{B} = A \cup \overline{C} &\implies A \cup \overline{\overline{B}} = A \cup \overline{\overline{C}} \\
&\implies A \cup B = A \cup C.
\end{aligned}$$

On conclut :

$$A \cup B = A \cup C \iff A \cup \overline{B} = A \cup \overline{C}.$$

1.9



D'après le schéma, les solutions X de l'équation $A \cap X = B$ semblent être les parties X de la forme $X = B \cup Y$ où Y est une partie quelconque de E telle que $Y \subset \overline{A}$.
1) Soient $Y \subset \overline{A}$ et $X = B \cup Y$.

Alors :

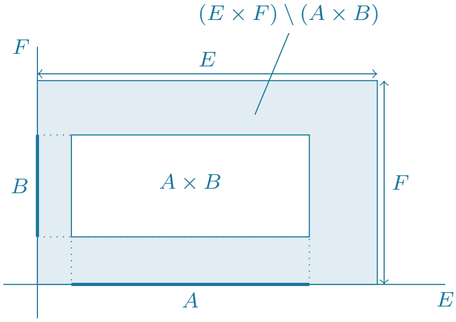
$$\begin{aligned}
A \cap X &= A \cap (B \cup Y) \\
&= (A \cap B) \cup (A \cap Y) = B \cup (A \cap Y)
\end{aligned}$$

et, comme $Y \subset \overline{A}$, on a $A \cap Y \subset A \cap \overline{A} = \varnothing$, donc $A \cap Y = \varnothing$, d'où $A \cap X = B$, donc X est solution de l'équation $A \cap X = B$.
2) Réciproquement, soit $X \in \mathcal{P}(E)$ tel que $A \cap X = B$.
Considérons $Y = \overline{A} \cap X$.
On a alors $Y \subset \overline{A}$ et :

$$\begin{aligned}
X = E \cap X &= (A \cup \overline{A}) \cap X \\
&= (A \cap X) \cup (\overline{A} \cap X) = B \cup Y,
\end{aligned}$$

donc X est de la forme $X = B \cup Y$ où $Y \subset \overline{A}$.
On conclut que les solutions $X \in \mathcal{P}(E)$ de l'équation $A \cap X = B$ (où, par hypothèse, $B \subset A$) sont les parties X de E de la forme $X = B \cup Y$, où Y est une partie quelconque de E telle que $Y \subset \overline{A}$.

1.10



Sur un schéma correspondant à l'exemple où $E = F = \mathbb{R}$ et A, B sont des intervalles de $\mathbb{R}$, on voit que le complémentaire de $A \times B$ dans $E \times F$ n'est pas formé seulement de $\overline{A} \times \overline{B}$ et qu'il manque, par exemple, $A \times \overline{B}$. D'ailleurs, on peut montrer :

$$\overline{A \times B} = (A \times \overline{B}) \cup (\overline{A} \times B) \cup (\overline{A} \times \overline{B}).$$

Donnons un contrexemple explicite :

Pour $E = F = \{0, 1\}$ et $A = B = \{0\}$, on a :
$\overline{A} = \{1\}$, $\overline{B} = \{1\}$, $A \times B = \{(0,0)\}$,
$E \times F = \{(0,0), (0,1)\,(1,0), (1,1)\}$,
$\overline{A \times B} = \{(0,1), (1,0), (1,1)\}$, $\overline{A} \times \overline{B} = \{(1,1)\}$,
et donc $\overline{A \times B} \neq \overline{A} \times \overline{B}$.

2 Ensembles de nombres usuels

L'ensemble $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots\}$ des entiers naturels est l'ensemble de nombres le plus simple, qui sert couramment à compter les objets. À partir de $\mathbb{N}$, on construit l'ensemble $\mathbb{Z}$ des entiers relatifs, c'est-à-dire les entiers avec signe, puis l'ensemble $\mathbb{Q}$ des nombres rationnels, c'est-à-dire les fractions d'entiers avec signes. L'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels est le plus utile en Analyse, il contient $\mathbb{Q}$. L'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes a déjà été étudié dans les chapitres 11 à 13. On a : $\mathbb{N} \subsetneq \mathbb{Z} \subsetneq \mathbb{Q} \subsetneq \mathbb{R} \subsetneq \mathbb{C}$.
Conformément au Programme officiel, nous admettons l'existence et l'unicité, à la notation près, de ces ensembles.

