Chapitre I

CINEMATIQUE ET DYNAMIQUE DES FLUIDES

1. Rappels

Quel que soit le fluide, compressible ou incompressible, il est considéré comme un milieu continu délimité par une frontière (F) (Fig. I.1), soit mobile avec les particules (point de vue de Lagrange), soit fixe (point de vue d'Euler). Bien qu'un fluide réel soit visqueux, on fait souvent l'hypothèse du fluide parfait, c'est-à-dire à viscosité négligeable.

1.1. Cinématique

Vitesses en variables d'Euler

Pour décrire les caractéristiques cinématiques du mouvement d'un fluide, on utilise en général les variables d'Euler. Dans ce concept, on ne distingue pas une particule de fluide Pa d'une autre. On ne s'intéresse qu'à la situation du fluide en un point donné M de l'espace, puis pour une région de cet espace délimitée par la frontière F. La vitesse de la particule dépend alors des variables d'espace x_i et du temps t, dites variables d'Euler :

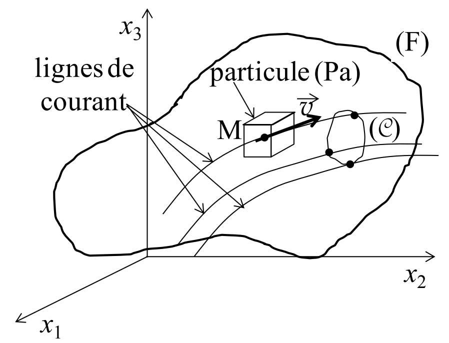

***FIG. I.1** – Elément de fluide dans un domaine à frontière fixe et repérage d'une particule Pa avec son vecteur vitesse à l'instant t*

$$\left.\begin{aligned} v_1 &= v_1(x_1, x_2, x_3, t) \\ v_2 &= v_2(x_1, x_2, x_3, t) \\ v_3 &= v_3(x_1, x_2, x_3, t) \end{aligned}\right\}$$

soit :
$$\vec{v} = \vec{v}\,(x_1, x_2, x_3, t) = \vec{v}\,(x_i, t) \quad \text{ou} \quad v_j = v_j(x_i, t) \tag{I.1}$$

De même, pour tout vecteur $\vec{G}$ quelconque défini dans l'espace du fluide, on a :

$$\vec{G} = \vec{G}(x_i, t) \text{ ou } G_j = G_j(x_i, t) \tag{I.2}$$

et, pour tout scalaire :
$$G = G(x_i, t) \tag{I.3}$$

Ainsi, les variables d'Euler et les fonctions qui s'y rattachent permettent d'étudier la vitesse, la densité, la température, la pression, les contraintes, etc., d'un fluide en écoulement, en tout **point géométrique** d'un espace **fixe**, en fonction du temps.

Ligne de courant et tube de courant

A **un instant *t*,** l'ensemble des vecteurs vitesses constitue **le champ des vitesses**. On appelle **ligne de courant** une courbe tangente, en chacun de ses points, aux vecteurs vitesses (Fig. I.1). Comme, pour un déplacement infiniment petit de M, on a :

$$\vec{v} \wedge \overrightarrow{dM} = 0 \tag{I.4}$$

Cette équation s'écrit :

$$\frac{dx_1}{v_1} = \frac{dx_2}{v_2} = \frac{dx_3}{v_3} \tag{I.5}$$

Toutes les lignes de courant qui s'appuient sur un contour fermé ($\mathcal{C}$) quelconque (Fig. I.1) forment un **tube de courant.** La surface continue située à l'intérieur d'un tube de courant et perpendiculaire en tous ses points aux lignes de courant contenues dans le tube est une **section droite**. Si le tube est de section infiniment petite, on a un **filet de courant**. La vitesse est alors la même en tous les points d'une section droite.

Lorsque l'écoulement est **permanent** (tous les paramètres sont indépendants du temps), les lignes de courant se confondent avec les **trajectoires des particules**.

