

Bases mathématiques pour le technicien

A – Fonctions logarithme et exponentielle

1- Fonction logarithme népérien

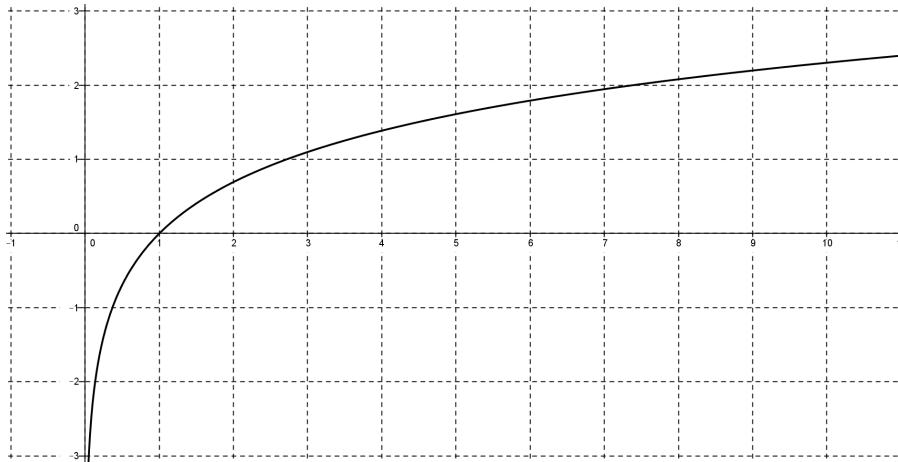
1-1. Définition

La fonction logarithme népérien est la fonction notée \ln . Les premières propriétés sont les suivantes :

(1) La fonction \ln est définie pour des réels x strictement positifs : $x \in]0; +\infty[$;

(2) La dérivée de la fonction \ln est la fonction inverse : $(\ln(x))' = \frac{1}{x}$;

(3) La fonction \ln s'annule en 1 : $\ln(1) = 0$.



1-2. Propriété fondamentale de la fonction logarithme

Pour tous réels a et b strictement positifs :

$$\ln(a \times b) = \ln(a) + \ln(b)$$

1-3. Autres règles de calcul

Pour tous réels a et b strictement positifs et n entier relatif :

$$\ln\left(\frac{1}{a}\right) = -\ln(a) ; \ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln(a) - \ln(b) ; \ln(a^n) = n \times \ln(a) ; \ln(\sqrt{a}) = \frac{1}{2} \ln(a)$$

12 . Les rappels de cours

1-4. Sens de variation

La fonction $f : x \mapsto \ln(x)$ est strictement croissante sur $D_f =]0; +\infty[$.

Limites aux bornes de D_f : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(x) = +\infty$ et $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \ln(x) = -\infty$.

L'axe des ordonnées d'équation $x = 0$ est asymptote verticale à la courbe de la fonction \ln .

• Tableau de variations de la fonction \ln :

x	0	1	$+\infty$
$(\ln(x))' = \frac{1}{x}$	+	1	+
$\ln(x)$	$-\infty$	0	$+\infty$

1-5. Equations et inéquations

Pour tous réels a et b strictement positifs :

$$\ln(a) = \ln(b) \Leftrightarrow a = b ; \ln(a) \leq \ln(b) \Leftrightarrow a \leq b ; \ln(a) \geq \ln(b) \Leftrightarrow a \geq b$$

1-6. Le nombre e

• Définition

Il existe un unique nombre, noté e , tel que $\ln(e) = 1$.

Valeur approchée de e : $e \approx 2.718281828$.

• Théorème

Soit m un entier relatif : l'équation $\ln(x) = m$ a pour unique solution $x = e^m$.

On a les équivalences suivantes :

$$(1) \quad \ln(x) \geq m \Leftrightarrow x \geq e^m$$

$$(2) \quad \ln(x) \leq m \Leftrightarrow 0 < x \leq e^m$$

1-7. Limites

On rappelle les limites suivantes aux bornes de l'intervalle de définition :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(x) = +\infty \quad \text{et} \quad \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \ln(x) = -\infty$$

1-8. Croissantes comparées

On rappelle les résultats suivants :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x)}{x} = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} x \ln(x) = 0$$

Pour tout entier naturel $n \geq 2$: $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x)}{x^n} = 0$

1-9. Logarithme d'une fonction

- Théorème

Soit u une fonction définie et strictement positive sur un intervalle I . Les fonctions u et $\ln(u)$ ont même sens de variation sur I .

