Maths MP

J'évalue mon niveau en 550 questions

Maths MP

J'évalue mon niveau en 550 questions

Hervé Gianella
Professeur de mathématiques spéciales MP* au lycée Blaise Pascal à Orsay

Franck Taieb
Professeur de mathématiques spéciales MP* au lycée Pasteur de Neuilly

Illustration de couverture :
© puentes – Fotolia.com

ISBN 978-2-10-058208-2

Table des matières

Avant-Propos

Ce livre a pour vocation d'aider les élèves dans leur préparation aux concours des grandes écoles d'ingénieur. Il complète les excellents ouvrages de cours ou d'exercices corrigés déjà parus dans la collection « J'intègre » du même éditeur.

Après leur première année, les élèves de mathématiques spéciales savent l'importance cruciale de l'apprentissage du cours : il s'agit non seulement de connaître les définitions, les méthodes et techniques de calcul, les théorèmes et leurs démonstrations, mais aussi de savoir mobiliser ces connaissances pour répondre à des problèmes de mathématiques. C'est ce qui permet de distinguer un « cours appris » d'un « cours compris ».

C'est notre expérience auprès de ces élèves, comme professeurs et comme colleurs, qui nous a conduit à élaborer ces tests de connaissances. Leur objectif est triple :

- détecter au travers de questions simples les points du cours qui ne sont pas suffisamment compris ;
- manipuler les notions du cours sur des exemples concrets ;
- progresser dans la logique et la rigueur.

Nous proposons un test par chapitre principal du cours de deuxième année. Conformes au programme officiel, ces tests sont tous indépendants les uns des autres, et peuvent être abordés dans n'importe quel ordre, au fil du cours prodigué par votre professeur de mathématiques. Comptez entre quinze et vingt-cinq minutes pour répondre aux questions du test (généralement entre 15 et 20 questions), puis prenez le temps qu'il faut pour lire et comprendre le corrigé. Les questions sont en principe de difficulté croissante, la majorité des élèves auxquels nous avons proposé ces tests donnent entre 50 % et 60 % de réponses justes. Au-delà de 75 % de réponses justes, vous pouvez considérer que votre apprentissage du cours est satisfaisant.

Dans les corrigés, nous ne nous contentons pas de vous donner la bonne réponse, mais nous vous expliquons aussi pourquoi les autres réponses proposées sont fausses. C'est une manière efficace de prendre du recul sur votre cours.

Vous trouverez aussi dans ce livre trois QCM de révision portant sur la totalité du programme de première et deuxième année. Ils sont étudiés pour vous permettre de cibler les principaux chapitres sur lesquels vos révisions seront les plus efficaces.

Nous espérons que ces QCM trouveront leur place chaque semaine dans votre emploi du temps. C'est au travers d'un investissement régulier que votre travail portera ses fruits.

Les auteurs

Partie 1
Algèbre

1 Groupes, anneaux, corps

Thèmes abordés

Avec ce QCM, vous évaluez vos compétences sur les sujets suivants :

- La caractérisation des sous-structures
- Le sous-groupe engendré par une partie
- Les morphismes de structure
- Les sous-groupes de $\mathbf{Z}$
- Les groupes monogènes
- Les idéaux d'un anneau commutatif
- Les idéaux de $\mathbf{K}[X]$
- Les groupes usuels (groupe symétrique, groupes de matrices…)

Consignes

Répondez d'abord aux questions suivantes, puis allez voir **les corrigés page 40**. Nous vous rappelons qu'il n'y a qu'une seule réponse exacte par question. Certaines questions nécessitent d'écrire quelques lignes au brouillon.

1 Dans l'anneau $\mathbf{R}[X]$, le sous-ensemble $\mathbf{Z}[X]$ est

❒ **a.** un sous-groupe ❒ **b.** un sous-anneau

❒ **c.** un idéal ❒ **d.** un sous-corps

2 Soit X une partie non vide de $\mathbf{R}^2$. L'ensemble des applications $u \in \mathrm{GL}(\mathbf{R}^2)$ telles que $u(X) = X$ est

❒ **a.** un groupe ❒ **b.** un espace vectoriel

❒ **c.** une algèbre ❒ **d.** une droite

3 Quels sont les idéaux de $\mathbf{R}$?

❒ **a.** il n'y en a pas car $\mathbf{R}$ est un corps

❒ **b.** $\{0\}$ et $\mathbf{R}$

❒ **c.** tous les sous-corps de $\mathbf{R}$

❒ **d.** les ensembles de la forme $a\mathbf{Z}$, où $a \in \mathbf{R}$

4 Soient a, b, c dans $\mathbf{Z}$. Si le groupe engendré par $\{a, b, c\}$ est égal à $\mathbf{Z}$ alors

❒ **a.** l'un des entiers vaut 1 ou -1

❒ **b.** les trois entiers sont premiers entre eux

❒ **c.** deux des trois entiers suffisent à engendrer $\mathbf{Z}$

❒ **d.** le ppcm de a, b, c vaut 1

5 Lequel des ensembles suivants est un idéal de $\mathbf{C}[X]$?

❒ **a.** $\{P \in \mathbf{C}[X],\ P(0) = 0\}$ ❒ **b.** $\{P \in \mathbf{C}[X],\ P'(0) = 0\}$

❒ **c.** $\{P \in \mathbf{C}[X],\ P(1) = P(0)\}$ ❒ **d.** $\{P \in \mathbf{C}[X],\ P(0) = 1\}$

6 Le groupe symétrique $(\mathscr{S}_n, \circ)$ est cyclique

❒ **a.** pour $n = 1$ ❒ **b.** pour $n \in \{1, 2\}$

❒ **c.** pour $n \in \{1, 2, 3\}$ ❒ **d.** jamais

7 Soit A un ensemble muni d'une structure algébrique et $B = A \times A$ muni de la (resp. des) loi(s) naturelle(s). L'une des phrases suivantes est fausse. Laquelle ?

