

l'intégrale

MÉTHODES
ET EXERCICES

PC | PSI | PT

JEAN-MARIE **MONIER**

GUILLAUME **HABERER**

CÉCILE **LARDON**

Mathématiques

méthodes et exercices

DUNOD

Conception et création de couverture : Atelier 3+

<p>Le pictogramme qui figure ci-contre mérite une explication. Son objet est d'alerter le lecteur sur la menace que représente pour l'avenir de l'écrit, particulièrement dans le domaine de l'édition technique et universitaire, le développement massif du photocopillage.</p> <p>Le Code de la propriété intellectuelle du 1^{er} juillet 1992 interdit en effet expressément la photocopie à usage collectif sans autorisation des ayants droit. Or, cette pratique s'est généralisée dans les établissements</p>	<p>d'enseignement supérieur, provoquant une baisse brutale des achats de livres et de revues, au point que la possibilité même pour les auteurs de créer des œuvres nouvelles et de les faire éditer correctement est aujourd'hui menacée.</p> <p>Nous rappelons donc que toute reproduction, partielle ou totale, de la présente publication est interdite sans autorisation de l'auteur, de son éditeur ou du Centre français d'exploitation du droit de copie (CFC, 20, rue des Grands-Augustins, 75006 Paris).</p>
--	--



© Dunod, 2014

5 rue Laromiguière, 75005 Paris

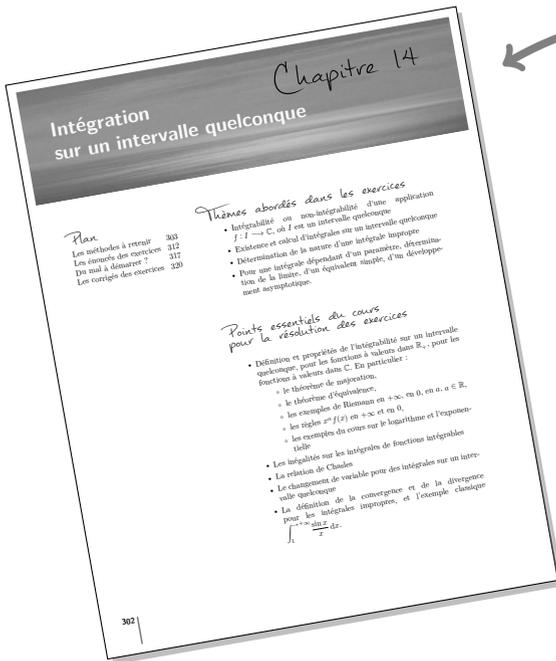
www.dunod.com

ISBN 978-2-10-071369-1

Le Code de la propriété intellectuelle n'autorisant, aux termes de l'article L. 122-5, 2° et 3° a), d'une part, que les « copies ou reproductions strictement réservées à l'usage privé du copiste et non destinées à une utilisation collective » et, d'autre part, que les analyses et les courtes citations dans un but d'exemple et d'illustration, « toute représentation ou reproduction intégrale ou partielle faite sans le consentement de l'auteur ou de ses ayants droit ou ayants cause est illicite » (art. L. 122-4).

Cette représentation ou reproduction, par quelque procédé que ce soit, constituerait donc une contrefaçon sanctionnée par les articles L. 335-2 et suivants du Code de la propriété intellectuelle.

Pour bien utiliser cet ouvrage



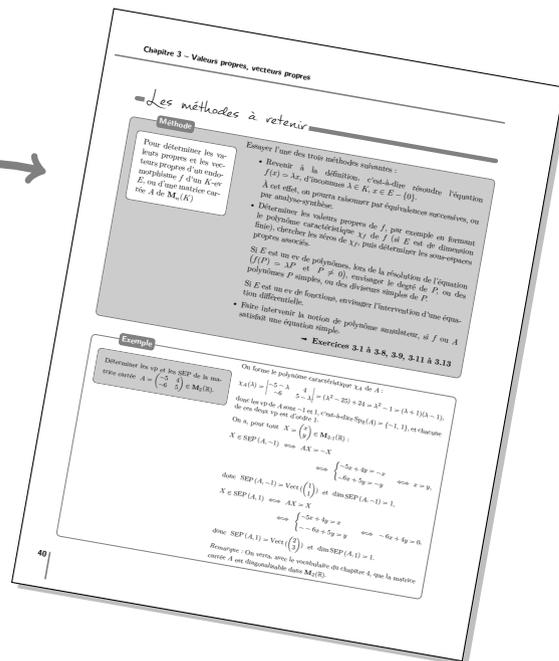
La page d'entrée de chapitre

Elle propose un plan du chapitre, les thèmes abordés dans les exercices, ainsi qu'un rappel des points essentiels du cours pour la résolution des exercices.

Les méthodes à retenir

Cette rubrique constitue une synthèse des principales méthodes à connaître, détaillées étape par étape, et indique les exercices auxquels elles se rapportent.

Chaque méthode est illustrée par un ou deux exemples qui la suivent.



Énoncés des exercices

De nombreux exercices de difficulté croissante sont proposés pour s'entraîner. La difficulté de chaque exercice est indiquée sur une échelle de 1 à 4.

Du mal à démarrer ?

1.10 Utiliser la théorie fondamentale pour un exercice à une matrice diagonale.

1.11 Utiliser la théorie fondamentale.

1.12 a) Appliquer $a) \wedge S = \lambda A$, puis utiliser la norme ou la distance minimale au profil cartésien canonique sur $M_n(\mathbb{R})$.

1.13 a) 1) Supposer $S \in \mathbb{S}_n^+$, $S_{ii} = 1$ et $S_{ij} = 0$. Utiliser un vecteur propre v pour S , associé à la valeur propre 1.

2) Retrouver la théorie fondamentale (ou théorème spectral), puis se ramener à un cas plus simple (exercice) pour un vecteur diagonal.

3) Répéter a) en prenant le caractère strict de certains coefficients.

1.14 a) Calculer $\text{tr}(X^2)$ pour $X \in M_n(\mathbb{R})$.

b) Compléter $a)$ par une étude d'irrégularité.

1.15 Noter E_1, E_2, \dots, E_n les lignes de A , et poser $\|E_i\|_1 = 1$, $\|E_i\|_2 = 1$, puis conclure. $E_1 = E_2 = \dots = E_n = 0$ et $\|E_i\|_2 = 1$, puis conclure. $E_1 = E_2 = \dots = E_n = 0$.

1.16 Vérifier $\det(D)$. On obtient $\det(D) = 1$ ou -1 .

• Cas de $\det(D) = 1$:
Après la suite f on a rotation (la row $f = M_{22}$ est donc inversible).
La droite asymptotique l'axe de f est commun à f et $f \circ D$.
On détermine l'angle θ de f par :
 $\cos \theta = \frac{1}{\sqrt{2}}$ ou $\theta = \frac{\pi}{4}$ ou $\frac{3\pi}{4}$.

• Cas de $\det(D) = -1$:
La symétrie en x est perdue (la row $f = M_{22}$ est donc inversible).
On détermine l'angle θ de f par :
 $\cos \theta = \frac{1}{\sqrt{2}}$ ou $\theta = \frac{\pi}{4}$ ou $\frac{3\pi}{4}$.

1.17 a) Utiliser la théorie fondamentale (exercice 6.1) en montrant l'existence d'un vecteur propre v .

b) Compléter $a)$ par une étude d'irrégularité.

1.18 a) Montrer $\langle v, Av \rangle = 1$ et $\det(A) = 1$.

1.19 a) 1) Privilégier :
1) Utiliser la théorie fondamentale.
2) Étudier de near d'équité.
3) Retrouver les calculs de $\det(A)$ en supposant l'équité.

1.20 B existe $X \in M_n(\mathbb{R})$ tel que $AX = XA$. Calculer $\text{tr}(X)$ et utiliser la théorie fondamentale.

1.21 Noter $C = AB - BA$.

1) Privilégier : obtenir directement $C \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$, $C^2 \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$, $C^4 \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$.

2) Étudier de near d'équité :
Utiliser la norme cartésienne canonique sur $M_n(\mathbb{R})$.

1.22 Définir que X est symétrique, puis $X^2 = L$. Utiliser la théorie fondamentale pour se ramener à un cas plus simple.

1.23 1) Un axe est réel.
2) Retrouver la théorie (exercice 1.1) et utiliser la théorie fondamentale (exercice 1.1) pour le polynôme caractéristique de A .
3) Calculer $\text{tr}(X)$ et $\det(X)$.

1.24 Noter $X \in \text{Ker}(A)$. Pour $X \in M_n(\mathbb{R})$, on a $AX = XA = 0$.

1.25 Utiliser la théorie (exercice 6.1) et la théorie fondamentale (exercice 6.1) pour conclure.

1.26 a) Montrer que A est inversible et factoriser par A pour se ramener à étudier A^{-1} et B .

b) Utiliser la théorie (exercice 6.1) et la théorie fondamentale (exercice 6.1) pour conclure.

1.27 a) 1) Utiliser la théorie (exercice 6.1) et la théorie fondamentale (exercice 6.1) pour conclure.

2) Supprimer $\text{tr}(S) \in \mathbb{S}_n^+$ et utiliser l'équité.

3) Travailler en cas \mathbb{R} et \mathbb{C} .

4) Compléter $a)$ et $b)$.

109

Corrigés des exercices

Tous les exercices sont corrigés de façon détaillée.

