Logique et théorie des ensembles

01

RÉPARTITION DES EXERCICES

I. ÉNONCÉS DES EXERCICES

1.01 Étudier la proposition $P(n)$: $2n + 1 \leq 2^n$, pour tout entier n positif.

$\diamond$

1.02 Étudier la proposition $Q(n)$: $n^2 \leq 2^n$, pour tout entier n positif.

$\diamond$

1.03 Montrer pour tout $a \in \mathbb{R}_+$ et tout $n \in \mathbb{N}$, $(1 + a)^n \geq 1 + na$.

$\diamond$

1.04 Démontrer que $n(2n+1)(7n+1)$ est divisible par 6, pour tout entier $n \geq 1$.

$\diamond$

1.05 Étudier la proposition $P(n)$: $10^n + 1$ est divisible par 9.

$\diamond$

1.06 Démontrer que pour tout $n \geq 0$, $A_n = 3^{2n+2} - 2^{n+1}$ est divisible par 7.

$\diamond$

1.07 Démontrer par récurrence que la somme $f(n)$ des entiers naturels impairs x tels que : $1 \leq x \leq 2n - 1$ est n^2.

$\diamond$

1.08 Soit A une partie de $\mathbb{N}^*$ possédant les trois propriétés suivantes :
a) $1 \in A$,
b) $\forall n \in \mathbb{N}^*, n \in A \implies 2n \in A$,
c) $\forall n \in \mathbb{N}^*, n + 1 \in A \implies n \in A$

Démontrer par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}, 2^n \in A$ puis que $A = \mathbb{N}^*$.

$\diamondsuit$

1.09 Démontrer, en effectuant un raisonnement par l'absurde que si vous rangez $n+1$ chaussettes dans n tiroirs distincts, alors il y a au moins un tiroir contenant au moins deux chaussettes.

$\diamondsuit$

1.10 Soit n un entier naturel non nul. On se donne $n+1$ réels $x_0, \ldots, x_n$ de $[0,1]$ vérifiant : $0 \leq x_0 \leq x_1 \leq \cdots \leq x_n \leq 1$. On désire démontrer par l'absurde la proposition p : « Il y a deux de ces réels qui sont distants d'au plus $1/n$. »
a) Écrire une formule logique équivalente à p.
b) Écrire la négation de cette proposition.
c) Rédiger une démonstration par l'absurde de p.

$\diamondsuit$

1.11 Énoncer puis démontrer la contraposée de l'implication suivante : « si n^2 est impair alors n est impair. »

$\diamondsuit$

1.12 On veut démontrer la proposition :
p : « pour $n \in \mathbb{N}^*$: si $n^2 - 1$ n'est pas divisible par 8 alors l'entier n est pair. »
Écrire la contraposée de p.
En remarquant qu'un entier impair n s'écrit sous la forme $n = 4k + r$, où $k \in \mathbb{N}$ et r un entier égal à 1 ou à 3, prouver la proposition.

$\diamondsuit$

1.13 Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction. Exprimer à l'aide de quantificateurs les propositions suivantes.
p_1 : « f est constante », p_2 : « f n'est pas constante »,
p_3 : « f s'annule en au moins un point », p_4 : « f s'annule une fois et une seule. »
Donner leurs négations.

$\diamondsuit$

1.14 Déterminer les réels x pour lesquels la proposition suivante est vraie :

$$\forall\, a \in [0,1], [x \geq a \implies x \geq 2a]$$

$\diamondsuit$

1.15 On rencontre souvent l' assemblage « $\exists\,!$ » qui signifie : « il existe un et un seul ».
Si P est une proposition définie sur un produit d'ensembles $E \times F$, montrer que :

a) « $\exists\, x \in E, \exists\, y \in F, P(x,y)$ » et « $\exists\, y \in F, \exists\, x \in E, P(x,y)$ » sont des assertions équivalentes.

b) Les assertions « $\exists\,!x \in E, \exists\,!y \in F, P(x,y)$ » et « $\exists\, y! \in F, \exists\, x! \in E, P(x,y)$ » sont-elles équivalentes ?