Dérivée particulaire

Lorsqu'une grandeur est attachée à une particule, comme la vitesse par exemple, l'opération de dérivation dans le temps doit correspondre à une dérivée totale par rapport au temps. Ainsi, l'accélération $\vec{\gamma}$ du fluide en un point correspond à la **dérivée particulaire** (attachée à la particule) de la vitesse :

$$\vec{\gamma} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{\partial \vec{v}}{\partial x_i}\frac{dx_i}{dt} + \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} \tag{I.6}$$

Dans cette relation, les x_i sont attachés à une particule. Ainsi, les quantités dx_i/dt sont les coordonnées v_i du vecteur vitesse de la particule considérée. On peut alors écrire :

$$\vec{\gamma} = \frac{d\vec{v}}{dt} = v_i\frac{\partial \vec{v}}{\partial x_i} + \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} \quad \text{et} \quad \gamma_j = \frac{dv_j}{dt} = v_i\frac{\partial v_j}{\partial x_i} + \frac{\partial v_j}{\partial t} \tag{I.7}$$

où $\vec{\gamma}$ est l'accélération de la particule et γ_j ses composantes.

Le résultat précédent peut être généralisé à toutes les grandeurs scalaires G ou vectorielles $\vec{G}$ attachées aux particules. Les dérivées par rapport au temps de ces grandeurs seront respectivement :

$$\frac{d\vec{G}}{dt} = v_i\frac{\partial \vec{G}}{\partial x_i} + \frac{\partial \vec{G}}{\partial t} \;;\; \frac{dG_j}{dt} = v_i\frac{\partial G_j}{\partial x_i} + \frac{\partial G_j}{\partial t} \quad \text{et} \quad \frac{dG}{dt} = v_i\frac{\partial G}{\partial x_i} + \frac{\partial G}{\partial t} \tag{I.8}$$

Pour une grandeur scalaire ou pour les composantes d'une grandeur vectorielle, on peut encore écrire :

$$\frac{dG}{dt} = \frac{\partial G}{\partial t} + \vec{v}\,\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,G \quad \text{et} \quad \frac{dG_j}{dt} = \frac{\partial G_j}{\partial t} + \vec{v}\,\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,G_j \tag{I.9}$$

Régime permanent

Dans un écoulement en régime permanent, si les caractéristiques du fluide sont généralement différentes d'un point à un autre, elles restent identiques en tout point au cours du temps. Pour toute grandeur G ou G_i et pour toute expression, cela se traduit par :

$$\frac{\partial G}{\partial t} = 0 \quad \text{ou} \quad \frac{\partial G_i}{\partial t} = 0 \qquad \text{(I.10)}$$

Mouvement d'un élément de volume de fluide

Soit à l'instant t un élément de volume quelconque entourant le point M(x_i) et le point M'(x'_i) voisin de M (Fig. I.2). Dans le cas d'un système indéformable, la vitesse de M' est donnée en fonction de la vitesse en M et du vecteur rotation instantanée $\vec{\Omega}$, par la relation :

$$\overrightarrow{v'} = \vec{v} + \overrightarrow{M'M} \wedge \vec{\Omega}$$

Pour un élément liquide déformable, il convient d'ajouter à cette relation, une **vitesse de déformation** $\vec{D}$. Par ailleurs, en mécanique des fluides, $\vec{\Omega}$ est remplacé par $\vec{T}$ appelé **tourbillon.** Alors :

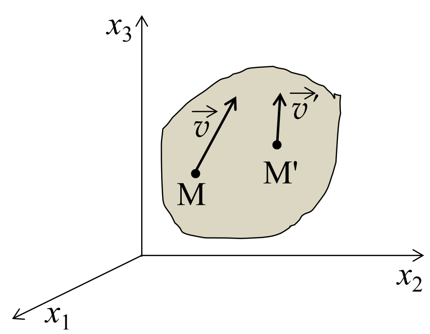

***FIG. I.2** – Évolution de la vitesse entre deux points d'un élément de fluide*

$$\overrightarrow{v'} = \vec{v} + \overrightarrow{M'M} \wedge \vec{T} + \vec{D} \qquad \text{(I.11)}$$

Si on note par l_1, l_2, l_3 les composantes du vecteur $\overrightarrow{MM'}$, on peut également écrire :

$$\overrightarrow{v'} = \vec{v} + l_i \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} \quad \text{ou} \quad v'_j = v_j + l_i \frac{\partial v_j}{\partial t} \qquad \text{(I.12)}$$