❒ **a.** si A est un groupe alors B est un groupe

❒ **b.** si A est un anneau alors B est un anneau

❒ **c.** si A est un anneau commutatif alors B est un anneau commutatif

❒ **d.** si A est un corps alors B est un corps

8 Pour prouver qu'un sous-groupe non nul G de $\mathbf{Z}$ est de la forme $n\mathbf{Z}$, comment construit-on n à partir de G ?

❒ **a.** $n = \min(G \cap \mathbf{N}^*)$ ❒ **b.** $n = \text{pgcd}\{x, x \in G\}$

❒ **c.** $n = \text{Card } G$ ❒ **d.** $n = \inf\ \mathbf{N}^* \backslash G$

9 Soient A et B deux anneaux commutatifs non nuls, et soit φ un morphisme d'anneau de A dans B. Le noyau de φ est

❒ **a.** un sous-anneau de A ❒ **b.** un sous-anneau de B

❒ **c.** un idéal de A ❒ **d.** sans structure particulière

10 Quel est le sous-groupe de $(\mathbf{C}, +)$ engendré par $\{1, i\}$?

❒ **a.** $\{a + bi, (a, b) \in \mathbf{Z}^2\}$ ❒ **b.** $\{1, -1, i, -i\}$

❒ **c.** $\{a + bi, (a, b) \in \mathbf{Q}^2\}$ ❒ **d.** $\mathbf{C}$

11 Soit G un groupe fini de cardinal n de neutre e et x un élément de G. Laquelle des conditions suivantes ne permet pas de dire que x engendre G ?

❒ **a.** G est cyclique ❒ **b.** $x^k \neq e$ pour $1 \leqslant k < n$

❒ **c.** x^2 engendre G ❒ **d.** $\{k \in \mathbf{Z},\ x^k = e\} = n\mathbf{Z}$

12 Lequel des ensembles suivants n'est pas un groupe pour la composition des applications ?

❒ **a.** l'ensemble des bijections de $[0, 1]$ sur $[0, 1]$

❒ **b.** l'ensemble des bijections continues de $[0, 1]$ sur $[0, 1]$

❒ **c.** l'ensemble des bijections $\mathscr{C}^1$ de $[0, 1]$ sur $[0, 1]$

❒ **d.** l'ensemble des bijections croissantes de $[0, 1]$ sur $[0, 1]$

13 Soit A un anneau commutatif, I, J deux idéaux de A et $a \in A$. Lequel des ensembles suivants n'est pas forcément un idéal de A ?

❒ **a.** $I \cap J$ ❒ **b.** $I + J = \{x + y, x \in I, y \in J\}$

❒ **c.** $I \cup J$ ❒ **d.** $aI = \{ax, x \in I\}$

14 Soit G un groupe fini, de neutre 1, et x un élément de G tel que $x^{11} \neq 1$ et $x^{12} = 1$. Alors le cardinal du groupe engendré par x

❒ **a.** est 12 ❒ **b.** divise 12

❒ **c.** est 11 ❒ **d.** est un multiple de 12

15 Quels groupes sont isomorphes ?

❒ **a.** $(\mathbf{C}, +)$ et $(\mathbf{C}^*, \times)$ ❒ **b.** $(\mathbf{R}, +)$ et $(\mathbf{R}^*, \times)$

❒ **c.** $(\mathbf{Z}, +)$ et $(\mathbf{Q}, +)$ ❒ **d.** $(\mathbf{Z}, +)$ et $(2\mathbf{Z}, +)$

16 Lequel des ensembles suivants est un sous-groupe du groupe linéaire $(\mathrm{GL}_2(\mathbf{R}), \times)$?

❒ **a.** l'ensemble des matrices inversibles à coefficients dans $\mathbf{Z}$

❒ **b.** l'ensemble des matrices à coefficients dans $\mathbf{Z}$ de déterminant 1

❒ **c.** l'ensemble des matrices de déterminant < 0

❒ **d.** l'ensemble des matrices A vérifiant $A^2 = I_2$

17 Dans le groupe symétrique S_5 combien y a-t-il d'éléments qui engendrent un sous-groupe de cardinal 2 ?

❒ **a.** 10 ❒ **b.** 25 ❒ **c.** 40 ❒ **d.** 60

18 Soit G un groupe cyclique d'ordre n engendré par x. Les éléments x^2 et x^3 engendrent le même sous-groupe de G lorsque

❐ **a.** n est impair

❐ **b.** n est pair

❐ **c.** n est premier avec 6

❐ **d.** n est un multiple de 6

Retrouvez les corrigés du chapitre 1 page 40.

2 Arithmétique et anneaux $\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$

Thèmes abordés

Avec ce QCM, vous évaluez vos compétences sur les sujets suivants :

- L'arithmétique de $\mathbf{Z}$
- Les calculs dans $\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$
- Les structures de groupe et d'anneau de $\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$
- Les inversibles de $\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$, l'indicatrice d'Euler
- La caractéristique d'un anneau ou d'un corps

Consignes

Répondez d'abord aux questions suivantes, puis allez voir **les corrigés page 46**. Nous vous rappelons qu'il n'y a qu'une seule réponse exacte par question. Certaines questions nécessitent d'écrire quelques lignes au brouillon.

Notations. On note φ la fonction indicatrice d'Euler.