Rappels de cours

1 Ensemble $\mathbb{N}$ des entiers naturels

1.1 Propriétés algébriques

Nous rappelons ici les propriétés usuelles des entiers naturels, supposées connues.
L'ensemble $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots\}$ des **entiers naturels** est muni de deux lois internes, l'addition, notée $+$, la multiplication, notée $\cdot$ (ou aussi : $\times$, ou aussi par l'absence de symbole), qui vérifient les propriétés suivantes :

$+$ est commutative, associative, admet un neutre noté 0

$\cdot$ est commutative, associative, admet un neutre, noté 1

$\cdot$ est distributive sur $+$

$\forall a, b \in \mathbb{N},\ \forall c \in \mathbb{N},\quad \big(a + c = b + c \iff a = b\big)$

$\forall a, b \in \mathbb{N},\ \forall c \in \mathbb{N} \setminus \{0\},\quad \big(ac = bc \iff a = b\big).$

On note $\mathbb{N}^* = \mathbb{N} \setminus \{0\}$.
L'ensemble $\mathbb{N}$ est muni d'une relation d'ordre total, notée $\leqslant$, vérifiant les propriétés suivantes :

$\forall a, b \in \mathbb{N},\ \forall c \in \mathbb{N},\quad \big(a + c \leqslant b + c \iff a \leqslant b\big)$

$\forall a, b \in \mathbb{N},\ \forall c \in \mathbb{N}^*,\quad \big(ac \leqslant bc \iff a \leqslant b\big)$

toute partie non vide de $\mathbb{N}$ admet un plus petit élément

toute partie non vide et majorée de $\mathbb{N}$ admet un plus grand élément.

On déduit les propriétés élémentaires suivantes :

$\forall a, b, c, d \in \mathbb{N},\quad \Big(\big(a \leqslant b \text{ et } c \leqslant d\big) \implies a + c \leqslant b + d\Big)$

$\forall a, b, c, d \in \mathbb{N},\quad \Big(\big(a \leqslant b \text{ et } c \leqslant d\big) \implies ac \leqslant bd\Big)$

$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \forall a, b \in \mathbb{N},\quad \big(a \leqslant b \iff a^n \leqslant b^n\big).$

1.2 Raisonnement par récurrence

1.2.1 Récurrence simple

On dispose du **théorème de récurrence** suivant :

Théorème

Soit $n_0 \in \mathbb{N}$ fixé. Si une partie E de $\mathbb{N}$ vérifie

- $n_0 \in E$
- et, pour tout $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geqslant n_0$, $\big(n \in E \implies n+1 \in E\big)$,

alors $E = \{n \in \mathbb{N}\,;\, n \geqslant n_0\}$.

Ce théorème se traduit en pratique de la façon suivante.

Proposition

Soient $n_0 \in \mathbb{N}$ et $\mathcal{H}_n$ une assertion dépendant d'un entier naturel $n \geqslant n_0$.

- Si $\mathcal{H}_{n_0}$ est vraie
- et si, pour tout $n \in \mathbb{N}$, dès que $\mathcal{H}_n$ est vraie, alors $\mathcal{H}_{n+1}$ est vraie,

alors $\mathcal{H}_n$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geqslant n_0$.

Autrement dit, si une assertion $\mathcal{H}_n$, dépendant d'un entier naturel n, est vraie pour un entier n_0 et si, dès qu'elle est vraie pour un entier quelconque n alors elle est vraie pour l'entier $n+1$ suivant, alors cette propriété est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geqslant n_0$.
L'assertion $\mathcal{H}_{n_0}$ s'appelle l'**initialisation**, et la démonstration de l'implication $\big(\mathcal{H}_n \implies \mathcal{H}_{n+1}\big)$ s'appelle le **passage de récurrence**.
Quand on va faire un raisonnement par récurrence, il est conseillé :

a) d'annoncer que l'on va faire une récurrence,

b) de démontrer l'initialisation,

c) de démontrer le passage de récurrence,

d) de conclure.

Exemple

Montrons, par récurrence, le résultat classique : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \displaystyle\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$.

La formule est triviale pour $n = 1$.
Si la formule est vraie pour un $n \in \mathbb{N}^*$ fixé, alors :

$$\sum_{k=1}^{n+1} k = \left(\sum_{k=1}^{n} k\right) + (n+1) \underset{[HR_n]}{=} \frac{n(n+1)}{2} + (n+1) = \frac{(n+1)(n+2)}{2},$$

donc la formule est vraie pour $n+1$.
Ce raisonnement par récurrence montre que la formule est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

Dès qu'il s'agit de démontrer qu'une propriété $\mathcal{H}_n$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$ (à partir d'un certain entier n_0), il faut envisager la possibilité de faire une récurrence, et, pour que cette récurrence ait une chance d'aboutir, il faut que l'on puisse faire un lien simple entre $\mathcal{H}_{n+1}$ et $\mathcal{H}_n$.

1.2.2 Récurrence à deux pas

Lorsque l'assertion $\mathcal{H}_{n+1}$ n'est pas simplement reliée à $\mathcal{H}_n$ mais qu'elle fait intervenir $\mathcal{H}_n$ et $\mathcal{H}_{n-1}$, alors on peut essayer de faire un raisonnement par **récurrence à deux pas** (ou aussi : récurrence double) :

Proposition

- Si $\mathcal{H}_{n_0}$ et $\mathcal{H}_{n_0+1}$ sont vraies
- et si, pour tout $n \in \mathbb{N}$, dès que $\mathcal{H}_n$ et $\mathcal{H}_{n+1}$ sont vraies, alors $\mathcal{H}_{n+2}$ est vraie,

alors $\mathcal{H}_n$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geqslant n_0$.