Le développement de cette équation permet de trouver les expressions du vecteur tourbillon $\vec{T}$:

$$\vec{T} = \frac{1}{2}\overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{v} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_k}{\partial x_j} - \frac{\partial v_j}{\partial x_k}\right)\overrightarrow{e_i} = t_i \overrightarrow{e_i} \qquad \text{(I.13)}$$

et celle du vecteur vitesse de déformation $\vec{D}$, dont les composantes d_i sont :

$$d_i = l_i \frac{dv_i}{dt} + \theta_k l_j + \theta_j l_k \qquad \text{(I.14)}$$

Dans ces équations, $\overrightarrow{e_i}$ est le vecteur unitaire de la direction x_i, et :

$$t_i = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{v}\right)_i = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_k}{\partial x_j} - \frac{\partial v_j}{\partial x_k}\right) \qquad \text{(I.15)}$$

$$\theta_i = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_k}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_k}\right) \qquad \text{(I.16)}$$

Écoulement irrotationnel

Dans un écoulement irrotationnel, les particules fluides se déplacent en se déformant, mais sans rotation sur elles-mêmes. Le vecteur tourbillon ou le vecteur rotationnel sont nuls :

$$\vec{T} = \overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{v} = 0 \;\text{ ou }\; \left(\frac{\partial v_k}{\partial x_j} = \frac{\partial v_j}{\partial x_k} \right) \tag{I.17}$$

Dans ce cas, les composantes du vecteur vitesse dérivent d'une fonction de points $\varphi(x_i)$ appelée **potentiel des vitesses** :

$$v_i = \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \quad \text{ou} \quad \vec{v} = \overrightarrow{\mathrm{grad}}\,\varphi \tag{I.18}$$

En effet, pour une fonction de points, l'ordre de dérivation ne change pas la valeur de la dérivée seconde, ce qui permet de vérifier l'équation (I.17) :

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_k\,\partial x_j} = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_j\,\partial x_k} \Leftrightarrow \frac{\partial v_k}{\partial x_j} = \frac{\partial v_j}{\partial x_k} \tag{I.19}$$

Surfaces équipotentielles et lignes de courant

Compte tenu du lien existant entre $\vec{v}$ et la fonction $\varphi(x_i)$, la différentielle de φ s'écrit :

$$d\varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} dx_i = \vec{v}\,\overrightarrow{dM} \tag{I.20}$$

Si le déplacement de M a lieu sur une surface équipotentielle, $d\varphi = 0$. La relation (I.20) montre que le vecteur $\vec{v}$ est perpendiculaire à $\overrightarrow{dM}$. Ce raisonnement pouvant être fait pour tout point de l'espace, on en conclut que **toute ligne de courant est en tout point de l'espace perpendiculaire à la surface équipotentielle qui passe par ce point**.

Fonction de courant

Soit une fonction de points ψ **constante** le long d'une ligne de courant. La différentielle de cette fonction, qui est une différentielle totale exacte, s'écrit :

$$d\psi = \frac{\partial \psi}{\partial x_i} dx_i \tag{I.21}$$

Si $\overrightarrow{dM} = dx_i \vec{e_i}$ est un élément de la ligne de courant, on peut écrire :

$$\vec{v} \wedge \overrightarrow{dM} = 0 \tag{I.22}$$

Si l'écoulement est plan, les équations précédentes deviennent respectivement :

$$d\psi = \frac{\partial \psi}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial \psi}{\partial x_2} dx_2 = 0 \tag{I.23}$$

$$v_1\,dx_2 - v_2\,dx_1 = 0 \tag{I.24}$$

Une identification entre ces deux équations implique que :

$$v_1 = \frac{\partial \psi}{\partial x_2} \quad \text{et} \quad v_2 = -\frac{\partial \psi}{\partial x_1} \tag{I.25}$$

En utilisant la propriété de la dérivation seconde des fonctions de points, on obtient :

$$\frac{\partial v_2}{\partial x_2} + \frac{\partial v_1}{\partial x_1} = \operatorname{div} \vec{v} = 0 \qquad \text{(I.26)}$$

La fonction ψ est appelée **fonction de courant**.

Cette condition est respectée pour un fluide incompressible (Cf. Eq. (I.34)). De plus, si l'écoulement est irrotationnel, on a :

$$\operatorname{div} \overrightarrow{\operatorname{grad}}\, \varphi = \Delta\varphi = 0 \qquad \text{(I.27)}$$

Le laplacien de φ étant nul, la fonction φ est une **fonction harmonique**.