Énoncés des exercices

1.21 Exemple de tracé de courbe d'équation $y = f(x)$.
Tracer la courbe Γ d'équation $y = f(x)$, où $f(x) = \sqrt{x(x-6)}$.

1.22 Exemple de tracé d'une courbe donnée par une représentation paramétrique.
Tracer la courbe Γ de représentation paramétrique $\begin{cases} x(t) = t^2 - 1 \\ y(t) = 2t^3 + 3t^2 - 1 \end{cases}$.

1.23 Exemple de tracé d'une courbe donnée par une représentation paramétrique.
Tracer la courbe Γ de représentation paramétrique $\begin{cases} x(t) = \ln t \\ y(t) = \frac{t}{t-1} \end{cases}$.

1.24 Exemple de tracé de courbe d'équation $y = f(x)$.
Tracer la courbe Γ d'équation $y = f(x)$, où : $f(x) = \frac{x}{1+x^2}$.

1.25 Dérivées successives de Arctan : détermination de leurs zéros.
On considère l'application $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto f(x) = \text{Arctan } x$.
On fera intervenir les dérivées successives.
1) Montrer : pour tout $n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$, l'équation $f^{(n)}(x) = 0$, d'admettre $x \in \mathbb{R}$.

1.26 Lemme de Lebesgue pour une fonction de classe C^1 sur un segment.
Soient $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $a < b$, $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ de classe C^1 sur $[a, b]$.
Montrer :
$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^b f'(x) dx + f(b) - f(a)$$

1.27 Étude d'une fonction C^∞ ayant une infinité de zéros s'accumulant en 0.
Soit $f:]0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^∞ telle qu'il existe une suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ dans $]0, +\infty[$ telle que :
 $x_n \rightarrow 0$ et $(\forall n \in \mathbb{N}, f(x_n) = 0)$.
Montrer : $(\forall n \in \mathbb{N}, f^{(n)}(0) = 0)$.

1.28 Inégalité à deux variables réelles : faisant intervenir des logarithmes.
Montrer, pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ tel que $0 < x < y < \frac{x+y}{2}$:

279

Du mal à démarrer ?

Des conseils méthodologiques sont proposés pour bien aborder la résolution des exercices.

Corrigés des exercices

1.11 Les applications φ et ψ sont de classe C^1 sur $]-\frac{1}{2}, +\infty[$ et pour tout $x \in]-\frac{1}{2}, +\infty[$:

$\varphi(x) = 2x$, $\varphi'(x) = 2$ et $\psi(x) = 20x + 1$.

On se ramène à l'étude de la fonction f définie par $f(x) = \varphi(x) + \psi(x)$.

$f(x) = 22x + 1$ et $f'(x) = 22$.

On en déduit f par présentation, avec $f(0) = 1$ pour la parité de f .

$f(x) = 22x + 1$ et $f'(x) = 22$.

1.12 a) Les courbes C_1 et f sont tangentes en $(0, 1)$ et $(1, 1)$.
On vérifie que $f(0) = 1$ et $f'(0) = 1$.
On vérifie que $f(1) = 1$ et $f'(1) = 1$.

1.13 a) On a $L = A(1 - \sqrt{2}) = 24 - 8\sqrt{2}$.

1.14 a) On a $L = A(1 - \sqrt{2}) = 24 - 8\sqrt{2}$.

1.15 a) On a $L = A(1 - \sqrt{2}) = 24 - 8\sqrt{2}$.

1.16 a) On a $L = A(1 - \sqrt{2}) = 24 - 8\sqrt{2}$.

1.17 a) On a $L = A(1 - \sqrt{2}) = 24 - 8\sqrt{2}$.

1.18 a) On a $L = A(1 - \sqrt{2}) = 24 - 8\sqrt{2}$.

1.19 a) On a $L = A(1 - \sqrt{2}) = 24 - 8\sqrt{2}$.

1.20 a) On a $L = A(1 - \sqrt{2}) = 24 - 8\sqrt{2}$.

1.21 a) On a $L = A(1 - \sqrt{2}) = 24 - 8\sqrt{2}$.

1.22 a) On a $L = A(1 - \sqrt{2}) = 24 - 8\sqrt{2}$.

1.23 a) On a $L = A(1 - \sqrt{2}) = 24 - 8\sqrt{2}$.

1.24 a) On a $L = A(1 - \sqrt{2}) = 24 - 8\sqrt{2}$.

1.25 a) On a $L = A(1 - \sqrt{2}) = 24 - 8\sqrt{2}$.

1.26 a) On a $L = A(1 - \sqrt{2}) = 24 - 8\sqrt{2}$.

1.27 a) On a $L = A(1 - \sqrt{2}) = 24 - 8\sqrt{2}$.

1.28 a) On a $L = A(1 - \sqrt{2}) = 24 - 8\sqrt{2}$.

279

Remerciements

Nous tenons ici à exprimer notre gratitude aux nombreux collègues et amis qui ont accepté de réviser des parties du manuscrit :

Marc Albrecht, Bruno Arzac, Jean-Philippe Berne, Gérard Bourgin, Jean-Paul Christin, Sophie Cohéléach, Carine Courant, Cyril Haberer, Sylvain Delpéch, Hermin Durand, Viviane Gaggioli, Marguerite Gauthier, Hadrien Larôme, Paul Pichaureau, Nathalie Planche, Philippe Saadé, Marie-Dominique Siéfert, Marie-Pascale Thon, Audrey Verdier, Skander Zannad.

Plan

Les méthodes à retenir	2
Les énoncés des exercices	10
Du mal à démarrer ?	14
Les corrigés des exercices	16

K désigne
un corps commutatif

\mathbb{K} désigne \mathbb{R} ou \mathbb{C}

On abrège :
espace vectoriel en ev
sous-espace vectoriel en sev

Thèmes abordés dans les exercices

- Étude d'intersections, de sommes, de sommes directes de sev d'un ev
- Montrer qu'une famille, finie ou infinie, est libre, est liée
- Manipulation de projecteurs en dimension finie
- Obtention de factorisations de matrices
- Utilisation de décomposition en blocs pour des matrices
- Calculs sur des normes de matrices
- Étude de suites de matrices, de séries de matrices.

Points essentiels du cours pour la résolution des exercices

- Définition de famille libre, famille liée, famille génératrice, finie ou infinie
- Définition et propriétés des sommes de sev , des sommes directes de sev
- Théorème d'isomorphisme pour les applications linéaires, et, en dimension finie, théorème du rang
- Définition et propriétés des formes linéaires, des hyperplans
- Trace d'une matrice carrée : définition, propriétés, cas d'un projecteur en dimension finie
- Manipulation des blocs
- Définition d'une norme sur $M_{n,p}(\mathbb{K})$, pour $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou \mathbb{C} , norme d'algèbre, continuité des opérations.

Les méthodes à retenir

Méthode

Pour obtenir des relations (souvent des inclusions) entre sev

Essayer de passer par les éléments.

→ Exercice 1.1

Exemple

Soient E un K -ev, A, B, C des sev de E .
Montrer :

$$A + (B \cap C) \subset (A + B) \cap (A + C).$$

1^{re} méthode : utilisation de propriétés globales :

On a : $B \cap C \subset B$, donc : $A + (B \cap C) \subset A + B$,

et de même : $B \cap C \subset C$, donc : $A + (B \cap C) \subset A + C$.

Il en résulte : $A + (B \cap C) \subset (A + B) \cap (A + C)$.

2^è méthode : passage par les éléments :

Soit $x \in A + (B \cap C)$.

Il existe $a \in A$, $y \in B \cap C$ tels que : $x = a + y$.

Comme $a \in A$ et $y \in B$, on a : $x = a + y \in A + B$.

Comme $a \in A$ et $y \in C$, on a : $x = a + y \in A + C$.

D'où : $x \in (A + B) \cap (A + C)$.

Ceci montre l'inclusion demandée.

Méthode

Pour montrer que deux sev F, G d'un ev E sont supplémentaires dans E

Essayer de montrer :

- $F \cap G = \{0\}$ et $F + G = E$
- il existe une base \mathcal{F} de F et une base \mathcal{G} de G telles que la famille $\mathcal{F} \cup \mathcal{G}$, obtenue par juxtaposition de \mathcal{F} et \mathcal{G} , est une base de E
- l'une des deux égalités $F \cap G = \{0\}$, $F + G = E$ et l'égalité portant sur les dimensions : $\dim(E) = \dim(F) + \dim(G)$, si E est de dimension finie.

Exemple

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

On note $\mathbf{S}_n(\mathbb{R})$ (resp. $\mathbf{A}_n(\mathbb{R})$) l'ensemble des matrices symétriques (resp. anti-symétriques) de $\mathbf{M}_n(\mathbb{R})$.

Montrer que $\mathbf{S}_n(\mathbb{R})$ et $\mathbf{A}_n(\mathbb{R})$ sont des sev de $\mathbf{M}_n(\mathbb{R})$ supplémentaires dans $\mathbf{M}_n(\mathbb{R})$.

1) Montrons d'abord que $\mathbf{S}_n(\mathbb{R})$ et $\mathbf{A}_n(\mathbb{R})$ sont des sev de $\mathbf{M}_n(\mathbb{R})$.

★ On a : $\mathbf{S}_n(\mathbb{R}) \subset \mathbf{M}_n(\mathbb{R})$ et $0 \in \mathbf{S}_n(\mathbb{R})$.