Remarque : Une récurrence à deux pas pour prouver l'assertion $\mathcal{H}_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geqslant n_0$, revient à une récurrence (simple) sur l'assertion « $\mathcal{H}_n$ et $\mathcal{H}_{n+1}$ ».

Exemple

Montrer que la suite de Fibonacci, définie par $\phi_0 = 0$, $\phi_1 = 1$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\phi_{n+2} = \phi_{n+1} + \phi_n$, est à termes dans $\mathbb{N}$.
On fait une récurrence à deux pas.
Il est clair que la propriété est vraie pour $n = 0$ et pour $n = 1$.
Si, pour un $n \in \mathbb{N}$ fixé, ϕ_n et ϕ_{n+1} sont dans $\mathbb{N}$, alors, par addition, $\phi_{n+2} = \phi_{n+1} + \phi_n$ est dans $\mathbb{N}$.
Ce raisonnement par récurrence à deux pas montre que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\phi_n \in \mathbb{N}$.

1.2.3 Récurrence forte

Il peut arriver que $\mathcal{H}_{n+1}$ ne dépende pas que de $\mathcal{H}_n$, et ne dépende pas que de $\mathcal{H}_n$ et $\mathcal{H}_{n-1}$, mais dépende de tous les précédents, $\mathcal{H}_0, ..., \mathcal{H}_n$. On peut alors essayer d'utiliser un raisonnement par **récurrence forte** :

Proposition

- Si $\mathcal{H}_{n_0}$ est vraie
- et si, pour tout $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geqslant n_0$, dès que $\mathcal{H}_{n_0}, ..., \mathcal{H}_n$ sont vraies, alors $\mathcal{H}_{n+1}$ est vraie,

alors $\mathcal{H}_n$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geqslant n_0$.

Remarque : Une récurrence forte pour prouver l'assertion $\mathcal{H}_n$, pour tout $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geqslant n_0$, revient à une récurrence simple sur l'assertion « $\forall k \in \{n_0, ..., n\}$, $\mathcal{H}_k$ ».

Exemple

Montrons un résultat du cours : tout entier $\geqslant 2$ admet au moins un facteur premier.
La propriété est triviale pour $n = 2$, puisque 2 est facteur premier de 2.
Supposons que, pour un $n \geqslant 2$ fixé, la propriété est vraie pour tout entier k de 2 à n.
Si le nombre $n+1$ est premier, alors il admet lui-même comme facteur premier.
Si $n+1$ n'est pas premier, alors $n+1$ admet au moins un diviseur entier a dans $\mathbb{N}^*$ autre que 1 et que $n+1$, donc un diviseur a tel que $2 \leqslant a \leqslant n$. D'après l'hypothèse de récurrence forte, a admet au moins un facteur premier, et celui-ci est alors facteur premier de $n+1$, donc la propriété est vraie pour $n+1$.
Ceci montre, par récurrence forte, que tout entier $\geqslant 2$ admet au moins un facteur premier.

Pour l'étude de la divisibilité dans $\mathbb{N}$, voir le chapitre 29 sur l'arithmétique dans $\mathbb{Z}$.

1.3 Analyse combinatoire

Proposition

Pour tous $n, p \in \mathbb{N}$ tels que $p \leqslant n$, le nombre de parties à p éléments d'un ensemble à n éléments est $\dbinom{n}{p} = \dfrac{n!}{p!(n-p)!}$ Les nombres $\dbinom{n}{p}$ sont appelés **coefficients binomiaux** (à cause de la formule du binôme de Newton, cf. ci-après).

Remarque :

1) On a, en particulier, pour tout $n \in \mathbb{N}$: $\dbinom{n}{0} = 1, \quad \dbinom{n}{n} = 1.$

2) On a, pour tous $n, p \in \mathbb{N}$ tels que $p \leqslant n$: $\dbinom{n}{p} = \dfrac{n(n-1)\cdots(n-p+1)}{p!}$.

3) Pour tous $n, p \in \mathbb{N}$ tels que $p \leqslant n$, le nombre $\dbinom{n}{p}$ est un entier naturel non nul.

On note, pour $p > n$ et pour $p < 0$: $\dbinom{n}{p} = 0$.

On dispose des propriétés suivantes :

Proposition

1) $\forall n, p \in \mathbb{N}, \quad \dbinom{n}{p} = \dbinom{n}{n-p}$.

2) $\forall n, p \in \mathbb{N}, \quad \dbinom{n}{p} + \dbinom{n}{p+1} = \dbinom{n+1}{p+1}$.