De même, en écrivant que la fonction potentielle φ respecte les conditions de Cauchy, l'équation (I.19), en tenant compte de l'équation (I.25), devient :

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial {x_2}^2} = -\frac{\partial^2 \psi}{\partial {x_1}^2} \quad \text{soit} \quad \Delta\psi = 0 \qquad \text{(I.28)}$$

La fonction ψ est donc également une fonction harmonique.

Propriété de la fonction de courant

La différence entre deux valeurs de la fonction de courant ψ représente le débit volumique du fluide entre ces deux lignes de courant (Fig. I.3). Le débit volumique s'écrit :

$$\dot{V} = \int_1^2 \vec{v}\,\vec{n}\, dl \qquad \text{(I.29)}$$

Avec : $\vec{n}\, dl = -dx_2 \overrightarrow{e_1} + dx_1 \overrightarrow{e_2}$

on a : $\dot{V} = \int_1^2 \left(v_2 dx_1 - v_1 dx_2\right) = -\int_1^2 d\psi$

soit : $\dot{V} = \left| \psi_2 - \psi_1 \right|$ (I.30)

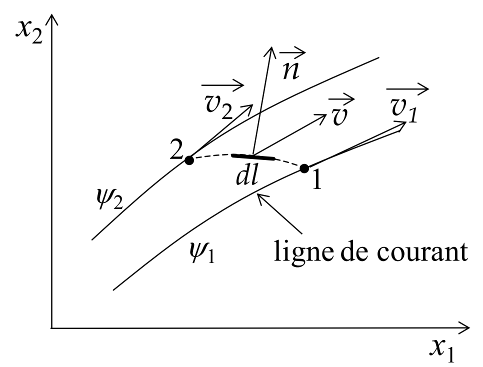

***FIG. I.3** – Débit dans un tube de courant*

Conservation de la masse

Pour un volume quelconque V de fluide délimité par la frontière (F) de normale extérieure $\vec{n}$, le principe de conservation de la masse s'écrit :

$$\int \frac{\partial \rho}{\partial t} dV + \int_F \rho\, \vec{v}\, \vec{n}\, d\Omega = 0 \qquad \text{(I.31)}$$

ou, en utilisant le théorème d'Ostrogradski :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div} \rho \vec{v} = 0 \qquad \text{(I.32)}$$

Dans ces expressions, ρ est la masse volumique du fluide et $d\Omega$ un élément de surface de la frontière.

Pour un écoulement permanent ($\partial\rho/\partial t = 0$), on a :

$$\operatorname{div} \rho \vec{v} = 0 \qquad \text{(I.33)}$$

et, pour un fluide incompressible :

$$\operatorname{div}\vec{v} = 0 \tag{I.34}$$

Pour un tube de courant (Fig. I.4), l'équation (1.31) devient :

$$\int \frac{\partial \rho}{\partial t} dV + \int_{\Omega_1} \rho\, \vec{v}_1\, \vec{n}_1 d\Omega_1 + \int_{\Omega_2} \rho\, \vec{v}_2\, \vec{n}_2 d\Omega_2 = 0 \tag{I.35}$$

Pour un écoulement permanent ou un fluide incompressible, on a :

$$\int_{\Omega_1} \rho\, v_{n1}\, d\Omega_1 = \int_{\Omega_2} \rho\, v_{n2}\, d\Omega_2 \quad \text{soit} \quad \dot{M}_1 = \dot{M}_2 \tag{I.36}$$

où $\dot{M}$ est le débit massique dans le tube de courant, les v_n étant les projections des vecteurs vitesses sur la normale prise dans le sens de l'écoulement.

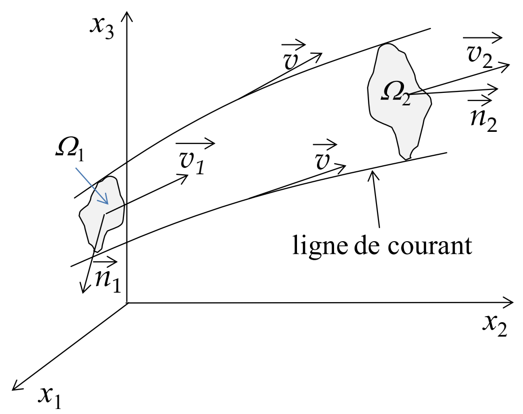

***FIG. I.4** – Écoulement dans un tube de courant*

1.2. Dynamique

Forces appliquées au fluide

Deux types de forces sont appliquées à un volume fluide :

a) **des forces intérieures**. Ce sont les forces de cohésion moléculaire, de viscosité et de pression qui forment un torseur nul puisque localement le principe de l'action et de la réaction doit être respecté ;

b) **des forces extérieures** qui sont elles-mêmes classées en deux types :