On a, pour tous $\alpha \in \mathbb{R}$, $A, B \in \mathbf{S}_n(\mathbb{R})$:

$${}^t(\alpha A + B) = \alpha {}^t A + {}^t B = \alpha A + B,$$

donc : $\alpha A + B \in \mathbf{S}_n(\mathbb{R})$.

Ceci montre que $\mathbf{S}_n(\mathbb{R})$ est un sev de $\mathbf{M}_n(\mathbb{R})$.

★ On a : $\mathbf{A}_n(\mathbb{R}) \subset \mathbf{M}_n(\mathbb{R})$ et $0 \in \mathbf{A}_n(\mathbb{R})$.

On a, pour tous $\alpha \in \mathbb{R}$, $A, B \in \mathbf{A}_n(\mathbb{R})$:

$${}^t(\alpha A + B) = \alpha {}^t A + {}^t B = \alpha(-A) + (-B) = -(\alpha A + B),$$

donc : $\alpha A + B \in \mathbf{A}_n(\mathbb{R})$.

Ceci montre que $\mathbf{A}_n(\mathbb{R})$ est un sev de $\mathbf{M}_n(\mathbb{R})$.

2) * L'inclusion $\{0\} \subset \mathbf{S}_n(\mathbb{R}) \cap \mathbf{A}_n(\mathbb{R})$ est évidente.

* Soit $A \in \mathbf{S}_n(\mathbb{R}) \cap \mathbf{A}_n(\mathbb{R})$.

On a alors : ${}^tA = A$ et ${}^tA = -A$,

donc $A = -A$, $2A = 0$, puis $\frac{1}{2}2A = 0$, $A = 0$.

Ceci montre : $\mathbf{S}_n(\mathbb{R}) \cap \mathbf{A}_n(\mathbb{R}) \subset \{0\}$.

On obtient : $\mathbf{S}_n(\mathbb{R}) \cap \mathbf{A}_n(\mathbb{R}) = \{0\}$.

3) * L'inclusion $\mathbf{S}_n(\mathbb{R}) + \mathbf{A}_n(\mathbb{R}) \subset \mathbf{M}_n(\mathbb{R})$ est évidente.

* Soit $M \in \mathbf{M}_n(\mathbb{R})$.

Montrons qu'il existe $S \in \mathbf{S}_n(\mathbb{R})$, $A \in \mathbf{A}_n(\mathbb{R})$ telles que : $M = S + A$.

Raisonnons par analyse-synthèse.

Analyse :

Soient $S \in \mathbf{S}_n(\mathbb{R})$, $A \in \mathbf{A}_n(\mathbb{R})$ telles que $M = S + A$.

On a alors, en transposant : ${}^tM = {}^t(S + A) = {}^tS + {}^tA = S - A$.

On déduit, par addition, soustraction, multiplication par $\frac{1}{2}$:

$$S = \frac{1}{2}(M + {}^tM), \quad A = \frac{1}{2}(M - {}^tM).$$

Synthèse :

Notons $S = \frac{1}{2}(M + {}^tM)$, $A = \frac{1}{2}(M - {}^tM)$.

On a alors :

$${}^tS = \frac{1}{2}({}^tM + M) = S, \text{ donc } S \in \mathbf{S}_n(\mathbb{R})$$

$${}^tA = \frac{1}{2}({}^tM - M) = -A, \text{ donc } A \in \mathbf{A}_n(\mathbb{R})$$

$$S + A = \frac{1}{2}M + \frac{1}{2}{}^tM + \frac{1}{2}M - \frac{1}{2}{}^tM = M, \quad \text{donc } (S, A) \text{ convient.}$$

Ceci montre : $\mathbf{S}_n(\mathbb{R}) + \mathbf{A}_n(\mathbb{R}) = \mathbf{M}_n(\mathbb{R})$.

Finalement, $\mathbf{S}_n(\mathbb{R})$ et $\mathbf{A}_n(\mathbb{R})$ sont des sev de $\mathbf{M}_n(\mathbb{R})$ supplémentaires dans $\mathbf{M}_n(\mathbb{R})$.

Exemple

Dans $E = \mathbb{R}^4$ usuel, on note :

$$a = (1, 1, 1, 1),$$

$$b = (1, 2, 3, 0),$$

$$c = (1, -1, 1, 4),$$

$$d = (1, 2, -3, 0),$$

$$F = \text{Vect}(a, b), \quad G = \text{Vect}(c, d).$$

Montrer que F et G sont supplémentaires dans E .

Il est clair que la famille (a, b) est libre et que la famille (c, d) est libre, donc $\mathcal{F} = (a, b)$ est une base de F et $\mathcal{G} = (c, d)$ est une base de G .

Montrons que la famille $\mathcal{F} \cup \mathcal{G} = (a, b, c, d)$ est une base de E .

Comme : $\text{Card}(\mathcal{F} \cup \mathcal{G}) = 4 = \dim(E)$,

il suffit de montrer que la famille $\mathcal{F} \cup \mathcal{G}$ est libre.

On a, pour tout $(\alpha, \beta, \gamma, \delta) \in \mathbb{R}^4$:

$$\alpha a + \beta b + \gamma c + \delta d = 0 \iff \begin{cases} \alpha + \beta + \gamma + \delta = 0 \\ \alpha + 2\beta - \gamma + 2\delta = 0 \\ \alpha + 3\beta + \gamma - 3\delta = 0 \\ \alpha + 4\gamma = 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} \alpha = -4\gamma \\ \beta - 3\gamma + \delta = 0 \\ 2\beta - 5\gamma + 2\delta = 0 \\ 3\beta - 3\gamma - 3\delta = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} \alpha = -4\gamma \\ \beta = \gamma + \delta \\ -2\gamma + 2\delta = 0 \\ -3\gamma + 4\delta = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} \gamma = 0 \\ \delta = 0 \\ \alpha = 0 \\ \beta = 0. \end{cases}$$

Ceci montre que la famille $\mathcal{F} \cup \mathcal{G}$ est libre, et on déduit que c'est une base de E .

Remarque : on aurait aussi pu faire intervenir un calcul de déterminant.

Finalement, les sev F et G de E sont supplémentaires dans E .

Exemple

Soient E un K -ev de dimension 5, F, G des sev de E tels que :
 $F \cap G = \{0\}$, $\dim(F) = 2$, $\dim(G) = 3$.
 Montrer que F et G sont supplémentaires dans E .

On a, d'après la formule de Grassmann :
 $\dim(F+G) = \dim(F) + \dim(G) - \dim(F \cap G) = 2 + 3 - 0 = 5 = \dim(E)$,
 d'où : $F + G = E$.
 Comme : $F \cap G = \{0\}$ et $F + G = E$,
 on conclut que F et G sont supplémentaires dans E .

Méthode

Pour montrer que plusieurs sev E_1, \dots, E_N d'un ev E sont en somme directe

Essayer de montrer :

- pour tout $(x_1, \dots, x_N) \in E_1 \times \dots \times E_N$:

$$\sum_{i=1}^N x_i = 0 \implies (\forall i \in \{1, \dots, N\}, x_i = 0)$$
- $\dim\left(\sum_{i=1}^N E_i\right) = \sum_{i=1}^N \dim(E_i)$
 si E_1, \dots, E_N sont tous de dimensions finies.

Exemple

On note E le \mathbb{R} -ev des applications de \mathbb{R} dans \mathbb{R} , F_1, F_2, F_3 les parties de E constituées des applications qui s'annulent respectivement sur $] -\infty; 1]$, $] -\infty; -1] \cup [1; +\infty[$, $[-1; +\infty[$.
 Montrer que F_1, F_2, F_3 sont des sev de E et que leur somme est directe.

★ Montrons, plus généralement, que, pour toute partie A de \mathbb{R} , l'ensemble $F = \{f \in E; \forall x \in A, f(x) = 0\}$ est un sev de E .
 On a : $F \subset E$ et $0 \in F$.
 Soient $\alpha \in \mathbb{R}, f, g \in F$.
 On a : $\forall x \in A, (\alpha f + g)(x) = \underbrace{\alpha f(x)}_{=0} + \underbrace{g(x)}_{=0} = 0$, donc : $\alpha f + g \in F$.
 Ceci montre que F est un sev de E .
 En particulier, F_1, F_2, F_3 sont des sev de E .
 ★ Soient $f_1 \in F_1, f_2 \in F_2, f_3 \in F_3$ telles que : $f_1 + f_2 + f_3 = 0$.
 Soit $x \in] -\infty; -1]$.
 Par définition de F_1 et F_2 , on a : $f_1(x) = 0$ et $f_2(x) = 0$.
 Il s'ensuit : $f_3(x) = -(f_1(x) + f_2(x)) = 0$.
 Ainsi : $\forall x \in] -\infty; -1], f_3(x) = 0$.
 Mais, par définition de F_3 : $\forall x \in [-1; +\infty[, f_3(x) = 0$.
 On déduit : $\forall x \in \mathbb{R}, f_3(x) = 0$, c'est-à-dire $f_3 = 0$.
 On obtient de même : $f_1 = 0$ et $f_2 = 0$.
 On conclut que les sev F_1, F_2, F_3 sont en somme directe.

Méthode

Pour montrer qu'une famille infinie est libre

Montrer que toute sous-famille finie est libre

→ Exercices 1.2, 1.4, 1.7

Exemple

Montrer que la famille d'applications $(f_a)_{a \in \mathbb{R}}$ définie, pour tout $a \in \mathbb{R}$, par :

$$f_a : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq a \\ 1 & \text{si } x > a \end{cases}$$

est libre (pour les lois usuelles).