$\diamondsuit$

1.16 Que peut-on dire de : $p_1\,:\ \forall\, x \in \emptyset, P(x)$ et $p_2\,:\ \exists\, x \in \emptyset, P(x)$?

$\diamondsuit$

1.17 Soit $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R}$. Montrer les équivalences :

$$(\forall\, \varepsilon > 0,\ |a| \leq \varepsilon) \iff a = 0 \quad ; \quad (\forall\, \varepsilon > 0,\ |a| < \varepsilon) \iff a = 0$$
$$(\forall\, \varepsilon > 0,\ a \leq b + \varepsilon) \iff a \leq b \quad ; \quad (\forall\, \varepsilon > 0,\ a < b + \varepsilon) \iff a \leq b$$

$\diamondsuit$

1.18 Traduire pour la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ chacun des énoncés ci-dessous :

a) $\exists\, \varepsilon > 0, \exists\, M \in \mathbb{N}, \forall\, n \geq M, |u_n - \ell| < \varepsilon.$

b) $\forall\, \varepsilon > 0, \exists\, M \in \mathbb{N}, \forall\, n \geq M, |u_n - \ell| < \varepsilon.$

c) $\exists\, M \in \mathbb{N}, \forall\, \varepsilon > 0, \forall\, n \geq M, |u_n - \ell| < \varepsilon.$

d) $\forall\, n \geq M, \exists\, M \in \mathbb{N}, \forall\, \varepsilon > 0, |u_n - \ell| < \varepsilon.$

d) $\forall\, \varepsilon > 0, \forall\, n \in \mathbb{N}, \exists\, M \in \mathbb{N}, (n \geq M \implies |u_n - \ell| < \varepsilon).$

$\diamondsuit$

1.19 Donner la négation des propositions suivantes, sachant que $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$:

a) $\forall\, y \in \mathbb{R},\ f(y) \neq 0$ **b)** $\forall\, y \in \mathbb{R},\ f(y) > 0 \implies y \leq 0.$

c) $\forall\, \varepsilon > 0, \exists \alpha > 0, \forall\, (x,y) \in I^2,\ [|x - y| \leq \alpha \implies |f(x) - f(y)| \leq \varepsilon]\,.$

$\diamondsuit$

1.20 Soient A et B des ensembles. Montrer que $\mathcal{P}(A \cap B) = \mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(B)$

$\diamondsuit$

1.21 Que peut-on dire de trois ensembles A, B et C tels que $A \cup B = B \cap C$?

$\diamondsuit$

1.22 Si $A \cap B \subset A \cap C$ et $A \cup B \subset A \cup C$, quelle relation y a-t-il entre B et C ?

$\diamondsuit$

1.23 Soit E un ensemble, pour toute partie A de E, on note $\mathbf{1}_A$ la fonction indicatrice de A.

1°) Vérifier que l'application $A \mapsto \mathbf{1}_A$ de $\mathcal{P}(E)$ dans $\{0,1\}^E$ est une bijection.

2°) Vérifier pour tout $(A,B) \in (\mathcal{P}(E))^2$, $(\mathbf{1}_A)^2 = \mathbf{1}_A, \mathbf{1}_{A\cap B} = \mathbf{1}_A \mathbf{1}_B$.

3°) Montrer de même que : $\mathbf{1}_{\overline{A}} = 1 - \mathbf{1}_A, \mathbf{1}_{A\cup B} = \mathbf{1}_A + \mathbf{1}_B - \mathbf{1}_A \mathbf{1}_B$.

$\diamondsuit$

1.24 Avec les fonctions indicatrices, montrer que pour tout ensemble E et tout triplet $(A, B, C) \in (\mathcal{P}(E))^3$:
$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ et $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$.

$\diamondsuit$

1.25 Avec les fonctions indicatrices, montrer que pour tout ensemble E et tout couple $(A, B) \in (\mathcal{P}(E))^2$: $A \cap B = A \cup B \iff A = B$.