- Dérivée de $\ln(u)$

Soit u une fonction définie, dérivable et strictement positive sur un intervalle I . La fonction $\ln(u)$ est dérivable sur I et sa dérivée est :

$$(\ln(u))' = \frac{u'}{u}$$

2- Fonction exponentielle

2-1. Définition

Pour tout réel x , on appelle exponentielle de x et on note e^x l'unique réel de l'intervalle $]0;+\infty[$ dont le logarithme népérien est x .

On appelle fonction exponentielle :
$$\begin{cases} \mathbb{R} \rightarrow]0;+\infty[\\ x \mapsto e^x \end{cases}$$

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on associe le réel y de $]0;+\infty[$ tel que :

$$y = e^x \Leftrightarrow x = \ln y$$

2-2. Propriétés et règles de calcul

• Propriétés

(1) Pour tout $x \in \mathbb{R}$, et pour tout réel y de $]0;+\infty[$:

$$y = e^x \Leftrightarrow \ln(y) = x \quad ; \quad e^x \leq y \Leftrightarrow x \leq \ln(y) \quad ; \quad e^x \geq y \Leftrightarrow x \geq \ln(y)$$

(2) Pour tout $x \in \mathbb{R}$: $e^x > 0$.

(3) Pour tout $x \in \mathbb{R}$: $\ln(e^x) = x$.

(4) Pour tout réel x strictement positif : $e^{\ln x} = x$.

• Règles de calcul

Pour tous réels a et b , et pour tout entier relatif n :

$$e^{a+b} = e^a \times e^b \quad ; \quad e^{-a} = \frac{1}{e^a} \quad ; \quad e^{a-b} = \frac{e^a}{e^b} \quad ; \quad e^{na} = (e^a)^n$$

2-3. Sens de variation et limites

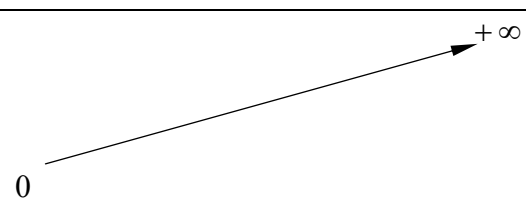
2-3.1 Dérivée et sens de variation

La fonction exponentielle est dérivable sur \mathbb{R} et est égale à sa dérivée :

$$(e^x)' = e^x$$

• Tableau de variations de la fonction exponentielle :

x	$-\infty$	$+\infty$
$(e^x)' = e^x$	+	
e^x	0	$+\infty$



2-3.2 Limites

On rappelle les limites suivantes aux bornes de l'intervalle de définition :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty \text{ et } \lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$$

On rappelle les résultats suivants :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^n} = +\infty \text{ et } \lim_{x \rightarrow -\infty} x e^x = 0$$

2-4. Exponentielle d'une fonction

On considère une fonction u définie et dérivable sur un intervalle I .

On considère la fonction composée notée e^u .

2-4.1 Sens de variation de e^u

Les fonctions u et e^u ont le même sens de variation sur l'intervalle I .

2-4.2 Dérivée de e^u

La fonction e^u est dérivable sur I et sa dérivée est :

$$(e^u)' = u' \times e^u$$

2-4.3 Limites de e^u

α désigne un réel ou $+\infty$ ou $-\infty$. Le théorème sur la limite d'une fonction composée permet d'établir les résultats suivants :

(1) Si $\lim_{x \rightarrow \alpha} u(x) = +\infty$ alors $\lim_{x \rightarrow \alpha} e^{u(x)} = +\infty$

(2) Si $\lim_{x \rightarrow \alpha} u(x) = -\infty$ alors $\lim_{x \rightarrow \alpha} e^{u(x)} = 0$

(3) Si $\lim_{x \rightarrow \alpha} u(x) = L$ alors $\lim_{x \rightarrow \alpha} e^{u(x)} = e^L$

16 . Les rappels de cours

2-6. Exponentielle de base a

2-6.1 Définition

Soit a un réel strictement positif et b un réel quelconque. On peut écrire l'égalité suivante :

$$e^{b \ln a} = (e^{\ln a})^b = a^b$$

Ainsi pour $a > 0$: $a^b = e^{b \ln a}$

On définit ainsi les puissances d'un nombre réel strictement positif a .