Nous allons montrer que toute sous-famille finie (de cette famille infinie) est libre.

Soient $N \in \mathbb{N}^*$, $a_1, \dots, a_N \in \mathbb{R}$ deux à deux distincts, $\lambda_1, \dots, \lambda_N \in \mathbb{R}$

tels que :

$$\sum_{k=1}^N \lambda_k f_{a_k} = 0.$$

Soit $i \in \{1, \dots, N\}$. Supposons $\lambda_i \neq 0$.

On déduit alors :

$$f_{a_i} = -\frac{1}{\lambda_i} \sum_{k \neq i} \lambda_k f_{a_k}.$$

On remarque que, pour tout $a \in \mathbb{R}$, f_a est continue en tout point de $\mathbb{R} - \{a\}$ et que f_a est discontinue en a .

Par combinaison linéaire, $-\frac{1}{\lambda_i} \sum_{k \neq i} \lambda_k f_{a_k}$ est donc continue en a_i ,

contradiction avec f_{a_i} discontinue en a_i .

Ceci montre : $\forall i \in \{1, \dots, N\}, \lambda_i = 0$,

donc la famille $(f_{a_i})_{1 \leq i \leq N}$ est libre.

Ainsi, toute sous-famille finie de $(f_a)_{a \in \mathbb{R}}$ est libre, donc, par définition, la famille $(f_a)_{a \in \mathbb{R}}$ est libre.

Méthode

Pour montrer qu'une famille infinie est liée

Montrer qu'il existe une sous-famille finie liée.

→ Exercices 1.2

Exemple

Montrer que la famille d'applications $(f_a)_{a \in \mathbb{R}}$ définie, pour tout $a \in \mathbb{R}$, par :

$$f_a : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto \cos(x + a)$$

est liée.

On remarque, pour tout $a \in \mathbb{R}$:

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f_a(x) = \cos(x + a) = \cos a \cos x - \sin a \sin x,$$

donc :

$$f_a = (\cos a) \cos + (-\sin a) \sin.$$

Ainsi, les f_a se décomposent linéairement sur les deux applications \cos et \sin .

En particulier, les trois applications f_0, f_1, f_2 se décomposent linéairement sur les deux applications \cos, \sin , donc la famille (f_0, f_1, f_2) est liée.

Ainsi, il existe une sous-famille finie de $(f_a)_{a \in \mathbb{R}}$ qui est liée et on conclut, par définition, que la famille $(f_a)_{a \in \mathbb{R}}$ est liée.

Méthode

Pour montrer qu'une partie H de E est un hyperplan de E

Essayer de :

- montrer que H est un sev de E et que H admet au moins un supplémentaire de dimension finie égale à 1
- montrer que H est le noyau d'une forme linéaire autre que la forme nulle
- montrer que H est un sev de E et que $\dim(H) = \dim(E) - 1$, si E est de dimension finie.

Exemple

Montrer que l'ensemble H des suites réelles convergeant vers 0 est un hyperplan du \mathbb{R} -ev E des suites réelles convergentes.

D'abord, il est clair que E est bien un \mathbb{R} -ev et que H est un sev de E . Notons D la droite vectorielle de E engendrée par la suite (1), suite constante égale à 1.

★ On a $H \cap D = \{0\}$, car, si une suite est constante et converge vers 0, alors elle est constante égale à 0.

★ Soit $u = (u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in E$. Notons ℓ la limite de u , et $v = u - (\ell)$.

On a alors : $u = v + (\ell)$, $v \in H$, $(\ell) \in D$.

Ceci montre : $H + D = E$.

Ainsi, la droite vectorielle D est un supplémentaire de H dans E , donc H est un hyperplan de E .

Exemple

Montrer que l'ensemble

$$H = \left\{ f \in E; \int_0^{1/2} f = 0 \right\}$$

est un hyperplan du \mathbb{R} -ev

$$E = C([0; 1], \mathbb{R}).$$

Il est clair que l'application $\varphi : E \rightarrow \mathbb{R}, f \mapsto \int_0^{1/2} f$ est une forme linéaire sur E , autre que la forme nulle puisque :

$$\varphi(1) = \int_0^{1/2} 1 = \frac{1}{2} \neq 0.$$

D'après le cours, on conclut que $H = \text{Ker}(\varphi)$ est un hyperplan de E .

Exemple

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

Montrer que $H = \mathbb{C}_{n-1}[X]$ est un hyperplan de $E = \mathbb{C}_n[X]$.

Il est clair que E est un \mathbb{C} -ev, que H est un sev de E et que :

$$\dim(E) = n + 1, \quad \dim(H) = n.$$

On a donc : $\dim(H) = \dim(E) - 1$

et on conclut que H est un hyperplan de E .

Méthode

Pour étudier un ou des projecteurs en dimension finie

Se rappeler que, pour un projecteur en dimension finie, la trace est égale au rang. La trace, qui est linéaire, pourra être manipulée en liaison avec une sommation. Le rang, qui est un entier naturel, est ≥ 0 .

→ Exercices 1.10, 1.24

Exemple

Soient $N \in \mathbb{N}^*$, E un \mathbb{K} -ev de dimension finie, p_1, \dots, p_N des projecteurs de E tels

que :
$$\sum_{i=1}^N p_i = 0.$$

Montrer : $\forall i \in \{1, \dots, N\}, p_i = 0.$

Pour tout $i \in \{1, \dots, N\}$, comme E est de dimension finie et que p_i est un projecteur de E , on a : $\text{tr}(p_i) = \text{rg}(p_i).$

D'où :
$$0 = \text{tr} \left(\sum_{i=1}^N p_i \right) = \sum_{i=1}^N \text{tr}(p_i) = \sum_{i=1}^N \underbrace{\text{rg}(p_i)}_{\geq 0}.$$

Il en résulte : $\forall i \in \{1, \dots, N\}, \text{rg}(p_i) = 0$

et on conclut : $\forall i \in \{1, \dots, N\}, p_i = 0.$

Méthode

Pour obtenir une factorisation d'une matrice en deux matrices de formats ou de rangs imposés

Essayer d'utiliser le théorème du cours caractérisant les matrices A de $\mathbf{M}_{n,p}(K)$ telles que $\text{rg}(A) = r$:

il existe $P \in \mathbf{GL}_n(K), Q \in \mathbf{GL}_p(K)$ telles que $A = PJ_{n,p,r}Q$, où on a noté $J_{n,p,r} = \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbf{M}_{n,p}(K).$

→ Exercices 1.3, 1.11, 1.21

Exemple

Soient $n, p, q, r \in \mathbb{N}^*, A \in \mathbf{M}_{p,q}(K), B \in \mathbf{M}_{n,r}(K).$

Montrer que les deux propriétés suivantes sont équivalentes :

(i) $\text{rg}(B) \leq \text{rg}(A)$

(ii) $\exists (P, Q) \in \mathbf{M}_{n,p}(K) \times \mathbf{M}_{q,r}(K),$
 $B = PAQ.$

(i) \implies (ii) :

Supposons $\text{rg}(B) \leq \text{rg}(A)$. Notons $a = \text{rg}(A), b = \text{rg}(B).$

D'après le cours, il existe $R \in \mathbf{GL}_p(K), S \in \mathbf{GL}_q(K)$ telles que $A = RJ_{p,q,a}S$ et il existe $T \in \mathbf{GL}_n(K), U \in \mathbf{GL}_r(K)$ telles que $B = TJ_{n,r,b}U.$

Comme $b \leq a$, on a :

$$J_{n,r,b} = \begin{pmatrix} I_b & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_b & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_a & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_b & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = J_{n,p,b}J_{p,q,a}J_{q,r,b}.$$

D'où :

$$\begin{aligned} B &= TJ_{n,r,b}U = TJ_{n,p,b}J_{p,q,a}J_{q,r,b}U \\ &= (TJ_{n,p,b}R^{-1})(RJ_{p,q,a}S)(S^{-1}J_{q,r,b}U). \end{aligned}$$

En notant

$$P = TJ_{n,p,b}R^{-1} \in \mathbf{M}_{n,p}(K) \text{ et } Q = S^{-1}J_{q,r,b}U \in \mathbf{M}_{q,r}(K),$$

on obtient bien : $B = PAQ.$

(ii) \implies (i) :

S'il existe $(P, Q) \in \mathbf{M}_{n,p}(K) \times \mathbf{M}_{q,r}(K)$ tel que $B = PAQ$, alors :

$$\text{rg}(B) = \text{rg}((PA)Q) \leq \text{rg}(PA) \leq \text{rg}(A).$$

Méthode

Pour manipuler des matrices décomposées en blocs

Essayer d'amener des combinaisons linéaires, des produits de matrices décomposées en blocs.

⇒ Exercices 1.6, 1.12, 1.14, 1.16 à 1.20, 1.22

Exemple

Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $A, B, C, D \in \mathbf{M}_n(K)$, $(\alpha, \beta) \in K^2$ tel que $\alpha \neq \beta$.

On note :

$$J = \begin{pmatrix} \alpha I_n & 0 \\ 0 & \beta I_n \end{pmatrix}, \quad M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}.$$

Montrer que M commute avec J si et seulement si : $B = 0$ et $C = 0$.