On place les $\dbinom{n}{p}$ sous forme d'un triangle, appelé **triangle de Pascal**, dans lequel

$\binom{n}{p}$ se trouve à la ligne n, colonne p, pour $0 \leqslant p \leqslant n$:

$n \backslash p$	0	1	2	3	4	5	$\cdots$	p	$p+1$	$\cdots$
1	1	1								
2	1	2	1							
3	1	3	3	1						
4	1	4	6	4	1					
5	1	5	10	10	5	1				
$\vdots$										
n								$\binom{n}{p}$	$\binom{n}{p+1}$	
$n+1$									$\binom{n+1}{p+1}$	
$\vdots$										

On dispose de la très importante **formule du binôme de Newton**, par exemple pour deux nombres complexes :

Proposition

Pour tous $n \in \mathbb{N}$, $x, y \in \mathbb{C}$: $\quad (x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k}.$

2 Ensemble $\mathbb{Z}$ des entiers relatifs

L'ensemble $\mathbb{Z} = \{..., -2, -1, 0, 1, 2, ...\}$ des **entiers relatifs** est muni de deux lois internes, l'addition, notée $+$, la multiplication, notée $\cdot$ (ou aussi : $\times$, ou aussi par l'absence de symbole), prolongeant ces mêmes opérations de $\mathbb{N}$, qui vérifient les propriétés suivantes :

$+$ est commutative, associative, admet un neutre noté 0

tout élément n de $\mathbb{Z}$ admet un opposé, noté $-n$

$\cdot$ est commutative, associative, admet un neutre, noté 1

$\cdot$ est distributive sur $+$

$\forall a, b \in \mathbb{Z}, \forall c \in \mathbb{Z}, \quad \big(a + c = b + c \iff a = b\big)$

$\forall a, b \in \mathbb{Z}, \forall c \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}, \quad \big(ac = bc \iff a = b\big).$

On note $\mathbb{Z}^* = \mathbb{Z} \setminus \{0\}, \quad \mathbb{Z}_- = \{-n\,;\, n \in \mathbb{N}\}, \quad \mathbb{Z}_-^* = \mathbb{Z}_- \setminus \{0\}, \quad \mathbb{Z}_+ = \mathbb{N}.$

L'ensemble $\mathbb{Z}$ est muni d'une relation d'ordre total, notée $\leqslant$, prolongeant $\leqslant$ de $\mathbb{N}$, vérifiant la propriété suivante :

$$\forall a, b \in \mathbb{Z},\ \forall c \in \mathbb{Z},\quad \big(a + c \leqslant b + c \iff a \leqslant b\big).$$

On en déduit : $\quad \forall a, b, c, d \in \mathbb{Z},\quad \left(\begin{cases} a \leqslant b \\ c \leqslant d \end{cases} \implies a + c \leqslant b + d\right),$

$$\forall a, b \in \mathbb{Z},\ \forall c \in \mathbb{N}^*,\quad \big(ac \leqslant bc \iff a \leqslant b\big).$$

La propriété suivante, presque évidente, peut être utile dans les exercices :

Proposition

$$\forall a, b \in \mathbb{Z},\quad \big(a < b \iff a + 1 \leqslant b\big).$$

Autrement dit, dans $\mathbb{Z}$, une inégalité stricte peut être remplacée par une inégalité large en gagnant une unité. La propriété analogue n'est pas vraie dans $\mathbb{Q}$ ni dans $\mathbb{R}$, bien sûr.

La divisibilité et l'arithmétique dans $\mathbb{Z}$ seront étudiées dans le chapitre 3.

3 Ensemble $\mathbb{Q}$ des nombres rationnels

L'ensemble $\mathbb{Q}$ des **nombres rationnels** est l'ensemble des fractions $\dfrac{a}{b}$, où $(a, b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*$.

L'ensemble $\mathbb{Q}$ est muni d'une addition, notée $+$, d'une multiplication, notée $\cdot$ (ou aussi : $\times$, ou aussi par l'absence de symbole), et d'une relation d'ordre total notée $\leqslant$ telles que :

$\mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$, on confond a et $\dfrac{a}{1}$, pour $a \in \mathbb{Z}$

la loi $+$ est commutative, associative, admet un neutre noté 0

tout élément r de $\mathbb{Q}$ admet un opposé, noté $-r$

la loi $\cdot$ est commutative, associative, admet un neutre noté 1

tout élément r de $\mathbb{Q}$ **non nul** admet un inverse, noté $\dfrac{1}{r}$

la loi $\cdot$ est distributive sur la loi $+$

$\forall a, b, c \in \mathbb{Q},\quad \big(a + c \leqslant b + c \iff a \leqslant b\big)$

$\forall a, b, c, d \in \mathbb{Q},\quad \Big(\big(a \leqslant b \text{ et } c \leqslant d\big) \implies a + c \leqslant b + d\Big)$

$\forall a, b, c \in \mathbb{Q},\ \Big(\big(a \leqslant b \text{ et } 0 < c\big) \implies ac \leqslant bc\Big)$

pour tous $x, y \in \mathbb{Q}$ tels que $x < y$, il existe $z \in \mathbb{Q}$ tel que $x < z < y$.

On note : $\mathbb{Q}^* = \mathbb{Q} \setminus \{0\}$,

$\mathbb{Q}_- = \{r \in \mathbb{Q}\,;\, r \leqslant 0\}$, $\qquad \mathbb{Q}_+ = \{r \in \mathbb{Q}\,;\, r \geqslant 0\}$,

$\mathbb{Q}_-^* = \{r \in \mathbb{Q}\,;\, r < 0\}$, $\qquad \mathbb{Q}_+^* = \{r \in \mathbb{Q}\,;\, r > 0\}$.