La fonction $x \mapsto a^x$ est définie par : $a^x = e^{x \ln a}$

2-6.2 Sens de variation

(1) Si $a > 1$ alors $\ln a > 0$

La fonction $x \mapsto a^x$ est strictement croissante sur \mathbb{R} . On a les limites suivantes :

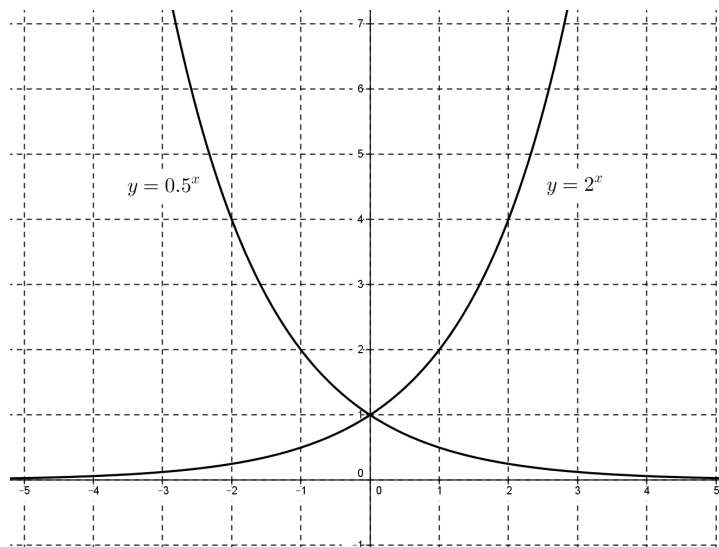
$$\lim_{x \rightarrow +\infty} a^x = +\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} a^x = 0$$

(2) Si $0 < a < 1$ alors $\ln a < 0$

La fonction $x \mapsto a^x$ est strictement décroissante sur \mathbb{R} . On a les limites suivantes :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} a^x = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} a^x = +\infty$$

Courbes représentatives pour deux valeurs de a :



B – Trigonométrie

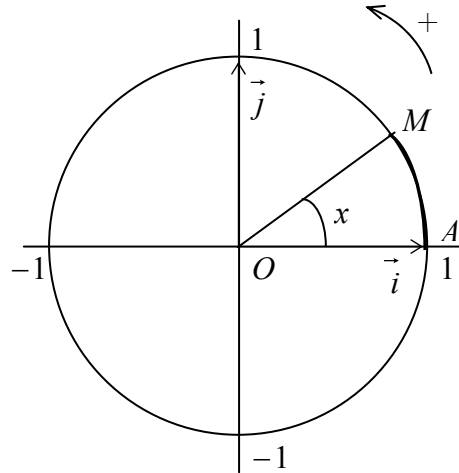
1- Mesures en radian d'un angle orienté

1-1. Définition

On considère le plan muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

Le cercle trigonométrique est un cercle de rayon 1 et de centre O orienté dans le sens trigonométrique (sens inverse de celui des aiguilles d'une montre).

Soit A le point de coordonnées $A(1;0)$ et M un point quelconque du cercle trigonométrique. Une mesure en radian de l'angle orienté (\vec{OA}, \vec{OM}) est la longueur algébrique de l'arc de cercle défini entre les points A et M :



$$x = (\vec{OA}, \vec{OM})$$

• Les mesures d'un angle orienté

Un angle orienté possède une infinité de mesures. Si x est l'une d'entre elles, les autres sont de la forme $x + 2k\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$.

En effet, le cercle trigonométrique, de rayon 1, a une circonférence égal à 2π . Par exemple, voici quelques mesures de l'angle orienté (\vec{OA}, \vec{OA}) :

$$\rightarrow (\vec{OA}, \vec{OA}) = 0 ;$$

$\rightarrow (\vec{OA}, \vec{OA}) = 2\pi$ (ici $k = 1$; on a parcouru le cercle dans le sens trigonométrique et on a ajouté un tour complet. Ceci positionne correctement le point A sur le cercle trigonométrique) ;

$$\rightarrow (\vec{OA}, \vec{OA}) = -2\pi ;$$

$$\rightarrow (\vec{OA}, \vec{OA}) = -4\pi .$$

• Exemples

Placer les points suivants sur le cercle trigonométrique et donner plusieurs mesures de l'angle orienté $x = (\vec{OA}, \vec{OM})$:

$$(1) (\vec{OA}, \vec{OM}) = \frac{\pi}{3}$$

$$(2) (\vec{OA}, \vec{OM}) = -\frac{3\pi}{4}$$

18 . Les rappels de cours