- *des actions à distance ou volumiques* : ce sont les forces de gravitation, électromagnétiques, etc. Elles sont exercées par le milieu extérieur sur chacune des particules. Elles forment un torseur non nul dont la résultante par **unité de volume** est notée $\vec{F}$;
- *des actions de contact ou surfaciques* : ce sont des forces qui traduisent l'action des particules extérieures voisines de la frontière (F) sur les particules intérieures appartenant à la surface (F). En un point de la surface, où la **normale extérieure** est $\vec{n}$, la force résultante par **unité de surface** (ou contrainte) de ce type de force est notée $\overrightarrow{T_n}$.

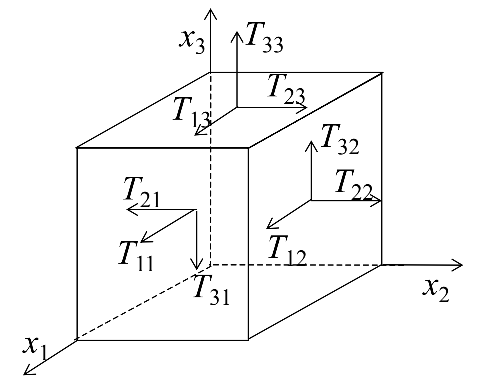

***FIG. I.5** – Contraintes s'exerçant sur les faces d'un élément de volume fluide*

Tenseur des contraintes

Pour un élément de fluide les contraintes surfaciques (Fig. I.5) T_{ij} sont dues à la pression d'une part, à la viscosité d'autre part. La pression s'exerce toujours perpendiculairement à la surface et de l'extérieur vers l'intérieur. La viscosité traduit la contrainte qui s'exerce entre deux particules de fluide voisines s'écoulant à des vitesses différentes. Pour un **fluide newtonien**, la contrainte correspondante est proportionnelle au gradient de vitesse. Elle a une composante normale et des composantes tangentielles.

Pour une face orientée dans la direction *j,* la projection dans la direction *i* de la contrainte s'exprime par :

$$T_{ij} = -P\delta_{ij} + \mu\left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i}\right) + \eta\,\mathrm{div}\vec{v}\,\delta_{ij} \tag{I.37}$$

Dans cette relation, δ_{ij} est le symbole de Kronecker, μ le coefficient de viscosité dynamique et η le coefficient de viscosité de dilatation. Pour les fluides incompressibles, η n'intervient pas ($\mathrm{div}\vec{v} = 0$). Pour les gaz, on prend $\eta = -2/3\,\mu$ (hypothèse de Stokes).

Pour un plan d'orientation quelconque $\vec{n}$ (normale extérieure), la contrainte, notée $\overrightarrow{T_n}$, a comme composantes :

$$T_{in} = T_{ij}n_j \tag{I.38}$$

Bilan de la quantité de mouvement

L'application du théorème de la variation de la quantité de mouvement donne :

$$\int_V \frac{\partial \rho\vec{v}}{\partial t} dV + \int_\Omega \rho\,\vec{v}\,(\vec{v}\,\vec{n})d\Omega = \int_V \vec{F}\,dV + \int_\Omega \overrightarrow{T_n}\,d\Omega = \vec{R} \tag{I.39}$$

où $\vec{R}$ est la résultante des forces.

Le développement de cette équation, après utilisation du théorème d'Ostrogradski et en supposant que la viscosité est constante, conduit à l'équation de **Navier-Stokes** :

$$\rho\vec{\gamma} = \vec{F} - \overrightarrow{\mathrm{grad}}\,P + \mu\nabla^2\vec{v} + (\mu + \eta)\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,\mathrm{div}\,\vec{v} \tag{I.40}$$