$\diamondsuit$

1.26 A et B étant deux parties d'un ensemble E, on note

$$A \,\Delta\, B = (A \cap \overline{B}) \cup (\overline{A} \cap B)$$

Montrer : $\mathbf{1}_{A\Delta B} = \mathbf{1}_A + \mathbf{1}_B - 2\times\mathbf{1}_A\mathbf{1}_B$.

$\diamondsuit$

1.27 Avec les fonctions indicatrices, montrer que pour tout ensemble E et tout triplet$(A, B, C) \in (\mathcal{P}(E))^3$: $A \,\Delta\, (B \,\Delta\, C) = (A \,\Delta\, B) \,\Delta\, C$.

$\diamondsuit$

1.28 Soit X et Y deux parties d'un ensemble E. Comparer les ensembles :

$$A = X \cap (X \cup Y) \text{ et } B = X \cup (X \cap Y).$$

$\diamondsuit$

1.29 Soit E un ensemble et $(X, Y) \in \mathcal{P}(E)^2$, montrer (sans utiliser l'exercice **1.25**) : $X = Y \iff X \cap Y = X \cup Y$.

$\diamondsuit$

1.30 Soit E un ensemble et $(X, Y) \in [\mathcal{P}(E)]^2$. Simplifier

$$(X \cap Y) \cup (X \cap \overline{Y}) \cup (\overline{X} \cap Y) \cup (\overline{X} \cap \overline{Y})$$

$\diamondsuit$

1.31 Pour tout ensemble E et toute partie A de E, on note $A \setminus B = A \cap \overline{B}$.
Pour $(X, Y) \in [\mathcal{P}(E)]^2$, montrer : $X \setminus (X \cap Y) = X \setminus Y = (X \cup Y) \setminus Y$.

$\diamondsuit$

1.32 Soit E un ensemble et $(X, Y) \in [\mathcal{P}(E)]^2$. Simplifier l'expression :

$$C = \left[(X \cap Y) \cup (X \cup \overline{Y}) \cup (\overline{X} \cap Y)\right] \cap (\overline{X} \cap \overline{Y})$$

$\diamondsuit$

1.33 Soit E un ensemble et $(A, B, C) \in [\mathcal{P}(E)]^3$. Montrer que :

$$(A \cup B = A \cap C) \iff (B \subset A \subset C)$$

$\diamondsuit$

1.34 Soient X, Y et Z trois parties d'un ensemble E. Montrer que :

$$(X \cup Y) \cap (Y \cup Z) \cap (Z \cup \overline{X}) = (X \cup Y) \cap (Z \cup \overline{X})$$

$\diamondsuit$

1.35 Soit E un ensemble et $(A,B) \in [\mathcal{P}(E)]^2$. Montrer que :
$$\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B} \text{ et } \overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$$

◇

1.36 Pour tout ensemble E et tout $(A,B) \in [\mathcal{P}(E)]^2$, on pose :
$$A \,\Delta\, B = (A \cap \overline{B}) \cup (\overline{A} \cap B)$$
Calculer $A \,\Delta\, A$, $A \,\Delta\, E$, $A \,\Delta\, \emptyset$, puis montrer pour $(A,B,C,D) \in [\mathcal{P}(E)]^4$,
$$(A \cup B) \,\Delta\, (C \cap D) \subset (A \,\Delta\, C) \cup (B \,\Delta\, D)$$

◇

1.37 Les fonctions suivantes sont-elles injectives ? surjectives ? bijectives ?
$$g_1 : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}, n \mapsto 2n \quad ; \quad g_2 : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}, n \mapsto -n$$

◇

1.38 $h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, (x,y) \mapsto (x+y, x-y)$ est-elle injective ? surjective ? bijective ?