4 Ensemble des nombres réels

4.1 Rappels sur la relation $\leqslant$ dans $\mathbb{R}$

4.1.1 Rappels

La relation $\leqslant$ dans $\mathbb{R}$ vérifie les propriétés suivantes :

1) $\leqslant$ est réflexive, c'est-à-dire : $\forall x \in \mathbb{R}, \quad x \leqslant x$

2) $\leqslant$ est antisymétrique, c'est-à-dire : $\forall x, y \in \mathbb{R}, \quad \left(\begin{cases} x \leqslant y \\ y \leqslant x \end{cases} \implies x = y \right)$

3) $\leqslant$ est transitive, c'est-à-dire : $\forall x, y, z \in \mathbb{R}, \quad \left(\begin{cases} x \leqslant y \\ y \leqslant z \end{cases} \implies x \leqslant z \right).$

On note $<$ la relation dans $\mathbb{R}$ définie par :

$$\forall x, y \in \mathbb{R}, \quad \Big(x < y \iff (x \leqslant y \quad \text{et} \quad x \neq y) \Big).$$

D'autre part, par commodité, on note $y \geqslant x$ pour $x \leqslant y$, et on note $y > x$ pour $x < y$.
L'ordre $\leqslant$ dans $\mathbb{R}$ est **total**, c'est-à-dire que : $\forall x, y \in \mathbb{R}, \quad (x \leqslant y \quad \text{ou} \quad y \leqslant x)$.

4.1.2 Plus grand élément, plus petit élément

Définition

Soit X une partie de $\mathbb{R}$.
Un élément M de X est appelé **le plus grand élément de** X (ou aussi : **l'élément maximum de** X) si et seulement si : $\forall x \in X, \quad x \leqslant M$.
Un élément m de X est appelé **le plus petit élément de** X (ou aussi : **l'élément minimum de** X) si et seulement si : $\forall x \in X, \quad m \leqslant x$.

Remarque :

1) Si X admet un plus grand élément M, alors X n'admet qu'un seul plus grand élément, car, si M' est aussi plus grand élément de X, alors $M \leqslant M'$ et $M' \leqslant M$, donc $M = M'$.

2) Il se peut qu'une partie X de $\mathbb{R}$ n'admette pas de plus grand élément.

Ainsi, il n'y a que deux possibilités :
ou bien X admet un plus grand élément, et X n'en admet alors qu'un seul ;
ou bien X n'a pas de plus grand élément.

Exemple

1) Dans $\mathbb{R}$, la partie $\{1, 4\}$ admet un plus grand élément et celui-ci est 4.

2) Dans $\mathbb{R}$, la partie $\mathbb{N}^*$ n'admet pas de plus grand élément.

4.1.3 Majorants, minorants

Définition

Soit X une partie de $\mathbb{R}$.
On dit qu'un réel M est un **majorant** de X si et seulement si :

$$\forall x \in X, \quad x \leqslant M.$$

On dit qu'un réel m est un **minorant** de X si et seulement si :

$$\forall x \in X, \quad m \leqslant x.$$

Remarque :

1) Noter la différence entre la définition de « M est le plus grand élément de X », dans laquelle M est élément de la partie X, et la définition de « M est un majorant de X », dans laquelle M est élément de $\mathbb{R}$, pas nécessairement de X. Autrement dit, le plus grand élément de X, s'il existe, est un majorant de X, lorsque ce majorant est lui-même dans X.

2) Une partie X de $\mathbb{R}$ peut ne pas avoir de majorant, avoir une infinité de majorants.

3) Si M est un majorant de X, alors tout réel M' tel que $M \leqslant M'$, est aussi un majorant de X.

Exemple

La partie $\mathbb{N}$ n'a pas de majorant, la partie $\{-1, 3\}$ a une infinité de majorants (tous les réels $\geqslant 3$).

4.1.4 Borne supérieure, borne inférieure

Définition

Soit X une partie de $\mathbb{R}$.
On dit qu'un réel S est **la borne supérieure de** X si et seulement si S est le plus petit des majorants de X, s'il existe.
On dit qu'un réel I est **la borne inférieure de** X si et seulement si I est le plus grand des minorants de X, s'il existe.

Remarque :

1) Puisque, s'il existe, le plus petit élément d'une partie est unique, on déduit que, si X admet une borne supérieure, alors celle-ci est unique, et on la note $\mathrm{Sup}(X)$.

2) Puisque, s'il existe, le grand élément d'une partie est unique, on déduit que, si X admet une borne inférieure, alors celle-ci est unique, et on la note $\mathrm{Inf}(X)$.

3) On a, pour toute partie non vide X de $\mathbb{R}$:
- ou bien $\mathrm{Sup}(X)$ existe et est dans X,
- ou bien $\mathrm{Sup}(X)$ existe et n'est pas dans X,
- ou bien $\mathrm{Sup}(X)$ n'existe pas.