Dans beaucoup d'applications, les forces de volume se réduisent à l'action de la pesanteur. On dit que le **fluide** est **pesant**. Dans ce cas, $\vec{F} = -\rho\overrightarrow{\mathrm{grad}}gz$ (g est l'attraction de la pesanteur et *z* l'altitude) et l'équation devient :

$$\rho\vec{\gamma} = -\left(\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,P + \rho\overrightarrow{\mathrm{grad}}gz\right) + \mu\nabla^2\vec{v} + (\mu + \eta)\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,\mathrm{div}\,\vec{v} \tag{I.41}$$

En exprimant le laplacien de la vitesse en fonction du rotationnel :

$$\nabla^2\vec{v} = \overrightarrow{\mathrm{grad}}\,\mathrm{div}\,\vec{v} - \overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{v} \tag{I.42}$$

on constate que pour un écoulement irrotationnel d'un liquide, le laplacien est nul et l'équation (I.40) devient :

$$\rho\vec{\gamma} = \vec{F} - \overrightarrow{\mathrm{grad}}\,P \tag{I.43}$$

Le fluide se comporte comme un fluide parfait.

Pour un **écoulement permanent**, en globalisant les forces, l'équation (I.39) devient :

$$\int_\Omega \rho\,\vec{v}\,(\vec{v}\,\vec{n})d\Omega = \vec{R} \tag{I.44}$$

Or :

$$\rho\vec{v}\vec{n}d\Omega = d\dot{M} \tag{I.45}$$

Ainsi :

$$\int_{\Omega} \vec{v}\, d\dot{M} = \vec{R} \tag{I.46}$$

L'application de cette expression à un tube de courant est particulièrement importante. On a, en prenant le débit massique en module :

$$\int_{\Omega_2} \vec{v}_2\, d\dot{M}_2 - \int_{\Omega_1} \vec{v}_1\, d\dot{M}_1 = \vec{R} \tag{I.47}$$

ou encore :

$$\vec{n}_2 \int_{\Omega_2} \rho_2\, v_2^2\, d\Omega_2 + \vec{n}_1 \int_{\Omega_1} \rho_1\, v_1^2\, d\Omega_1 = \vec{R} \tag{I.48}$$

1.3. Énergétique

Bilan de l'énergie cinétique

On sait que la variation de l'énergie cinétique pendant l'unité de temps d'un système matériel est égale à la puissance exercée par les forces intérieures et extérieures appliquées à ce système. Pour un élément de fluide de volume V délimité par une frontière (F) de surface Ω, ce théorème se traduit par :

$$\int_V \frac{\partial}{\partial t}\left(\rho \frac{v^2}{2}\right) dV + \int_{\Omega} \rho \frac{v^2}{2} \vec{v}\,\vec{n}\, d\Omega = \int_V \vec{F}\,\vec{v}\, dV + \int_{\Omega} \overrightarrow{T_n}\,\vec{v}\, d\Omega + \dot{W}_{\text{int}} \tag{I.49}$$

Dans cette équation, $\dot{W}_{\text{int}}$ est la puissance des forces intérieures au système fluide. Elle est due aux forces de pression et de viscosité qui s'exercent à l'intérieur même du volume :

$$\dot{W}_{\text{int}} = -\int_V T_{ij} \frac{\partial v_i}{\partial x_j} dV \tag{I.50}$$

soit, avec l'expression (I.37) de T_{ij} :

$$\dot{W}_{\text{int}} = \int_V P \operatorname{div} \vec{v}\, dV - \int_V \phi\, dV \tag{I.51}$$

où ϕ, la **fonction dissipation**, est égale à :

$$\phi = \eta (\operatorname{div} \vec{v})^2 + \mu \frac{\partial v_i}{\partial x_j}\left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} \frac{\partial v_j}{\partial x_i}\right) \tag{I.52}$$

Si dans l'expression (I.37) des contraintes, on sépare les effets de la pression P de ceux de la viscosité T'_{ij}, on obtient :

$$\begin{aligned}\int_V \frac{\partial}{\partial t}\left(\rho \frac{v^2}{2}\right) dV + \int_{\Omega} \left(P + \rho \frac{v^2}{2}\right) \vec{v}\,\vec{n}\, d\Omega = \int_V F_i v_i\, dV + \int_{\Omega} T'_{ij}\, n_j v_i\, d\Omega \\ + \int_V P \operatorname{div} \vec{v}\, dV - \int_V \phi\, dV\end{aligned} \tag{I.53}$$

Pour un **fluide pesant**, en explicitant la première intégrale du membre de gauche, on a :