On a :

$$\begin{aligned} JM = MJ &\iff \begin{pmatrix} \alpha I_n & 0 \\ 0 & \beta I_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha I_n & 0 \\ 0 & \beta I_n \end{pmatrix} \\ &\iff \begin{pmatrix} \alpha A & \alpha B \\ \beta C & \beta D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha A & \beta B \\ \alpha C & \beta D \end{pmatrix} \\ &\iff \begin{cases} \alpha B = \beta B \\ \beta C = \alpha C \end{cases} \iff \begin{cases} (\alpha - \beta)B = 0 \\ (\alpha - \beta)C = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} B = 0 \\ C = 0. \end{cases} \end{aligned}$$

Exemple

Soient E un K -ev de dimension finie et F un sev de E . On note $n = \dim(E)$ et $p = \dim(F)$.

a) Montrer que l'ensemble $\mathcal{L}_F(E)$ des endomorphismes de E laissant F stable est un sev de $\mathcal{L}(E)$ et déterminer sa dimension.

Se peut-il que $\mathcal{L}_F(E)$ soit un hyperplan de $\mathcal{L}(E)$?

b) Soit G un supplémentaire de F dans E .

Montrer que l'ensemble $\mathcal{L}_{F,G}(E)$ des endomorphismes de E laissant F et G stables est un sev de $\mathcal{L}(E)$ et déterminer sa dimension.

Se peut-il que $\mathcal{L}_{F,G}(E)$ soit un hyperplan de $\mathcal{L}(E)$?

a) 1) * Il est clair que : $\mathcal{L}_F(E) \subset \mathcal{L}(E)$ et $0 \in \mathcal{L}_F(E)$.

* Soient $\alpha \in E$, $f, g \in \mathcal{L}_F(E)$.

$$\text{On a : } \forall x \in F, (\alpha f + g)(x) = \underbrace{\alpha f(x)}_{\in F} + \underbrace{g(x)}_{\in F} \in F,$$

donc F est stable par $\alpha f + g$, d'où : $\alpha f + g \in \mathcal{L}_F(E)$.

On conclut : $\mathcal{L}_F(E)$ est un sev de $\mathcal{L}(E)$.

2) L'ev E admet au moins une base $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ adaptée à F , c'est-à-dire telle que (e_1, \dots, e_p) est une base de F .

Soient $f \in \mathcal{L}(E)$, $M = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(f)$.

Il est clair que F est stable par f si et seulement si M est de la forme :

$$M = \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & C \end{pmatrix},$$

où $A \in \mathbf{M}_p(K)$, $B \in \mathbf{M}_{p,n-p}(K)$, $C \in \mathbf{M}_{n-p}(K)$.

L'application de $\mathbf{M}_p(K) \times \mathbf{M}_{p,n-p}(K) \times \mathbf{M}_{n-p}(K)$ dans $\mathcal{L}_F(E)$ qui, à (A, B, C) associe l'endomorphisme f de E tel que :

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & C \end{pmatrix},$$

est un isomorphisme d'ev, donc :

$$\begin{aligned} \dim(\mathcal{L}_F(E)) &= \dim(\mathbf{M}_p(K) \times \mathbf{M}_{p,n-p}(K) \times \mathbf{M}_{n-p}(K)) \\ &= \dim(\mathbf{M}_p(K)) + \dim(\mathbf{M}_{p,n-p}(K)) + \dim(\mathbf{M}_{n-p}(K)) \\ &= p^2 + p(n-p) + (n-p)^2 = n^2 - np + p^2. \end{aligned}$$

3) Le sev $\mathcal{L}_F(E)$ est un hyperplan de $\mathcal{L}(E)$ si et seulement si :

$$\dim(\mathcal{L}_F(E)) = \dim(\mathcal{L}(E)) - 1. \quad (*)$$

On a : $(*) \iff n^2 - np + p^2 = n^2 - 1 \iff np - p^2 = 1$

$$\iff \underbrace{p}_{\in \mathbb{N}} \underbrace{(n-p)}_{\in \mathbb{N}} = 1 \iff \begin{cases} p = 1 \\ n - p = 1 \end{cases} \iff \begin{cases} n = 2 \\ p = 1. \end{cases}$$

On conclut qu'il se peut que $\mathcal{L}_F(E)$ soit un hyperplan de $\mathcal{L}(E)$, et ceci se produit si et seulement si : $n = 2$ et $p = 1$.

b) 1) Le même raisonnement qu'en a)1) montre que $\mathcal{L}_{F,G}(E)$ est un sev de $\mathcal{L}(E)$.

On peut aussi remarquer que $\mathcal{L}_{F,G}(E) = \mathcal{L}_F(E) \cap \mathcal{L}_G(E)$, donc $\mathcal{L}_{F,G}(E)$ est un sev de $\mathcal{L}(E)$ comme intersection de deux sev.

2) L'ev E admet au moins une base $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ adaptée à la décomposition $E = F \oplus G$, c'est-à-dire que (e_1, \dots, e_p) est une base de F et (e_{p+1}, \dots, e_n) est une base de G .

Soient $f \in \mathcal{L}(E)$, $M = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(f)$.

Il est clair que F et G sont stables par f si et seulement si M est de la forme :

$$M = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & C \end{pmatrix},$$

où $A \in \mathbf{M}_p(K)$, $C \in \mathbf{M}_{n-p}(K)$.

L'application de $\mathbf{M}_p(K) \times \mathbf{M}_{n-p}(K)$ dans $\mathcal{L}_{F,G}(E)$ qui, à (A, C) associe l'endomorphisme f de E tel que :

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & C \end{pmatrix},$$

est un isomorphisme d'ev, donc :

$$\begin{aligned} \dim(\mathcal{L}_{F,G}(E)) &= \dim(\mathbf{M}_p(K) \times \mathbf{M}_{n-p}(K)) \\ &= \dim(\mathbf{M}_p(K)) + \dim(\mathbf{M}_{n-p}(K)) = p^2 + (n-p)^2 \\ &= n^2 - 2np + 2p^2. \end{aligned}$$

3) On a : $\dim(\mathcal{L}_{F,G}(E)) = \dim(\mathcal{L}(E)) - 1$

$$\iff n^2 - 2np + 2p^2 = n^2 - 1 \iff 2(np - p^2) = 1,$$

ce qui est impossible car le premier membre est pair et le second est impair.

On conclut que $\mathcal{L}_{F,G}(E)$ n'est jamais un hyperplan de $\mathcal{L}(E)$.

Énoncés des exercices

1.1 Une formule sur somme et intersection de sev

Soient E un K -ev, A, B, C des sev de E .
Montrer : $A + (B \cap (A + C)) = A + (C \cap (A + B))$.

1.2 Famille infinie libre, famille infinie liée

Étudier la liberté des familles d'applications suivantes, pour les lois usuelles :

- a) $(f_a : [0; +\infty[\rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \frac{1}{x+a})_{a \in]0; +\infty[}$
 b) $(f_a : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \operatorname{ch}(x-a))_{a \in \mathbb{R}}$.

1.3 Étude de l'existence d'une factorisation d'une matrice

Existe-t-il $A \in \mathbf{M}_{3,2}(\mathbb{R})$ et $B \in \mathbf{M}_{2,3}(\mathbb{R})$ telles que $AB = C$, où C désigne successivement les matrices : $C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$?

1.4 Famille des évaluations sur un ensemble fini

Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $X = \{x_1, \dots, x_n\}$ un ensemble fini à n éléments. On note $F = K^X$ et, pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$, on note $E_i : F \rightarrow K, f \mapsto f(x_i)$, appelée *évaluation* en x_i .
Montrer que la famille $(E_i)_{1 \leq i \leq n}$ est une base de F^* .

1.5 Utilisation de la trace

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Existe-t-il $(A, B) \in (\mathbf{M}_n(\mathbb{C}))^2$ tel que : $AB - BA = I_n$?

1.6 Étude d'inverse pour une matrice triangulaire par blocs

Soient $n, p \in \mathbb{N}^*$, $M = \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & C \end{pmatrix}$ où $A \in \mathbf{M}_n(K), B \in \mathbf{M}_{n,p}(K), C \in \mathbf{M}_p(K)$.

- a) Montrer que M est inversible si et seulement si A et C sont inversibles.
 b) Lorsque A et C sont inversibles, exprimer M^{-1} sous forme de blocs.

1.7 Exemple de famille infinie libre

Montrer que la famille $(f_a : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto |x-a|^{3/2})_{a \in \mathbb{R}}$ est libre dans $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$.

1.8 Base de polynômes avec conditions sur les degrés

Soit E un sev de dimension finie de $K[X]$.

- a) Montrer que E admet au moins une base formée de polynômes de degrés deux à deux distincts.
 b) Montrer que E admet au moins une base formée de polynômes de degrés tous égaux.



1.9 Formes linéaires et trace

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que, pour toute $A \in \mathbf{M}_n(K)$, l'application :

$$\mathbf{M}_n(K) \longrightarrow K, \quad X \longmapsto \operatorname{tr}(AX)$$

est un élément de $\mathbf{M}_n(K)^*$, puis montrer que l'application $\theta : \mathbf{M}_n(K) \longrightarrow \mathbf{M}_n(K)^*$ définie par :

$$\forall A \in \mathbf{M}_n(K), \forall X \in \mathbf{M}_n(K), \quad (\theta(A))(X) = \operatorname{tr}(AX)$$

est un isomorphisme de K -ev.



1.10 Projecteurs et coefficients irrationnels

Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $A, B, C \in \mathbf{M}_n(\mathbb{C})$ telles que : $A^2 = A$, $B^2 = B$, $C^2 = C$.