1 Soit a un entier > 1. Quel est le reste de la division euclidienne de $a^2 + 1$ par $a - 1$?

❒ **a.** 0 ❒ **b.** 2 ❒ **c.** $a + 1$ ❒ **d.** $-a + 1$

2 Pour quelles valeurs de $n \in \mathbf{N}$ a-t-on $15 \equiv 36\ [n]$?

❒ **a.** seulement 21 ❒ **b.** les multiples de 21

❒ **c.** les diviseurs de 21 ❒ **d.** le pgcd de 15 et 36

3 Quel est le pgcd de $6^{(5^4)}$ et $4^{(5^6)}$?

❒ **a.** 1 ❒ **b.** $2^{(5^4)}$ ❒ **c.** $4^{(5^4)}$ ❒ **d.** $6^{(5^6)}$

4 Lequel des éléments suivants n'est pas inversible dans l'anneau $\mathbf{Z}/30\mathbf{Z}$?

❒ **a.** $\overline{11}$ ❒ **b.** $\overline{13}$ ❒ **c.** $\overline{17}$ ❒ **d.** $\overline{21}$

5 Combien l'équation $\varphi(n) = n - 1$ a-t-elle de solutions ?

❐ **a.** aucune ❐ **b.** 1 ❐ **c.** 2 ❐ **d.** une infinité

6 Soit $n \geqslant 2$. Combien $\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$ possède-t-il de sous-anneaux ?

❐ **a.** 1 ❐ **b.** $\varphi(n)$ ❐ **c.** n

❐ **d.** autant que de diviseurs de n

7 Quel est l'inverse de $\overline{11}$ dans $\mathbf{Z}/60\mathbf{Z}$?

❐ **a.** $\overline{11}$ ❐ **b.** $\overline{49}$ ❐ **c.** $\overline{29}$ ❐ **d.** $\overline{11}$ n'est pas inversible

8 Le sous-groupe de $\mathbf{Z}/12\mathbf{Z}$ engendré par la classe de 9 est isomorphe à

❐ **a.** $\mathbf{Z}/3\mathbf{Z}$ ❐ **b.** $\mathbf{Z}/4\mathbf{Z}$ ❐ **c.** $\mathbf{Z}/9\mathbf{Z}$ ❐ **d.** $\mathbf{Z}/12\mathbf{Z}$

9 Combien y a-t-il d'entiers $n \geqslant 2$ tels que 3 soit l'inverse de 5 modulo n ?

❐ **a.** aucun ❐ **b.** 1 ❐ **c.** 3 ❐ **d.** une infinité

10 Soit A un anneau commutatif non nul, (P) la propriété « A est fini » et (Q) la propriété « la caractéristique de A est non nulle ». Alors

❐ **a.** $(P) \Longrightarrow (Q)$ ❐ **b.** $(Q) \Longrightarrow (P)$ ❐ **c.** $(P) \Longleftrightarrow (Q)$

❐ **d.** il n'y a aucune implication entre (P) et (Q)

11 Lequel des groupes suivants a le plus de générateurs ?

❐ **a.** $\mathbf{Z}/12\mathbf{Z}$ ❐ **b.** $\mathbf{Z}/13\mathbf{Z}$ ❐ **c.** $\mathbf{Z}/14\mathbf{Z}$ ❐ **d.** $\mathbf{Z}/15\mathbf{Z}$

12 Soit $n \in \mathbf{N}$ qui peut s'écrire comme somme de deux carrés : $n = a^2 + b^2$ avec a, b entiers. Modulo 4, l'entier n ne peut pas être congru à

❐ **a.** 0 ❐ **b.** 1 ❐ **c.** 2 ❐ **d.** 3

13 Quelle est la caractéristique de l'anneau produit $A = \mathbf{Z}/6\mathbf{Z} \times \mathbf{Z}/10\mathbf{Z}$?

❐ **a.** 2 ❐ **b.** 10 ❐ **c.** 30 ❐ **d.** 60

14 Les deux groupes $\mathbf{Z}/2\mathbf{Z} \times \mathbf{Z}/3\mathbf{Z}$ et $\mathbf{Z}/6\mathbf{Z}$ sont-ils isomorphes ?

❐ **a.** non, car ils n'ont pas même cardinal

❐ **b.** non, car l'un est commutatif et l'autre non

❐ **c.** non, car l'un est cyclique et l'autre non

❐ **d.** oui

15 Dans l'anneau $\mathbf{Z}/12\mathbf{Z}$, quels sont les éléments nilpotents ?

❒ **a.** seulement $\overline{0}$ ❒ **b.** $\{\overline{0}, \overline{6}\}$ ❒ **c.** $\{\overline{0}, \overline{2}, \overline{3}, \overline{6}\}$

❒ **d.** tous car 12 n'est pas premier

16 Dans l'anneau $\mathbf{Z}/12\mathbf{Z}$, combien d'éléments vérifient $x^2 = 1$?

❒ **a.** 1 ❒ **b.** 2 ❒ **c.** 4 ❒ **d.** une infinité

17 Soit $\mathbf{K}$ un corps de caractéristique p, et E un $\mathbf{K}$-espace vectoriel de dimension finie $n \geqslant 1$. Alors l'anneau $\mathscr{L}(E)$ est de caractéristique

❒ **a.** 0 ❒ **b.** p ❒ **c.** np ❒ **d.** n^2p^2

18 Combien y a-t-il de morphismes de groupes de $\mathbf{Z}/5\mathbf{Z}$ dans $\mathbf{Z}/3\mathbf{Z}$?

❒ **a.** 0 ❒ **b.** 1 ❒ **c.** 3 ❒ **d.** 15

19 Quelle fonction, dont l'ensemble de départ est $\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$, n'est pas définie ?