Exemple

1) Pour la partie $X = [0\,;1]$, l'ensemble des majorants de X est $[1\,;+\infty[$ et cet ensemble admet un plus petit élément qui est 1, donc $\mathrm{Sup}(X)$ existe, est égal à 1 et appartient à X.

2) Pour la partie $X = [0\,;1[$, l'ensemble des majorants de X est $[1\,;+\infty[$ et cet ensemble admet un plus petit élément qui est 1, donc $\mathrm{Sup}(X)$ existe, est égal à 1 et n'appartient pas à X.

3) Pour la partie $X = [0\,;+\infty[$, l'ensemble des majorants de X est vide, donc n'a pas de plus petit élément (puisqu'il n'a aucun élément), donc Sup(X) n'existe pas.

4.2 Généralités sur $\mathbb{R}$

Nous admettons l'existence et l'unicité, à la notation près, d'un ensemble $\mathbb{R}$, muni de deux lois internes, l'addition, notée $+$, et la multiplication, notée $\cdot$ (ou aussi : $\times$, ou aussi par l'absence de symbole), et d'une relation d'ordre $\leqslant$, prolongeant l'addition, la multiplication, l'ordre $\leqslant$ dans $\mathbb{Q}$, telles que :

1) $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ est un corps commutatif, c'est-à-dire :

- l'addition est commutative, associative, admet 0 pour neutre, et tout élément x de $\mathbb{R}$ admet un opposé noté $-x$
- la multiplication est commutative, associative, admet 1 pour neutre, et tout élément **non nul** de $\mathbb{R}$ admet un inverse, noté $\dfrac{1}{x}$
- la multiplication est distributive sur l'addition

2) • $\forall a, b \in \mathbb{R},\ \forall c \in \mathbb{R},\quad \big(a \leqslant b \implies a + c \leqslant b + c\big)$

• $\forall a, b \in \mathbb{R},\ \forall c \in \mathbb{R},\quad \Big(\big(a \leqslant b \text{ et } c \geqslant 0\big) \implies ac \leqslant bc\Big)$

3) toute partie non vide et majorée de $\mathbb{R}$ admet une borne supérieure dans $\mathbb{R}$ (propriété de la borne supérieure dans $\mathbb{R}$).

Les éléments de $\mathbb{R}$ sont appelés les **réels** (ou aussi : les **nombres réels**).
On note : $\mathbb{R}^* = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ l'ensemble des réels non nuls,
$\mathbb{R}_+ = \{x \in \mathbb{R}\,;\, x \geqslant 0\}$ l'ensemble des réels positifs ou nuls,
$\mathbb{R}_- = \{x \in \mathbb{R}\,;\, x \leqslant 0\}$ l'ensemble des réels négatifs ou nuls,
$\mathbb{R}_+^* = \{x \in \mathbb{R}\,;\, x > 0\}$ l'ensemble des réels strictement positifs,
$\mathbb{R}_-^* = \{x \in \mathbb{R}\,;\, x < 0\}$ l'ensemble des réels strictement négatifs.
Il est clair que $(\mathbb{R}_-^*, \{0\}, \mathbb{R}_+^*)$ est une partition de $\mathbb{R}$ et que :

$$\mathbb{R}_+ \cap \mathbb{R}_- = \{0\}, \quad \mathbb{R}_+ \cup \mathbb{R}_- = \mathbb{R}.$$

On définit les **intervalles** de $\mathbb{R}$, pour $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $a \leqslant b$:

$[a\,;b] = \{x \in \mathbb{R}\,;\, a \leqslant x \leqslant b\}$,

$[a\,;b[= \{x \in \mathbb{R}\,;\, a \leqslant x < b\}$, $\quad]a\,;b] = \{x \in \mathbb{R}\,;\, a < x \leqslant b\}$,

$]a\,;b[= \{x \in \mathbb{R}\,;\, a < x < b\}$,

$[a\,;+\infty[= \{x \in \mathbb{R}\,;\, x \geqslant a\}$, $\quad]a\,;+\infty[= \{x \in \mathbb{R}\,;x > a\}$,

$]-\infty\,;b] = \{x \in \mathbb{R}\,;\, x \leqslant b\}$, $\quad]-\infty\,;b[= \{x \in \mathbb{R}\,;\, x < b\}$,

$]-\infty\,;+\infty[= \mathbb{R}$.

Dans les notations ci-dessus, les éléments a, b, $-\infty$, $+\infty$ sont appelés les **extrémités** (ou aussi : bornes) de l'intervalle en question. Par exemple, pour l'intervalle $[a\,;+\infty[$, l'extrémité gauche est a, l'extrémité droite est $+\infty$.
On appelle **segments** les intervalles $[a\,;b]$.
On appelle **intervalles fermés** les intervalles $[a\,;b]$, $[a\,;+\infty[$, $]-\infty\,;b]$, $]-\infty\,;+\infty[$.
On appelle **intervalles ouverts** les intervalles $]a\,;b[$, $]a\,;+\infty[$, $]-\infty\,;b[$, $]-\infty\,;+\infty[$.
On appelle **intervalle semi-ouverts** (ou aussi : **intervalles semi-fermés**) les intervalles $[a\,;b[$, $]a\,;b]$.
Pour les intervalles de $\mathbb{R}$, on dispose de la caractérisation suivante :

Proposition

Une partie X de $\mathbb{R}$ est un intervalle si et seulement si, pour tous a et b dans X, le segment de $\mathbb{R}$ joignant a et b est inclus dans X.