On note $M = A + \sqrt{2}B + \sqrt{3}C$ et on suppose $M^2 = M$. Montrer : $B = C = 0$.



1.11 Factorisation d'une matrice

Soient $n, p \in \mathbb{N}^*$, $A \in \mathbf{M}_{n,p}(K)$, $r = \operatorname{rg}(A)$.

Montrer : $\exists U \in \mathbf{M}_{n,r}(K)$, $\exists V \in \mathbf{M}_{r,p}(K)$, $A = UV$.



1.12 Rang d'une matrice décomposée en blocs

a) 1) Montrer que, si une matrice M est décomposée en blocs de colonnes, $M = (U \mid V)$, alors :

$$\operatorname{rg}(M) \leq \operatorname{rg}(U) + \operatorname{rg}(V).$$

2) Montrer que, si une matrice M est décomposée en blocs de lignes, $M = \begin{pmatrix} R \\ S \end{pmatrix}$, alors :

$$\operatorname{rg}(M) \leq \operatorname{rg}(R) + \operatorname{rg}(S).$$

3) En déduire que, si une matrice M est décomposée en quatre blocs $M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$, (où A et D ne sont pas nécessairement carrées), alors :

$$\operatorname{rg}(M) \leq \operatorname{rg}(A) + \operatorname{rg}(B) + \operatorname{rg}(C) + \operatorname{rg}(D).$$

b) Soient $m, n, p \in \mathbb{N}^*$ tel que $m \leq n$ et $p \leq n$, $M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & 0 \end{pmatrix} \in \mathbf{M}_n(K)$, où

$A \in \mathbf{M}_{m,p}(K)$, $B \in \mathbf{M}_{m,n-p}(K)$, $C \in \mathbf{M}_{n-m,p}(K)$.

Déduire de a) que, si M est inversible, alors : $\operatorname{rg}(A) \geq m + p - n$.



1.13 Normes subordonnées à $\|\cdot\|_1$ et à $\|\cdot\|_\infty$

Soient $n, p \in \mathbb{N}^*$, $A = (a_{ij})_{ij} \in \mathbf{M}_{n,p}(\mathbb{K})$.

On note : $\|A\|_\ell = \operatorname{Max}_{1 \leq j \leq p} \left(\sum_{i=1}^n |a_{ij}| \right)$, $\|A\|_c = \operatorname{Max}_{1 \leq i \leq n} \left(\sum_{j=1}^p |a_{ij}| \right)$,

et, pour tout $X = (x_j)_{1 \leq j \leq p} \in \mathbf{M}_{p,1}(\mathbb{K})$: $\|X\|_1 = \sum_{j=1}^p |x_j|$, $\|X\|_\infty = \operatorname{Max}_{1 \leq j \leq p} |x_j|$.

Montrer : $\|A\|_\ell = \operatorname{Sup}_{X \in \mathbf{M}_{p,1}(\mathbb{K}) - \{0\}} \frac{\|AX\|_1}{\|X\|_1}$, $\|A\|_c = \operatorname{Sup}_{X \in \mathbf{M}_{p,1}(\mathbb{K}) - \{0\}} \frac{\|AX\|_\infty}{\|X\|_\infty}$.



1.14 Endomorphismes d'image et de noyau imposés

Soient E un K -ev, F, G deux sev de E supplémentaires dans E .

On note : $\mathcal{G} = \{f \in \mathcal{L}(E) ; \text{Im}(f) = F \text{ et } \text{Ker}(f) = G\}$.

a) Établir que \mathcal{G} est un groupe pour la loi \circ .

b) On suppose ici que E est de dimension finie. On note $n = \dim(E)$, $p = \dim(F)$, $\mathcal{B}_1 = (e_1, \dots, e_p)$ une base de F , $\mathcal{B}_2 = (e_{p+1}, \dots, e_n)$ une base de G , $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$, qui est une base de E .

Montrer que l'application $\theta : f \mapsto \text{Mat}_{\mathcal{B}}(f)$ est un isomorphisme de groupes de (\mathcal{G}, \circ) sur (H, \cdot) , où $H = \left\{ \begin{pmatrix} M & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbf{M}_n(K) ; M \in \mathbf{GL}_p(K) \right\}$.



1.15 Hyperplans de $\mathbf{M}_n(K)$ rencontrant $\mathbf{GL}_n(K)$

Soit $n \in \mathbb{N} - \{0, 1\}$. Montrer que tout hyperplan de $\mathbf{M}_n(K)$ rencontre $\mathbf{GL}_n(K)$.



1.16 Rang d'une matrice triangulaire par blocs, un bloc diagonal étant égal à l'identité

a) Soient $n, p \in \mathbb{N}^*$, $B \in \mathbf{M}_{n,p}(K)$, $C \in \mathbf{M}_p(K)$. Montrer: $\text{rg} \begin{pmatrix} I_n & B \\ 0 & C \end{pmatrix} = n + \text{rg}(C)$.

b) Soient $n, p \in \mathbb{N}^*$, $R \in \mathbf{M}_{n,p}(K)$, $S \in \mathbf{M}_{p,n}(K)$. Montrer :

$$p + \text{rg}(I_n + RS) = n + \text{rg}(I_p + SR)$$



1.17 Rang d'une matrice diagonale par blocs

a) Soient $n, p \in \mathbb{N}^*$, $A \in \mathbf{M}_n(K)$, $B \in \mathbf{M}_p(K)$. Montrer : $\text{rg} \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix} = \text{rg}(A) + \text{rg}(B)$.

b) Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $A, B \in \mathbf{M}_n(\mathbb{K})$. Montrer que, si $\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & A \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} B & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}$ sont équivalentes, alors A et B sont équivalentes.

c) Soient $n, p \in \mathbb{N}^*$, $A, B \in \mathbf{M}_n(K)$, $U, V \in \mathbf{M}_p(K)$. Montrer que, si A et B sont équivalentes et si $\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & U \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} B & 0 \\ 0 & V \end{pmatrix}$ sont équivalentes, alors U et V sont équivalentes.



1.18 Déformation d'un endomorphisme, pour une image et un noyau imposés

Soient E un K -ev de dimension finie, $f \in \mathcal{L}(E)$, F un sev de E tel que $\dim(F) \leq \text{rg}(f)$, G un supplémentaire de F dans E .

Montrer qu'il existe $(u, v) \in (\mathcal{L}(E))^2$ tel que :

$$\text{Im}(u \circ f \circ v) = F \quad \text{et} \quad \text{Ker}(u \circ f \circ v) = G.$$



1.19 Caractérisation de matrices inversibles par blocs

Soient $M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$, où $A \in \mathbf{GL}_n(K)$, $B \in \mathbf{M}_{n,p}(K)$, $C \in \mathbf{M}_{p,n}(K)$, $D \in \mathbf{M}_p(K)$.

Montrer que M est inversible si et seulement si $D - CA^{-1}B$ est inversible, et calculer alors M^{-1} sous forme de matrice décomposée en blocs.

**1.20 Étude des matrices X telles que $AXB = 0$**

Soient $m, n, p, q \in \mathbb{N}^*$, $A \in \mathbf{M}_{m,n}(K)$, $B \in \mathbf{M}_{p,q}(K)$.

On note : $E = \{X \in \mathbf{M}_{n,p}(K); AXB = 0\}$.

Montrer que E est un K -ev et déterminer sa dimension.

**1.21 Factorisation d'une matrice carrée non inversible**

Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $A \in \mathbf{M}_n(K)$ non inversible.

Montrer qu'il existe $B, C \in \mathbf{M}_n(K)$ telles que :

$$A = BC, \quad B \text{ est inversible, } C \text{ est nilpotente.}$$

**1.22 Étude de rang pour une matrice par blocs**

Soient $n, p \in \mathbb{N}^*$, $M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$

où $A \in \mathbf{GL}_n(K)$, $B \in \mathbf{M}_{n,p}(K)$, $C \in \mathbf{M}_{p,n}(K)$, $D \in \mathbf{M}_p(K)$.

Montrer : $\text{rg}(M) = n \iff D = CA^{-1}B$.

À cet effet, on pourra utiliser le résultat de l'exercice 1.19.

**1.23 Réunion de plusieurs sev**

Soient K un corps commutatif infini, E un K -ev, $p \in \mathbb{N}^*$, F_1, \dots, F_p des sev de E tels que $\bigcup_{i=1}^p F_i = E$. Démontrer qu'il existe $i \in \{1, \dots, p\}$ tel que $F_i = E$.

**1.24 Projecteur associé à un sous-groupe fini de $\mathcal{GL}(E)$**

Soient E un \mathbb{K} -ev de dimension finie, $e = \text{Id}_E$, G un sous-groupe fini de $\mathcal{GL}(E)$, $n = \text{Card}(G)$. On note : $p = \frac{1}{n} \sum_{g \in G} g$.

a) Montrer : $\forall h \in G, p \circ h = p$.

b) En déduire que p est un projecteur de E .

c) Établir : $\bigcap_{g \in G} \text{Ker}(g - e) = \text{Im}(p)$.

d) Déduire : $\dim \left(\bigcap_{g \in G} \text{Ker}(g - e) \right) = \frac{1}{n} \sum_{g \in G} \text{tr}(g)$.

Du mal à démarrer ?