❒ **a.** $\overline{k} \mapsto k$ ❒ **b.** $\overline{k} \mapsto \overline{k^2}$ ❒ **c.** $\overline{k} \mapsto \overline{1}$ ❒ **d.** $\overline{k} \mapsto e^{\frac{2ik\pi}{n}}$

Retrouvez les corrigés du chapitre 2 page 46.

3

Espaces vectoriels et applications linéaires

Thèmes abordés

Avec ce QCM, vous évaluez vos compétences sur les sujets suivants :

- Les familles libres, génératrices et les bases
- Les sommes et sommes directes d'espaces vectoriels
- Les projecteurs
- Les applications linéaires
- Le théorème du rang

Consignes

Répondez d'abord aux questions suivantes, puis allez voir **les corrigés page 51**. Nous vous rappelons qu'il n'y a qu'une seule réponse exacte par question. Certaines questions nécessitent d'écrire quelques lignes au brouillon.

1 Soient p, q deux projecteurs d'un espace vectoriel E qui commutent. Laquelle des applications suivantes n'est pas forcément un projecteur ?

❒ **a.** $\mathrm{Id}_E - p$ ❒ **b.** $p + q$

❒ **c.** $p \circ q$ ❒ **d.** $(\mathrm{Id}_E - p) \circ (\mathrm{Id}_E - q)$

2 Soit u, v deux endomorphismes d'un espace vectoriel E de dimension finie avec $\mathrm{rg}\, u \leqslant \mathrm{rg}\, v$. Quel est le rang maximum que peut avoir $v \circ u$?

❒ **a.** $\mathrm{rg}\, u + \mathrm{rg}\, v$ ❒ **b.** $\mathrm{rg}\, v$ ❒ **c.** $\mathrm{rg}\, u$ ❒ **d.** $\mathrm{rg}\, v - \mathrm{rg}\, u$

3 Soit $E = \mathscr{M}_n(\mathbf{R})$, et A dans E, inversible. Quelle application est linéaire ?

❒ **a.** $f_a : M \mapsto AMA^{-1}$ ❒ **b.** $f_b : M \mapsto MA\,{}^t\!M$

❒ **c.** $f_c : M \mapsto MAM^{-1}$ ❒ **d.** $f_d : M \mapsto A + M$

4 Soit u un endomorphisme d'un espace vectoriel E de dimension finie, F un sous-espace de E stable par u et v l'endomorphisme de F induit par u. Laquelle des implications suivantes n'est pas vraie ?

❒ **a.** si u est un projecteur, v est un projecteur

❒ **b.** si u est une symétrie, v est une symétrie

❒ **c.** si u est non nul, v est non nul

❒ **d.** si u est injectif, v est injectif

5 Soit φ l'endomorphisme de $\mathbf{C}_n[X]$ défini par $\varphi(P) = P(X+1) - P(X)$ pour tout P. Alors φ est de rang

❒ **a.** 1 ❒ **b.** $n-1$ ❒ **c.** n ❒ **d.** $n+1$

6 Soit u un endomorphisme d'un espace vectoriel E de dimension infinie tel que $\operatorname{Ker} u$ soit un hyperplan. Alors

❒ **a.** $\operatorname{rg} u = 1$ ❒ **b.** $\operatorname{rg} u \leqslant 1$ ❒ **c.** $\operatorname{rg} u \geqslant 1$

❒ **d.** u n'est pas forcément de rang fini

7 Soit E un espace vectoriel et $u \in \mathscr{L}(E)$. Les propriétés suivantes sont toutes vraies si E est de dimension finie. Laquelle reste vraie même si E est de dimension infinie ?

❒ **a.** s'il existe $v \in \mathscr{L}(E)$ tel que $u \circ v = \mathrm{Id}_E$ alors u est bijective

❒ **b.** si u est injective alors u est bijective

❒ **c.** si $u \circ u \circ u = \mathrm{Id}_E$ alors u est bijective

❒ **d.** si $\operatorname{Im} u = E$ alors u est bijective

8 Soient F, G deux sous-espaces de E tels que $E = F \oplus G$. Combien existe-t-il d'endomorphismes u de E tels que $u_{|F} = \mathrm{Id}_F$ et $u_{|G} = 0$?

❒ **a.** 0 ❒ **b.** 1 ❒ **c.** une infinité

❒ **d.** cela dépend de F et G

9 Soit E un espace vectoriel et $(F_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ une famille de sous-espaces de E. Pour chaque i on considère une base $\mathscr{B}_i$ de F_i. Notons (A) la propriété « $E = \bigoplus_{i=1}^{n} F_i$ » et (B) la propriété « $\bigcup_{i=1}^{n} \mathscr{B}_i$ est une base de E ». Alors

❒ **a.** $(A) \Longrightarrow (B)$ ❒ **b.** $(B) \Longrightarrow (A)$ ❒ **c.** $(A) \Longleftrightarrow (B)$

❒ **d.** il n'y a aucune implication logique entre (A) et (B)

10 Soit E un $\mathbf{R}$-espace vectoriel de dimension 3. Combien y a-t-il de décompositions $E = F_1 \oplus F_2 \oplus F_3$ où les F_k sont des sous-espaces quelconques non nuls ?