◇

1.39 Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \dfrac{2x}{1+x^2}$
Étudier l'injectivité et la surjectivité de la fonction f.
Montrer que $f(\mathbb{R}) = [-1,1]$, déterminer $f([-1,1])$ et montrer enfin que la restriction $g : [-1,1] \to [-1,1]$, $x \mapsto f(x)$ est bijective.

◇

1.40 Soit $E \subset \mathbb{R}$ et $F \subset \mathbb{R}$, et $f : E \to F, x \mapsto x^2$.
1°) Dans chacun des cas suivants, f est-elle injective, surjective, bijective ?
$(i) : E = \mathbb{R}, F = \mathbb{R}$; $(ii) : E = \mathbb{R}_+, F = \mathbb{R}$; $(iii) : E = \mathbb{R}, F = \mathbb{R}_+$
2°) Si $E = \mathbb{R}, F = \mathbb{R}$, déterminer :
$$f(\mathbb{R}), f(\mathbb{R}_+), f([1,2]), f^{-1}(\mathbb{R}), f^{-1}(\mathbb{R}_+), f^{-1}([1,4]) \text{ et } f^{-1}(\{y\}).$$

◇

1.41 Si E est un ensemble et f et g sont deux applications de E dans E telles que $g \circ f = Id_E$, alors f et g sont-elles nécessairement bijectives ?

◇

1.42 Soient E et F deux ensembles, $(A,B) \in \left[\mathcal{P}(E)\right]^2$ et $f \in \mathcal{F}(E,F)$. Montrer : $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$.

◇

1.43 Soit E un ensemble, $(A,B) \in [\mathcal{P}(E)]^2$ et $f \in \mathcal{F}(E,F)$. Montrer que :
$$f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B).$$
Montrer ensuite, que si f est injective alors on a l'égalité.

◇

1.44 Soit $f \in \mathcal{F}(E,F)$ et B une partie quelconque de F.

1°) Montrer l'inclusion : $f(f^{-1}(B)) \subset B$.

2°) Montrer que l'égalité est vraie pour tout B si et seulement si f est injective.

$\diamond$

1.45 Soit $f : E \to F$ et $A \subset E$.

1°) Comparer A et $f^{-1}(f(A))$.

2°) A-t-on l'équivalence :

$(\forall A \in \mathcal{P}(E), f^{-1}(f(A)) = A) \Longleftrightarrow f$ est injective ?

$\diamond$

1.46 Soit f une application de E dans F et $(H, G) \in [\mathcal{P}(F)]^2$.

1°) Montrer l'égalité : $f^{-1}(H \cap G) = f^{-1}(H) \cap f^{-1}(G)$.

2°) Montrer de même l'égalité $f^{-1}\left(\complement_F H\right) = \complement_E f^{-1}(H)$.

$\diamond$

1.47 Soit E un ensemble et A une partie propre de E (c'est-à-dire non vide et non égale à E) et $f : \mathcal{P}(E) \to \mathcal{P}(E), X \mapsto A \cap X$. Montrer que f n'est pas injective.

$\diamond$

1.48 Soit f une application de E dans E. On suppose que $f \circ f \circ f = id_E$. Montrer que f est bijective et exprimer f^{-1} en fonction de f.

$\diamond$

1.49 Soit f une application de E dans E. Montrer l'équivalence :
$(f$ surjective$) \Longleftrightarrow \left[\forall (g, h) \in [\mathcal{F}(E, E)]^2, (g \circ f = h \circ f \implies g = h)\right]$.

$\diamond$

1.50 Soit f une application de E dans E. Montrer l'équivalence :
$(f$ injective$) \Longleftrightarrow \left[\forall (g, h) \in [\mathcal{F}(E, E)]^2, (f \circ g = f \circ h \implies g = h)\right]$.

$\diamond$

1.51 Soient E, F, G trois ensembles, $f \in \mathcal{F}(E, F), g \in \mathcal{F}(F, G)$. Montrer :
($g \circ f$ injective $\implies$ f injective), et ($g \circ f$ surjective $\implies$ g surjective)

$\diamond$

1.52 Soit E, F, G et H quatre ensembles, $f \in \mathcal{F}(E, F), g \in \mathcal{F}(F, G)$ et $h \in \mathcal{F}(G, H)$ avec $g \circ f$ et $h \circ g$ bijectives. Montrer que f, g et h sont bijectives.