1.1 Montrer deux inclusions, en passant par les éléments.

1.2 Se rappeler que, dans un ev, une famille infinie est dite libre si et seulement si toute sous-famille finie est libre, et qu'une famille infinie est liée si et seulement si elle n'est pas libre, c'est-à-dire si et seulement s'il existe une sous-famille finie liée.

a) Pour montrer que $(f_a)_{a \in [0; +\infty[}$ est libre, utiliser l'unicité d'une décomposition en éléments simples.

b) Pour montrer que $(f_a)_{a \in \mathbb{R}}$ est liée, établir, par exemple, que (f_{-1}, f_0, f_1) est liée.

1.3 Dans les deux premiers exemples, il existe des matrices A, B très simples convenant. Pour le troisième exemple, si (A, B) convient, raisonner sur les rangs et obtenir une contradiction.

1.4 1) Vérifier, pour tout $i \in \{1, \dots, n\} : E_i \in F^*$.

2) Montrer que $(E_i)_{1 \leq i \leq n}$ est libre, en exploitant, pour $j \in \{1, \dots, n\}$ fixé, l'application $f_j : x_i \mapsto \delta_{ij}$.

3) Conclure.

1.5 Prendre la trace.

1.6 a) Passer par les déterminants.

b) Noter $M = \begin{pmatrix} X & Y \\ Z & T \end{pmatrix}$ et résoudre un système de quatre équations matricielles.

1.7 Se rappeler que dans un ev, une famille infinie est dite libre si et seulement si toute sous-famille finie est libre.

Remarque que, pour tout $a \in \mathbb{R}$, f_a est de classe C^2 sur $\mathbb{R} - \{a\}$, mais n'est pas de classe C^2 sur \mathbb{R} .

1.8 a) Récurrence sur $n = \dim(E)$.

Partant d'une base (P_1, \dots, P_{n+1}) telle que $\deg(P_1) \leq \dots \leq \deg(P_{n+1})$, construire une base (Q_1, \dots, Q_{n+1}) telle que $Q_{n+1} = P_{n+1}$ et que :

$$\forall i \in \{1, \dots, n\}, \deg(Q_i) < \deg(P_{n+1}),$$

puis utiliser l'hypothèse de récurrence.

b) Partant d'une base (P_1, \dots, P_n) telle que $\deg(P_1) < \dots < \deg(P_n)$, construire une base (S_1, \dots, S_n) telle que $S_n = P_n$ et que :

$$\forall i \in \{1, \dots, n\}, \deg(S_i) = \deg(P_n).$$

1.9 1) Montrer que, pour toute $A \in \mathbf{M}_n(K)$, l'application $\varphi_A : \mathbf{M}_n(K) \rightarrow K, X \mapsto \text{tr}(AX)$ est élément de $\mathbf{M}_n(K)^*$.

2) Montrer que θ est linéaire, injective (en utilisant les matrices élémentaires), puis conclure.

1.10 Se rappeler le théorème du cours sur rang et trace d'un projecteur en dimension finie, et montrer que, si $(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{Z}^3$ est tel que $\alpha + \beta\sqrt{2} + \gamma\sqrt{3} = 0$, alors $\alpha = \beta = \gamma = 0$.

1.11 Utiliser le théorème du cours faisant intervenir la matrice $J_{n,p,r}$.

1.12 a) 1) Se rappeler que le rang d'une matrice est égal à la dimension du sev engendré par les colonnes de cette matrice.

2) Appliquer 1) en transposant.

3) Combiner 1) et 2).

b) Utiliser a) et $\text{rg}(M) = n$.

1.13 1) ★ Montrer :

$$\forall X \in \mathbf{M}_{p,1}(\mathbb{K}), \|AX\|_1 \leq \|A\|_\ell \|X\|_1.$$

★ Considérer la matrice-colonne élémentaire E_j , où j est tel que $\|A\|_\ell = \sum_{i=1}^n |a_{ij}|$.

2) ★ Montrer :

$$\forall X \in \mathbf{M}_{p,1}(\mathbb{K}), \|AX\|_\infty \leq \|A\|_c \|X\|_\infty.$$

★ Considérer la matrice-colonne $X = \begin{pmatrix} \varepsilon_1 \\ \vdots \\ \varepsilon_p \end{pmatrix}$, où :

$$\varepsilon_j = \begin{cases} |a_{i_0 j}| & \text{si } a_{i_0 j} \neq 0 \\ a_{i_0 j} & \text{si } a_{i_0 j} = 0, \end{cases}$$

i_0 étant tel que $\|A\|_c = \sum_{j=1}^p |a_{i_0 j}|$.

1.14 a) Attention : \mathcal{G} va être un groupe pour la loi \circ , mais \mathcal{G} n'est pas nécessairement un sous-groupe de $\mathcal{GL}(E)$.

Montrer successivement le caractère interne de la loi, l'existence d'un neutre, qui est le projecteur sur F parallèlement à G , l'associativité, l'existence, pour chaque élément, d'un symétrique, en utilisant le théorème d'isomorphisme.

b) ★ Montrer que, pour tout $f \in \mathcal{G}$, la matrice de f dans \mathcal{B} est de la forme $\begin{pmatrix} M & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, où $M \in \mathbf{GL}_p(K)$.

★ Réciproquement, montrer que, pour toute matrice $A = \begin{pmatrix} M & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ de H , où $M \in \mathbf{GL}_p(K)$, l'endomorphisme f de E , représenté par A dans \mathcal{B} , est élément de \mathcal{G} .

Construire ainsi deux applications θ et φ , réciproques l'une de l'autre, et montrer que θ est un morphisme du groupe (\mathcal{G}, \circ) sur (H, \cdot) . Conclure.

1.15 Soit H un hyperplan de $\mathbf{M}_n(K)$. Raisonner par l'absurde : supposer $H \cap \mathbf{GL}_n(K) = \emptyset$.

Montrer que H contient alors toutes les matrices nilpotentes, en raisonnant par l'absurde.

Construire deux matrices nilpotentes dont la somme est inversible.

Conclure.

1.16 a) Remarquer, par exemple :

$$\begin{pmatrix} I_n & B \\ 0 & C \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_n & -B \\ 0 & I_p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_n & 0 \\ 0 & C \end{pmatrix}.$$

b) Faire apparaître $I_n + RS$ et $I_p + SR$ dans des produits par blocs de matrices carrées d'ordre $n + p$, et utiliser le résultat de a).

1.17 a) Utiliser le théorème du cours faisant intervenir les matrices $J \dots$.

b) Utiliser le résultat de a).

c) Utiliser le résultat de a).

1.18 Il suffit de trouver un couple $(u, v) \in (\mathcal{L}(E))^2$ tel que $u \circ f \circ v = p$, où p est le projecteur sur F parallèlement à G . Utiliser le théorème du cours sur les matrices $J \dots$.

1.19 Ire méthode : Recherche de l'inverse par résolution d'un système :

En notant $N = \begin{pmatrix} X & Y \\ Z & T \end{pmatrix}$, résoudre $MN = I_{n+p}$.

2è méthode : Utilisation d'une factorisation par blocs :

Remarquer :

$$\begin{pmatrix} I_n & 0 \\ -CA^{-1} & I_p \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_n & -A^{-1}B \\ 0 & I_p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & D - CA^{-1}B \end{pmatrix}.$$

1.20 1) Montrer que E est un K -ev.

2) Utiliser le théorème du cours faisant intervenir les matrices $J_{m,n,a}$ et $J_{p,q,b}$, où $a = \text{rg}(A)$, $b = \text{rg}(B)$ (et, pour la commodité, $a \leq b$). Utiliser des décompositions en neuf blocs.

1.21 Noter $r = \text{rg}(A) < n$ et considérer une matrice nilpotente simple $M_r \in \mathbf{M}_{r+1}(K)$ de rang r , et $N_r = \begin{pmatrix} M_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbf{M}_n(K)$.

1.22 Remarquer :

$$\begin{pmatrix} I_n & 0 \\ CA^{-1} & -I_p \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_n & -A^{-1}B \\ 0 & I_p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & CA^{-1}B - D \end{pmatrix}.$$

1.23 Récurrence sur p .

Si F_1, \dots, F_{p+1} sont des sev de E tels que :

$$\bigcup_{i=1}^{p+1} F_i = E, \quad F_{p+1} \neq E, \quad \bigcup_{i=1}^p F_i \neq E,$$

considérer $x, y \in E$ tels que $x \notin F_{p+1}$ et $y \notin \bigcup_{i=1}^p F_i$, et envisager la droite affine passant par y et dirigée par x .

1.24 a) Remarquer que, pour tout $h \in G$, l'application $g \mapsto g \circ h$ est une permutation de G , donc :

$$\sum_{g \in G} g \circ h = \sum_{g \in G} g.$$

b) Calculer p^2 en utilisant a), pour l'un des deux facteurs.

c) 1) Montrer que, pour tout $x \in \bigcap_{g \in G} \text{Ker}(g - e)$,

on a : $p(x) = x$.

2) Réciproquement, montrer que, pour tout $x \in \text{Im}(p)$, on a $g(x) = (g \circ p)(x)$, et que, comme en a), $g \circ p = p$.

d) Se rappeler le théorème sur rang et trace pour un projecteur en dimension finie.

Corrigés des exercices

1.1

1) Soit $x \in A + (B \cap (A + C))$.

Il existe $a \in A, b \in B \cap (A + C)$ tels que : $x = a + b$.

On a alors $b \in B$, et il existe $a' \in A, c \in C$ tels que : $b = a' + c$.

On déduit : $x = a + b = (a + a') + c$.

D'une part : $a + a' \in A$.