❒ **a.** une seule ❒ **b.** 6 ❒ **c.** 15 ❒ **d.** une infinité

11 Soit E un espace vectoriel de dimension finie, x_1, x_2, y_1, y_2 des vecteurs de E. Pour qu'il existe un endomorphisme f de E tel que $f(x_1) = y_1$ et $f(x_2) = y_2$ la condition (x_1, x_2) libre est

❒ **a.** nécessaire ❒ **b.** suffisante ❒ **c.** nécessaire et suffisante

❒ **d.** ni nécessaire, ni suffisante

12 Soit E un espace vectoriel de dimension finie et $f \in \mathscr{L}(E)$. Laquelle des conditions suivantes n'est pas suffisante pour affirmer que $E = \operatorname{Ker} f \oplus \operatorname{Im} f$?

❒ **a.** $\operatorname{Ker} f \cap \operatorname{Im} f = \{0\}$ ❒ **b.** f est inversible

❒ **c.** $\operatorname{rg} f = 1$ ❒ **d.** $f^2 = f$

13 Soit $(f_n)_{n\geqslant 0}$ une suite de fonctions de $[-1, 1]$ dans $\mathbf{R}$. Pour tout n on note g_n la restriction de f_n à $[0, 1]$. Soit (A) l'assertion « la famille $(f_n)_{n\geqslant 0}$ est libre » et (B) l'assertion « la famille $(g_n)_{n\geqslant 0}$ est libre ». Alors

❒ **a.** $(A) \Longrightarrow (B)$ ❒ **b.** $(B) \Longrightarrow (A)$ ❒ **c.** $(A) \Longleftrightarrow (B)$

❒ **d.** il n'y a aucune implication entre (A) et (B)

14 Laquelle des familles suivantes de fonctions est une base de $\mathscr{C}^0([0, 1], \mathbf{R})$?

❒ **a.** $(x \mapsto x^n)_{n\in\mathbf{N}}$ ❒ **b.** $(x \mapsto |x - a|)_{a\in[0,1]}$

❒ **c.** $(x \mapsto x^a)_{a\in\mathbf{R}_+^*}$ ❒ **d.** aucune des trois

15 Laquelle des familles suivantes n'est pas une base de $\mathbf{R}[X]$?

❒ **a.** $((X + n)^n)_{n\in\mathbf{N}}$ ❒ **b.** $(X^n + n)_{n\in\mathbf{N}}$

❒ **c.** $(X + X^n)_{n\in\mathbf{N}}$ ❒ **d.** $((X^n + n)^n)_{n\in\mathbf{N}}$

16 Soit u l'application de $\mathscr{M}_n(\mathbf{R})$ dans $\mathscr{M}_n(\mathbf{R})$ définie par $u(M) = M + {}^tM$. Quel est le rang de u ?

❒ **a.** n ❒ **b.** $\dfrac{n(n+1)}{2}$

❒ **c.** $\dfrac{n(n-1)}{2}$ ❒ **d.** u n'est pas linéaire

17 Dans $E = \mathbf{R}[X]$, lequel des ensembles suivants est un sous-espace vectoriel qui admet un supplémentaire de dimension finie ?

❒ **a.** $\{P(X^2),\ P \in E\}$ ❒ **b.** $\{P \in E \,/\, \int_0^1 P(t)\,\mathrm{d}t = 1\}$

❒ **c.** $\{X^2 P,\ P \in E\}$ ❒ **d.** $\{P \in E \,/\, P$ admet exactement 2 racines $\}$

18 On considère $E = \mathbf{C}[X]$ et $n \geqslant 2$. Dans lequel des cas suivants peut-on dire que $E = F_1 \oplus F_2 \oplus \cdots \oplus F_n$?

❒ **a.** $F_k = \mathbf{C}_k[X]$

❒ **b.** $F_k = \{P(X^k), P \in \mathbf{C}[X]\}$

❒ **c.** $F_k = \{P \in \mathbf{C}[X] \,/\, \deg P \equiv k\ [n]\} \cup \{0\}$

❒ **d.** $F_k = \{P \in \mathbf{C}[X] \,/\, P(\omega X) = \omega^k P(X)\}$ où $\omega = e^{\frac{2i\pi}{n}}$

19 Soit E de dimension finie, et $F_1, F_2, \ldots, F_n$ des sous-espaces tels que $E = \sum_{i=1}^{n} F_i$. On considère la proposition (A) : « E est la somme directe des F_i » et la proposition (B) : « $\sum_{i=1}^{n} \dim F_i = \dim E$ ». Alors

❒ **a.** $(A) \Longrightarrow (B)$ ❒ **b.** $(B) \Longrightarrow (A)$ ❒ **c.** $(A) \Longleftrightarrow (B)$

❒ **d.** il n'y a pas de lien entre les deux propositions

Retrouvez les corrigés du chapitre 3 page 51.

Matrices

4

Thèmes abordés

Avec ce QCM, vous évaluez vos compétences sur les sujets suivants :

- La trace des matrices et des endomorphismes
- La décomposition par blocs des matrices
- Le déterminant
- Le rang des matrices
- Les matrices équivalentes et semblables
- Les opérations sur les lignes et colonnes
- Les systèmes linéaires
- Le calcul matriciel

Consignes

Répondez d'abord aux questions suivantes, puis allez voir **les corrigés page 58**. Nous vous rappelons qu'il n'y a qu'une seule réponse exacte par question. Certaines questions nécessitent d'écrire quelques lignes au brouillon.

Notations. On désigne par $\mathbf{K}$ un corps commutatif quelconque. Une matrice est parfois identifiée à l'application linéaire qui lui est canoniquement associée.