$\diamond$

1.53 Soit E un ensemble non vide, A et B deux parties de E. On considère :
$f : \mathcal{P}(E) \to \mathcal{P}(A) \times \mathcal{P}(B), \forall X \in \mathcal{P}(E), f(X) = (X \cap A, X \cap B)$

1°) Montrer que f est injective si et seulement si $A \cup B = E$.

2°) Montrer que f est surjective si et seulement si $A \cap B = \emptyset$.

$\diamond$

1.54 Soit $E = \mathbb{Z}$ et $\mathcal{R}$ définie par : $x \, \mathcal{R} \, y \iff x = -y$. La relation $\mathcal{R}$ est-elle réflexive ? symétrique ? transitive ?

$\diamond$

1.55 Soit $\mathcal{R}$ la relation binaire sur $\mathbb{R}$, définie par : $x \, \mathcal{R} \, y \iff x^2 - y^2 = x - y$. Montrer que $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence. Déterminer alors la classe d'équivalence de x, réel donné. Trouver le nombre d'éléments de cette classe.

$\diamond$

1.56 Soit E un ensemble, sur $\mathcal{P}(E)$, on définit $A \, \mathcal{R} \, B \iff \left[A = B \text{ ou } A = \overline{B}\right]$. Démontrer que $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence.

$\diamond$

1.57 Sur $\mathbb{Z}$, on définit une relation binaire $\mathcal{R}$ par : $x \; \mathcal{R} \; y \iff x + y$ est pair. Démontrer que $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence et déterminer ses classes d'équivalences.

$\diamond$

1.58 Soit E un ensemble sur lequel on définit une relation binaire $\mathcal{R}$ transitive et irréflexive (c'est-à-dire qu'un élément n'est jamais en relation avec lui-même). On définit la relation $\mathcal{R}'$ par : $x \, \mathcal{R}' \, y \iff [x, \mathcal{R} \, y \text{ ou } x = y]$.

1°) Montrer que $\mathcal{R}'$ est réflexive et transitive. Est-ce une relation d'équivalence ?

2°) Montrer que $\mathcal{R}'$ est antisymétrique, soit : $[x \, \mathcal{R}' \, y \text{ et } y \, \mathcal{R}' \, x] \implies x = y$.

II. INDICATIONS

1.01. On rappelle le principe de récurrence à partir du rang n_0 :
Soit $P(n)$ une proposition. Elle est vraie pour tout $n \geq n_0$ si et seulement si on a à la fois les deux assertions :

(i) $P(n_0)$ est vraie.

(ii) $(\forall \, n \geq n_0, \big((P(n) \text{ est vraie }) \implies (P(n+1) \text{ est vraie })\big)$

1.02. On pourra utiliser le résultat de **1.01**.

1.03. On ne vous donne pas le droit d'utiliser la formule du binôme de Newton !

1.04. Pour montrer que $P(n) \implies P(n+1)$, on développera $n(2n+1)(7n+1)$ et aussi $(n+1)(2n+3)(7n+8)$.

1.05. On établira l'équivalence : $P(n) \iff P(n+1)$, pour montrer que $P(n)$ n'est jamais vraie.

1.06. On établira une relation entre $A_{n+1} - A_n$ et A_n.

1.08. On remarquera que $\mathbb{N}^* = \cup_{n \in \mathbb{N}} [\![1, 2^n]\!]$.

1.10. On remarquera que si deux nombres sont distants de moins de $1/n$, alors il y a deux nombres consécutifs dont la distance est inférieure à $1/n$. On introduira donc $x_i - x_{i-1}$.