Cela revient à dire que les intervalles de $\mathbb{R}$ sont les parties convexes de $\mathbb{R}$, mais la notion de partie convexe n'est pas dans le Programme officiel.

Proposition

Pour $X \subset \mathbb{R}$ et $s \in \mathbb{R}$, les trois assertions suivantes sont deux à deux équivalentes :

1) s est la borne supérieure de X dans $\mathbb{R}$

2) $\big(\forall x \in X,\ \ x \leqslant s\big)$ et $\big(\forall \varepsilon > 0,\ \exists\, x \in X,\ \ x \geqslant s - \varepsilon\big)$

3) s est un majorant de X dans $\mathbb{R}$ et il existe une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ à termes dans X convergeant vers s (voir le chapitre 24).

Exemple

La borne supérieure de $[0\,;1[$ dans $\mathbb{R}$ existe et est égale à 1, car :
1 est un majorant de $[0\,;1[$ dans $\mathbb{R}$ et la suite $\left(1 - \dfrac{1}{n}\right)_{n\geqslant 2}$ est à termes dans $[0\,;1[$ et converge vers 1.

On dispose de la propriété suivante, à propos d'inégalités larges ou strictes dans $\mathbb{R}$:

Proposition

$$\forall a, b, c, d \in \mathbb{R},\quad \Big(\big(a \leqslant b \ \text{ et } \ c < d\big) \implies a + c < b + d\Big)$$

et, plus généralement, quand on additionne des inégalités de même sens dont l'une au moins est stricte, l'inégalité obtenue est stricte.

On déduit, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tous $a_1, \ldots, a_n,\ b_1, \ldots, b_n \in \mathbb{R}$:

$$\left(\big(\forall k \in \{1, \ldots, n\},\ \ a_k \leqslant b_k\big) \ \text{ et } \ \sum_{k=1}^{n} a_k = \sum_{k=1}^{n} b_k\right) \implies \big(\forall k \in \{1, \ldots, n\},\ \ a_k = b_k\big).$$

La **valeur absolue** d'un réel a été définie et étudiée dans le chapitre 8.

4.3 Nombres irrationnels

Définition

Un nombre réel est dit **irrationnel** si et seulement s'il n'est pas rationnel.

Autrement dit, l'ensemble des irrationnels est $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.

Exemple

1) Le nombre $\sqrt{2}$ est irrationnel, voir l'exercice 2.6.

2) On peut montrer, mais c'est un peu plus difficile, que e et π sont irrationnels.

3) À l'heure actuelle, on ne sait toujours pas, par exemple, si π^{e} est rationnel ou est irrationnel.

Proposition

Tout intervalle ouvert non vide de $\mathbb{R}$ rencontre $\mathbb{Q}$ et rencontre $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$. Autrement dit, strictement entre deux réels distincts, il existe au moins un rationnel et au moins un irrationnel. En réitérant, on déduit que, strictement entre deux réels distincts, il existe une infinité de rationnels et une infinité d'irrationnels.

4.4 Valeurs décimales approchées d'un réel

On note $\mathbb{D} = \{\alpha \cdot 10^{-n} \,;\, (\alpha, n) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}\}$, appelé **ensemble des nombres décimaux**.
Il est clair que $\mathbb{D} \subset \mathbb{Q}$ et que $\mathbb{D} \neq \mathbb{Q}$, puisque, par exemple, le nombre $\dfrac{1}{3}$ est rationnel mais n'est pas décimal.
Soit $a \in \mathbb{R}$. Notons, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\quad u_n = 10^{-n}\lfloor 10^n a \rfloor \quad v_n = 10^{-n}(\lfloor 10^n a \rfloor + 1)$.
On a alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$: $u_n \leqslant a < v_n$, $10^n u_n \in \mathbb{Z}$ et $10^n v_n \in \mathbb{Z}$, $v_n - u_n = 10^{-n}$.
Le nombre décimal u_n (resp. v_n) est appelé **la valeur approchée décimale par défaut (resp. par excès) de a à 10^{-n} près**.
On montre que : la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante, la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante, et ces deux suites convergent vers a.

Exemple

La suite des valeurs décimales approchées par défaut de π commence par les nombres décimaux suivants : $\quad 3, \quad 3,1, \quad 3,14, \quad 3,141, \quad 3,1415, \ldots$
et la suite des valeurs décimales approchées par excès de π commence par les nombres décimaux suivants : $\quad 4, \quad 3,2, \quad 3,15, \quad 3,142, \quad 3,1416, \ldots$

Exercices d'apprentissage

2.1

Montrer que le produit de deux entiers naturels consécutifs non nuls est toujours pair et n'est jamais le carré d'un entier naturel.