1 Si A, B sont deux matrices de $\mathscr{M}_n(\mathbf{K})$, les matrices AB et BA ont toujours même

❒ **a.** rang ❒ **b.** trace ❒ **c.** diagonale ❒ **d.** transposée

2 Soit $M \in \mathscr{M}_{2n}(\mathbf{K})$ de la forme $M = \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & A \end{pmatrix}$, où A et B sont dans $\mathscr{M}_n(\mathbf{K})$. Que vaut la matrice M^2 ?

❒ **a.** $\begin{pmatrix} A^2 & B^2 \\ 0 & A^2 \end{pmatrix}$ ❒ **b.** $\begin{pmatrix} AB & BA \\ 0 & A^2 \end{pmatrix}$

❒ **c.** $\begin{pmatrix} A^2 & 2AB \\ 0 & A^2 \end{pmatrix}$ ❒ **d.** $\begin{pmatrix} A^2 & AB + BA \\ 0 & A^2 \end{pmatrix}$

3 Soit A, B dans $\mathscr{M}_n(\mathbf{K})$ telles que $AB = 0$. Alors

❒ **a.** $A = 0$ ou $B = 0$ ❒ **b.** $\operatorname{Im} B \cap \operatorname{Im} A = \{0\}$

❒ **c.** $\operatorname{Im} B \subset \operatorname{Ker} A$ ❒ **d.** $\operatorname{Im} A \subset \operatorname{Ker} B$

4 Soit $E = \mathscr{M}_n(\mathbf{K})$, F l'ensemble des matrices triangulaires supérieures, G l'ensemble des matrices triangulaires inférieures. Alors

❒ **a.** E est la somme directe de F et G

❒ **b.** E est la somme, non directe, de F et G

❒ **c.** E n'est pas la somme de F et G

❒ **d.** F et G ne sont pas des sous-espaces vectoriels de E

5 Soient A, B, C, D quatre matrices de $\mathscr{M}_n(\mathbf{K})$. Alors $ABCD$ a la même trace que

❒ **a.** $DCBA$ ❒ **b.** $BADC$ ❒ **c.** $BCDA$ ❒ **d.** $ACBD$

6 Soit A, B, C des matrices de $\mathscr{M}_n(\mathbf{K})$, P, Q des matrices de $\mathrm{GL}_n(\mathbf{K})$. On définit par blocs les matrices $U = \begin{pmatrix} P & 0 \\ 0 & Q \end{pmatrix}$ et $M = \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & C \end{pmatrix}$ de $\mathscr{M}_{2n}(\mathbf{K})$. La matrice UMU^{-1} vaut

❒ **a.** $\begin{pmatrix} PAP^{-1} & PBQ^{-1} \\ 0 & QCQ^{-1} \end{pmatrix}$ ❒ **b.** $\begin{pmatrix} PAP^{-1} & PBP^{-1} \\ 0 & QCQ^{-1} \end{pmatrix}$

❒ **c.** $\begin{pmatrix} PAP^{-1} & PBQ^{-1} \\ QBP^{-1} & QCQ^{-1} \end{pmatrix}$ ❒ **d.** $\begin{pmatrix} PAP^{-1} & P^{-1}BQ \\ 0 & QCQ^{-1} \end{pmatrix}$

7 Soit $D = \mathrm{Diag}(d_1, \dots, d_n) \in \mathscr{M}_n(\mathbf{R})$ une matrice diagonale inversible, et $M = (m_{ij}) \in \mathscr{M}_n(\mathbf{R})$. On pose $A = DMD^{-1}$ et on note (a_{ij}) ses coefficients. Alors

❒ **a.** $A = M$ ❒ **b.** $a_{ij} = d_i d_j m_{ij}$

❒ **c.** $a_{ij} = \dfrac{d_i}{d_j} m_{ij}$ ❒ **d.** $a_{ij} = \dfrac{d_j}{d_i} m_{ij}$

8 Laquelle des matrices suivantes est semblable à $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$?

❒ **a.** $\begin{pmatrix} a+c & b+d \\ c & d \end{pmatrix}$ ❒ **b.** $\begin{pmatrix} d & c \\ b & a \end{pmatrix}$

❒ **c.** $\begin{pmatrix} b & a \\ d & c \end{pmatrix}$ ❒ **d.** $\begin{pmatrix} 2a & 2b \\ 2c & 2d \end{pmatrix}$

9 Soit E un $\mathbf{R}$-espace vectoriel de dimension n et s une symétrie de E par rapport à un sous-espace de dimension p. Alors la trace de s vaut

❒ **a.** p ❒ **b.** $n-p$ ❒ **c.** $n-2p$ ❒ **d.** $2p-n$

10 Soit $A \in GL_n(\mathbf{R})$. Si A est semblable à son inverse on peut dire que

❒ **a.** $\operatorname{Tr} A = 0$ ❒ **b.** $\det A = \pm 1$ ❒ **c.** $A^2 = I_n$

❒ **d.** rien car la situation évoquée n'est pas possible

11 Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbf{K})$ et $B = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & A \end{pmatrix}$. Quel est le rang de B ?