1.11. On rappelle que la contraposée de $p \implies q$ est non $q \implies$ non p.

1.14. On sépare en quatre cas : $x \geq 2, x < 0, x \in]0, 2[$ et $x = 0$.

1.17. Bien raisonner en double implication. Pour les implications directes, on utilisera leur contraposée.

1.20. Montrer que $X \in \mathcal{P}(A \cap B) \Longleftrightarrow X \in \mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(B)$.

1.21. Il s'agit de prouver que $A \subset B \subset C$. On peut tenter une preuve ensembliste ou une preuve utilisant les fonctions indicatrices si elles ont été vues.

1.22. Partir de $x \in B$ et faire l'alternative $x \in A$ et $x \notin A$.

1.23. Pour la question **1.**, il faut avoir déjà vu la notion d'injection et de surjection. Cet exercice devrait (au moins en partie) être dans votre cours. Les résultats des différentes questions sont très utiles car ils servent dans de nombreux autres exercices.

1.24. et **1.25.** On utilisera les résultats de **1.23.**

1.27. Il existe une autre méthode utilisant la distributivité de $\cup$ par rapport à $\cap$ (exercice **1.24**) et les lois de de Morgan (exercice **1.35**). À vous de jouer !

1.28. On montrera en fait que $A = B$.

1.29. On peut raisonner de façon ensembliste ou prendre $x \in X$ et $x \in Y$ puis raisonner par l'absurde.

1.30. On rappelle que pour tout $(A, B, C) \in [\mathcal{P}(E)]^3$, on a les relations de **distributivité**

$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ et $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$

et que $\overline{X}$ désigne le complémentaire dans E de la partie X.

1.31. On utilisera la distributivité de $\cap$ par rapport à $\cup$. D'autre part, on rappelle que pour tout couple (A, B) de$[\mathcal{P}(E)]^2$: $A \setminus B = A \cap \complement_{\boldsymbol{E}} B$.

1.32. On pourra soit factoriser, soit développer. Penser au résultat de l'exercice **1.24**.

1.33. On raisonnera par double implication.

1.34. On remarquera que cette égalité est du type : $A \cap B \cap C = A \cap C$.

1.36. On pourra utiliser les résultats de **1.24.** et **1.35.**

1.37. On rappelle que l'injectivité se traduit par la proposition :

$$\forall (x, x') \in E^2, (f(x) = f(x') \implies x = x')$$

et évidemment par sa contraposée : $\forall (x, x') \in E^2, (x \neq x' \implies f(x) \neq f(x'))$.

1.39. Pour montrer que $f(\mathbb{R}) = [-1, 1]$, puis pour étudier la restriction g proposée, on pourra remplacer l'équation $f(x) = y$, où y est fixé dans $[-1, 1]$ par une équation du second degré dont une des deux solutions seulement est dans $[-1, 1]$.

1.41. Bricoler un contre-exemple !

1.42. Un rappel utile pour cet exercice et pour quelques autres : si f est une application de E vers F et A est une partie de E, **l'image directe** de A par f est :

$$f(A) = \{y \in F, \exists\, x \in A, f(x) = y\}.$$

1.44. Un rappel pour cet exercice et les deux suivants : si f est une application de E vers F et si B est une partie de F, **l'image réciproque** de B par f est :

$$f^{-1}(B) = \{x \in E, f(x) \in B\}.$$

1.45. On montrera que $A \subset f^{-1}\big(f(A)\big)$, mais que l'inclusion contraire n'est pas toujours vraie.

1.48. Rappelons en passant que si f est une application de E vers F, f est **bijective** si et seulement s'il existe une application g de F vers E telle que $f \circ g = id_{\boldsymbol{F}}$ et $g \circ f = id_{\boldsymbol{E}}$.

1.49. Pour l'implication réciproque, on montrera en fait sa contraposée :

f non surjective $\implies \exists\, (g, h) \in [\mathcal{F}(E, E)]^2, g \circ f = h \circ f$ et $g \neq h$

en bricolant g et h à partir de $z \in E \setminus f(E)$.