Soit a le produit de deux entiers naturels consécutifs, $a = n(n+1)$, $n \in \mathbb{N}^*$.

1) • Si n est pair, alors, par produit, $a = n(n+1)$ est pair.

• Si n est impair, alors $n+1$ est pair, donc, par produit, $a = n(n+1)$ est pair.

On conclut que a est pair.

2) Supposons qu'il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $a = k^2$.

On a alors :

- $n^2 < n(n+1) = a = k^2$, donc $n < k$,
- $k^2 = a = n(n+1) < (n+1)(n+1) = (n+1)^2$, donc $k < n+1$,

d'où $n < k < n+1$, contradiction puisque n et k sont des entiers.

On conclut que a n'est pas le carré d'un entier.

2.2

Calculer, pour tout $n \in \mathbb{N}$: $\quad A_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}, \quad B_n = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k}.$

On a, en utilisant la formule du binôme de Newton :

$$A_n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 1^k 1^{n-k} = (1+1)^n = 2^n,$$

$$B_n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^k 1^{n-k} = (-1+1)^n = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad n \geqslant 1 \\ 1 & \text{si} \quad n = 0. \end{cases}$$

Attention : Pour $n \geqslant 1$, on a bien $0^n = 0$, mais, pour $n = 0$, on a $0^n = 0^0 = 1$ et non $0^n = 0$.

2.3

En exprimant $(\mathrm{X}+1)^{2n}$ de deux façons, montrer, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2 = \binom{2n}{n}.$$

D'une part, en utilisant la formule du binôme de Newton pour l'exposant $2n$:

$$(\mathrm{X}+1)^{2n} = \sum_{i=0}^{2n} \binom{2n}{i} \mathrm{X}^i,$$

et, d'autre part, en utilisant deux fois la formule du binôme de Newton pour l'exposant n :

$$(\mathrm{X}+1)^{2n} = (\mathrm{X}+1)^n (\mathrm{X}+1)^n = \left(\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \mathrm{X}^k\right)\left(\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \mathrm{X}^k\right).$$

Dans le développement du produit précédent, le coefficient du terme de degré n est, par produit de deux polynômes : $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\binom{n}{n-k}$. On déduit : $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\binom{n}{n-k}=\binom{2n}{n}$.

Comme, pour tout $k\in\{0,...,n\}$, $\displaystyle\binom{n}{n-k}=\binom{n}{k}$, on conclut : $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}^2=\binom{2n}{n}$.

2.4

a) Montrer, pour tout $(n,k)\in\mathbb{N}^2$ tel que $1\leqslant k\leqslant n$: $\quad k\displaystyle\binom{n}{k}=n\binom{n-1}{k-1}$.

b) Calculer, pour tout $n\in\mathbb{N}$: $\quad S_n=\displaystyle\sum_{k=0}^{n}k\binom{n}{k}$.

a) On a, pour tout $(n,k)\in\mathbb{N}^2$ tel que $1\leqslant k\leqslant n$:

$$k\binom{n}{k}=k\frac{n!}{k!(n-k)!}=\frac{n!}{(k-1)!(n-k)!}l=n\frac{(n-1)!}{(k-1)!\big((n-1)-(k-1)\big)!}=n\binom{n-1}{k-1}.$$

b) La propriété est évidente pour $n=0$.
On déduit de *a)*, pour $n\geqslant 1$:

$$S_n=\sum_{k=0}^{n}k\binom{n}{k}=\sum_{k=1}^{n}k\binom{n}{k}=\sum_{k=1}^{n}n\binom{n-1}{k-1}\underset{[i=k-1]}{=}n\sum_{i=0}^{n-1}\binom{n-1}{i}=n(1+1)^{n-1}=n2^{n-1},$$

et ce résultat englobe aussi le cas $n=0$.
On conclut : $\quad\forall n\in\mathbb{N},\quad S_n=n2^{n-1}$.

2.5

Déterminer l'ensemble $\quad E=\displaystyle\bigcap_{n\in\mathbb{N},\ n\geqslant 2}\left[1-\frac{1}{n}\,;n\right]$.

1) On a, pour tout $n\in\mathbb{N}$ tel que $n\geqslant 2$, $1-\dfrac{1}{n}<1$ et $2\leqslant n$, donc $[1\,;2]\subset\left[1-\dfrac{1}{n}\,;n\right]$.
Il en résulte, par intersection d'une famille d'ensembles : $[1\,;2]\subset E$.

2) Réciproquement, soit $x\in E$.

On a alors : $\forall n\geqslant 2,\quad 1-\dfrac{1}{n}\leqslant x\leqslant n$.

D'une part, en prenant $n=2$, on déduit $x\leqslant 2$.
D'autre part, en faisant tendre l'entier n vers l'infini (on anticipe sur la notion de convergence pour une suite), par passage à la limite dans une inégalité, on déduit $1\leqslant x$.
Ceci montre $x\in[1\,;2]$, et on déduit $E\subset[1\,;2]$.

On conclut : $E=[1\,;2]$.