❒ **a.** $\operatorname{rg} A$ ❒ **b.** $2 \operatorname{rg} A$ ❒ **c.** $(\operatorname{rg} A)^2$ ❒ **d.** $n + \operatorname{rg} A$

12 Soient n, p, q dans $\mathbf{N}^*$, $A \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbf{K})$ et $B \in \mathscr{M}_{p,q}(\mathbf{K})$. On suppose que les colonnes de B engendrent $\mathbf{K}^p$. Alors le rang de AB vaut

❒ **a.** $\operatorname{rg} A$ ❒ **b.** $\operatorname{rg} B$ ❒ **c.** q ❒ **d.** p

13 Soient n, p, q dans $\mathbf{N}^*$, $A \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbf{K})$ et $B \in \mathscr{M}_{p,q}(\mathbf{K})$. On suppose que les lignes de A engendrent $\mathbf{K}^p$. Alors le rang de AB vaut

❒ **a.** $\operatorname{rg} A$ ❒ **b.** $\operatorname{rg} B$ ❒ **c.** $n - \operatorname{rg} A$ ❒ **d.** $p - \operatorname{rg} B$

14 Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbf{K})$, $1 \leqslant r \leqslant n$ et J_r la matrice diagonale de taille n dont les r premiers coefficients diagonaux valent 1 les autres étant nuls. Si (P) désigne l'assertion « $\operatorname{rg} A = r$ » et (Q) l'assertion « $\exists U \in GL_n(\mathbf{K}),\ A = UJ_r$ », alors :

❒ **a.** $(P) \Longrightarrow (Q)$ ❒ **b.** $(Q) \Longrightarrow (P)$ ❒ **c.** $(P) \Longleftrightarrow (Q)$

❒ **d.** il n'y a aucune implication entre (P) et (Q)

15 Soit $E = \mathscr{M}_n(\mathbf{R})$, F l'ensemble des matrices triangulaires supérieures, G l'ensemble des matrices antisymétriques. Alors

❒ **a.** E est la somme directe de F et G

❒ **b.** E est la somme, non directe, de F et G

❒ **c.** E n'est pas la somme de F et G

❒ **d.** F et G ne sont pas des sous-espaces vectoriels de E

16 Soit E un espace vectoriel de dimension n sur $\mathbf{R}$ et $(f_1, f_2, \dots, f_n)$ un système de n formes linéaires liées de E^*.

Le système d'équations $f_1(x) = f_2(x) = \cdots = f_n(x) = 1$

❒ **a.** possède exactement 1 solution

❒ **b.** n'admet aucune solution

❒ **c.** admet moins de n solutions

❒ **d.** admet 0 ou une infinité de solutions

17 Soit $A = (a_{ij})_{1\leqslant i,j\leqslant n} \in \mathscr{M}_n(\mathbf{K})$ et $B = (b_{ij})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ la comatrice de A. On note $(E_{ij})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ la base des matrices élémentaires. Que vaut $\det(A + E_{ij})$?

❒ **a.** $\det(A)$ ❒ **b.** $\det(A) + 1$

❒ **c.** $\det(A) + b_{ij}$ ❒ **d.** $\det(A) + (-1)^{i+j} b_{ij}$

18 On considère les matrices $A, B, C \in \mathscr{M}_{2n}(\mathbf{K})$ que l'on décompose en blocs de taille $n \times n$ sous la forme $A = \begin{pmatrix} A_1 & A_2 \\ A_3 & A_4 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} B_1 & B_2 \\ B_3 & B_4 \end{pmatrix}$ et $C = \begin{pmatrix} I_n & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. On suppose que $AC = CB$. Que peut-on en déduire ?

❒ **a.** $A_1 = B_1$ et $B_2 = A_3$ ❒ **b.** $A_1 = B_1$ et $A_4 = B_4 = 0$

❒ **c.** $A_1 = B_2$ et $A_3 = B_1 = 0$ ❒ **d.** $A_1 = B_1$ et $A_3 = B_2 = 0$

19 On suppose que $\begin{pmatrix} -1 & 2 & 5 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & -2 \end{pmatrix} = T \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & -2 \end{pmatrix}$ où $T \in \mathscr{M}_3(\mathbf{R})$. Que vaut la matrice T ?

❒ **a.** $\begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ ❒ **b.** $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

❒ **c.** $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$ ❒ **d.** $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

20 La matrice réelle $M_a = \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ est semblable à la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

❒ **a.** pour tout réel a ❒ **b.** pour a non nul

❒ **c.** seulement pour $a = 1$ ❒ **d.** seulement pour $a > 0$

Retrouvez les corrigés du chapitre 4 page 58.

Formes linéaires et dualité

5

Thèmes abordés

Avec ce QCM, vous évaluez vos compétences sur les sujets suivants :

- L'espace vectoriel des formes linéaires
- La notion de base duale et de base antéduale
- Les hyperplans comme noyaux de formes linéaires
- La dimension d'une intersection d'hyperplans

Consignes

Répondez d'abord aux questions suivantes, puis allez voir **les corrigés page 65**. Nous vous rappelons qu'il n'y a qu'une seule réponse exacte par question. Certaines questions nécessitent d'écrire quelques lignes au brouillon.

Notations. Sauf indication contraire, E désigne un espace vectoriel réel ou complexe de dimension quelconque.

1 On suppose $\dim E = n$. Soit $(e_1, \dots, e_n)$ une base de E et $(e_1^*, \dots, e_n^*)$ sa base duale. Combien vaut le réel $(e_1^* + e_2^* + e_3^*)(e_1 + e_2 + e_3)$?

❒ **a.** 1 ❒ **b.** 3 ❒ **c.** 9 ❒ **d.** $3n$

2 Soient f et g deux formes linéaires non nulles sur E, (A) la propriété « (f, g) est liée » et (B) la propriété « $\operatorname{Ker} f = \operatorname{Ker} g$ ». Alors

❒ **a.** $(A) \Longrightarrow (B)$ ❒ **b.** $(B) \Longrightarrow (A)$ ❒ **c.** $(A) \Longleftrightarrow (B)$

❒ **d.** il n'y a pas d'implication entre (A) et (B)

3 Soit $n \geqslant 2$. Pour $A = (a_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \in \mathscr{M}_n(\mathbf{R})$ on pose $f(A) = \displaystyle\sum_{1 \leqslant i,j \leqslant n} a_{ij}$. Quelle est la dimension de $\operatorname{Ker} f \cap \operatorname{Ker} \operatorname{Tr}$ où Tr est la trace ?

❒ **a.** $n - 2$ ❒ **b.** $n - 1$ ❒ **c.** $n^2 - n$ ❒ **d.** $n^2 - 2$

4 Soit $u \in \mathscr{L}(E)$ et $\varphi \in \mathscr{L}(E^*)$ définie par $\varphi(f) = f \circ u$ pour tout $f \in E^*$. Que vaut $\operatorname{Ker}\varphi$?

❒ **a.** $\operatorname{Ker} u \cap \operatorname{Ker} f$ ❒ **b.** $\operatorname{Ker} u$

❒ **c.** $\mathscr{L}(E^*, \operatorname{Im} u)$ ❒ **d.** $\{f \in E^*, \operatorname{Im} u \subset \operatorname{Ker} f\}$

5 Si f est une forme linéaire sur $\mathscr{M}_n(\mathbf{R})$, alors il existe une matrice A telle que pour tout M, $f(M) =$

❒ **a.** AM ❒ **b.** $\operatorname{Tr}(AMA^{-1})$ ❒ **c.** $\operatorname{Tr}(A)$ ❒ **d.** $\operatorname{Tr}(AM)$

6 Soit e_1, e_2, e_3 trois vecteurs de $\mathbf{R}^5$. L'espace vectoriel des formes linéaires f qui s'annulent sur chaque e_i est un sous-espace du dual de $\mathbf{R}^5$ de dimension

❒ **a.** 2 ❒ **b.** $\geqslant 2$ ❒ **c.** $\leqslant 3$ ❒ **d.** 3

7 On suppose E de dimension n et soit F un sous-espace de E de dimension $p < n$. On souhaite écrire F comme intersection d'hyperplans de E. Il en faut au moins

❒ **a.** p ❒ **b.** $n - p$ ❒ **c.** $n - p + 1$

❒ **d.** une infinité dans certains cas

8 Soit E l'espace des matrices triangulaires supérieures de taille n, et F le sous-espace des matrices de E de trace nulle. Quelle est la dimension de F ?

❒ **a.** $n^2 - 1$ ❒ **b.** $\dfrac{n(n+1)}{2} - 1$

❒ **c.** $\dfrac{n(n-1)}{2}$ ❒ **d.** $\dfrac{n(n-1)}{2}$

9 Soit (e_1, e_2) une base d'un plan vectoriel E et (φ_1, φ_2) sa base duale. Quelle est la base duale de la base $(e_1 + e_2, e_2)$?

❒ **a.** $(\varphi_1 + \varphi_2, \varphi_2)$ ❒ **b.** $(\varphi_1, \varphi_1 + \varphi_2)$

❒ **c.** $(\varphi_1, \varphi_1 - \varphi_2)$ ❒ **d.** $(\varphi_1, \varphi_2 - \varphi_1)$

10 Soit $E = \mathbf{R}_n[X]$, et $a_0, \dots, a_n$ des réels deux à deux distincts. Pour tout k on pose $\varphi_k(P) = P(a_k)$. Alors

❒ **a.** $(\varphi_0, \dots, \varphi_n)$ est la base duale de la base d'interpolation de Lagrange

❒ **b.** $(\varphi_0, \dots, \varphi_n)$ est la base duale de $((X - a_k)^n)_{0 \leqslant k \leqslant n}$

❒ **c.** $(\varphi_0, \dots, \varphi_n)$ est la base duale de $P = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k X^k$

❒ **d.** $(\varphi_0, \dots, \varphi_n)$ n'est pas une base de E^*

11 On considère une base (e_1, e_2, e_3) de $\mathbf{R}^3$, avec $e_1 = (1,0,0)$, $e_2 = (1,1,0)$ et $e_3 = (1,1,1)$. On note (e_1^*, e_2^*, e_3^*) la base duale. Que vaut $e_1^*(x, y, z)$?

❒ **a.** x ❒ **b.** $x - y$ ❒ **c.** $x + y - z$ ❒ **d.** $y + z$

12 On considère les deux formes linéaires f et g sur $\mathbf{R}^2$ définies par $f(x, y) = x + y$ et $g(x, y) = x + 2y$. Alors (f, g) est la base duale de

❒ **a.** $((1, 1), (1, 2))$ ❒ **b.** $((-1, 1), (-2, 1))$

❒ **c.** $((2, -1), (-1, 1))$ ❒ **d.** $((0, 1), (1, -\frac{1}{2}))$

13 On considère un vecteur non nul e_1 de $\mathbf{R}^2$ et une forme linéaire non nulle φ_1 sur $\mathbf{R}^2$. Combien y a-t-il de couples (e_2, φ_2) formés d'un vecteur et d'une forme linéaire tels que (e_1, e_2) et (φ_1, φ_2) soient des bases duales l'une de l'autre ?

❒ **a.** 1 ❒ **b.** 0 ou 1 selon la valeur de $\varphi_1(e_1)$

❒ **c.** une infinité ❒ **d.** 0 ou une infinité selon la valeur de $\varphi_1(e_1)$

14 Combien y a-t-il de polynômes $P \in \mathbf{R}_2[X]$ tels que $\int_0^1 P = 1$, $\int_{-1}^0 P = 0$ et $P(1) = 0$?

❒ **a.** aucun ❒ **b.** 1 ❒ **c.** 2 ❒ **d.** une infinité

Retrouvez les corrigés du chapitre 5 page 65.