D'autre part, $c \in C$ et $c = (-a') + b \in A + B$,

donc $c \in C \cap (A + B)$.

On obtient : $x \in A + (C \cap (A + B))$.

Ceci montre :

$$A + (B \cap (A + C)) \subset A + (C \cap (A + B)).$$

2) En appliquant le résultat de 1) au couple (B, C) à la place de (C, B) , on obtient l'autre inclusion.

On conclut : $A + (B \cap (A + C)) = A + (C \cap (A + B))$.

Remarque : On peut aussi montrer que les deux sev étudiés sont égaux à $(A + B) \cap (A + C)$.

1.2

a) Soient $n \in \mathbb{N}^*, a_1, \dots, a_n \in]0; +\infty[$ deux à deux distincts, $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ tels que : $\sum_{k=1}^n \lambda_k f_{a_k} = 0$.

On a alors : $\forall x \in [0; +\infty[, \sum_{k=1}^n \frac{\lambda_k}{x + a_k} = 0$.

En réduisant au même dénominateur, on obtient une égalité de fonctions polynomiales sur la partie infinie $[0; +\infty[$ de \mathbb{R} , donc une égalité de polynômes, puis, en revenant aux fonctions rationnelles :

$$\forall x \in \mathbb{R} - \{a_1, \dots, a_n\}, \sum_{k=1}^n \frac{\lambda_k}{x + a_k} = 0.$$

En faisant tendre x vers $-a_k$, on déduit :

$$\forall k \in \{1, \dots, n\}, \lambda_k = 0.$$

Ceci montre que la famille $(f_a)_{a \in]0; +\infty[}$ est libre.

b) Remarquons, pour tout $a \in \mathbb{R}$:

$$\forall x \in \mathbb{R}, f_a(x) = \text{ch}(x - a) = \text{ch } a \text{ ch } x - \text{sh } a \text{ sh } x,$$

donc f_a se décompose linéairement sur les deux applications ch et sh .

Il en résulte que la famille $(f_a)_{a \in \mathbb{R}}$, qui a une infinité d'éléments (donc strictement plus de 2), est liée.

De façon explicite, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} (f_{-1} + f_1)(x) &= \text{ch}(x + 1) + \text{ch}(x - 1) \\ &= 2 \text{ch } 1 \text{ ch } x = (2 \text{ch } 1) f_0(x), \end{aligned}$$

donc : $f_{-1} - 2 \text{ch } 1 f_0 + f_1 = 0$,

ce qui montre que $(f_a)_{a \in \mathbb{R}}$ est liée.

1.3

1) Il est clair que $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ conviennent.

2) Il est clair que $A = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ conviennent.

3) S'il existe (A, B) convenant, on a alors :

$$3 = \text{rg}(C) = \text{rg}(AB) \leq \text{rg}(A) \leq 2,$$

contradiction.

Ceci montre qu'il n'existe pas (A, B) convenant.

1.4

1) D'abord, pour tout $i \in \{1, \dots, n\}, E_i \in F^*$, car E_i est une application de F dans K et E_i est linéaire :

$$\begin{aligned} \forall \alpha \in K, \forall f, g \in F, E_i(\alpha f + g) &= (\alpha f + g)(x_i) \\ &= \alpha f(x_i) + g(x_i) = \alpha E_i(f) + E_i(g). \end{aligned}$$

2) Soit $(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in K^n$ tel que : $\sum_{i=1}^n \alpha_i E_i = 0$.

Soit $j \in \{1, \dots, n\}$ fixé. Considérons l'application

$$f_j : X \rightarrow K, x_i \mapsto \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{si } i \neq j. \end{cases}$$

On a : $0 = \sum_{i=1}^n \alpha_i f_j(x_i) = \alpha_j$.

Ceci montre que (E_1, \dots, E_n) est libre dans F^* .

3) Puisque X est fini et a n éléments, $F = K^X$ est de dimension finie égale à n , donc F^* est aussi de dimension finie et égale à n .

Comme, d'après 2), (E_1, \dots, E_n) est une famille libre de n éléments de F^* , on conclut que c'est une base de F^* .

1.5

Supposons qu'il existe $(A, B) \in (\mathbf{M}_n(\mathbb{C}))^2$ tel que : $AB - BA = I_n$.

On déduit, en prenant la trace : $\text{tr}(AB - BA) = \text{tr}(I_n) = n$.

Mais, d'après les propriétés de la trace :

$$\text{tr}(AB - BA) = \text{tr}(AB) - \text{tr}(BA) = 0,$$

d'où une contradiction.

On conclut : il n'existe pas $(A, B) \in (\mathbf{M}_n(\mathbb{C}))^2$ tel que

$$AB - BA = I_n.$$

1.6

a) Puisque $\det(M) = \det \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & C \end{pmatrix} = \det(A) \det(C)$, on a : $\det(M) \neq 0 \iff (\det(A) \neq 0 \text{ et } \det(C) \neq 0)$, donc M est inversible si et seulement si A et C sont inversibles.

b) On suppose A et C inversibles, donc, d'après a), M est inversible.

Décomposons M^{-1} en blocs inconnus, de même que pour M : $M^{-1} = \begin{pmatrix} X & Y \\ Z & T \end{pmatrix}$. Alors :

$$MM^{-1} = I_{n+p} \iff \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & C \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X & Y \\ Z & T \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_n & 0 \\ 0 & I_p \end{pmatrix}$$

$$\iff \begin{cases} AX + BZ = I_n \\ AY + BT = 0 \\ CZ = 0 \\ CT = I_p \end{cases} \iff \begin{matrix} C \text{ inversible} \\ \begin{cases} Z = 0 \\ T = C^{-1} \\ AX = I_n \\ AY = -BC^{-1} \end{cases} \end{matrix}$$

$$\iff \begin{matrix} A \text{ inversible} \\ \begin{cases} Z = 0 \\ T = C^{-1} \\ X = A^{-1} \\ Y = -A^{-1}BC^{-1} \end{cases} \end{matrix}$$

On conclut : $M^{-1} = \begin{pmatrix} A^{-1} & -A^{-1}BC^{-1} \\ 0 & C^{-1} \end{pmatrix}$.

1.7

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}$ deux à deux distincts, $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ tel que : $\sum_{k=1}^n \lambda_k f_{a_k} = 0$.

Soit $i \in \{1, \dots, n\}$. Supposons $\lambda_i \neq 0$. On a alors :

$$f_{a_i} = -\frac{1}{\lambda_i} \sum_{1 \leq k \leq n, k \neq i} \lambda_k f_{a_k}.$$

Remarquons que, pour tout $a \in \mathbb{R}$, f_a est de classe C^2 sur $\mathbb{R} - \{a\}$, mais n'est pas de classe C^2 sur \mathbb{R} .

Alors, d'une part f_{a_i} n'est de classe C^2 sur aucun intervalle ouvert contenant a_i , et, d'autre part, d'après l'égalité précédente, par opérations, f_{a_i} est de classe C^2 sur un intervalle ouvert assez petit, contenant a_i , contradiction.

Ceci montre : $\forall i \in \{1, \dots, n\}, \lambda_i = 0$.

On conclut : la famille $(f_a)_{a \in \mathbb{R}}$ est libre.

1.8

a) Récurrence sur $n = \dim(E)$.

★ La propriété est évidente pour $n = 1$.

★ Supposons la propriété vraie pour n .

Soit E un sev de $K[X]$, de dimension $n + 1$. Alors, E admet au moins une base $\mathcal{B} = (P_1, \dots, P_{n+1})$. En réordonnant \mathcal{B} , on peut se ramener au cas où :

$$\forall i \in \{1, \dots, n+1\}, \deg(P_i) \leq \deg(P_{n+1}).$$

Considérons la famille $\mathcal{C} = (Q_1, \dots, Q_{n+1})$ définie par $Q_{n+1} = P_{n+1}$ et, pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$:

$$Q_i = \begin{cases} P_i & \text{si } \deg(P_i) < \deg(P_{n+1}) \\ P_i - \alpha_i P_{n+1} & \text{si } \deg(P_i) = \deg(P_{n+1}), \end{cases}$$

où α_i est tel que $\deg(P_i - \alpha_i P_{n+1}) < \deg(P_{n+1})$.

À cet effet, il suffit de prendre pour α_i le quotient des termes de plus haut degré de P_i et P_{n+1} .

Par construction, les polynômes Q_1, \dots, Q_{n+1} se décomposent linéairement sur P_1, \dots, P_{n+1} .

Réciproquement, comme $P_{n+1} = Q_{n+1}$ et que, pour tout $i \in \{1, \dots, n\}, P_i = Q_i$ ou $P_i = Q_i + \alpha_i Q_{n+1}$, les polynômes P_1, \dots, P_{n+1} se décomposent linéairement sur Q_1, \dots, Q_{n+1} .

Il en résulte : $\text{Vect}(\mathcal{C}) = \text{Vect}(\mathcal{B}) = E$.

Comme $\dim(E) = n + 1$ et que \mathcal{C} engendre E et a $n + 1$ éléments, on conclut que \mathcal{C} est une base de E .

Considérons $F = \text{Vect}(Q_1, \dots, Q_n)$, qui est un sev de dimension n de $\mathbb{R}[X]$. D'après l'hypothèse de récurrence, F admet au moins une base $\mathcal{F} = (R_1, \dots, R_n)$ formée de polynômes de degrés deux à deux différents.

Notons $\mathcal{G} = (R_1, \dots, R_n, P_{n+1})$.

Comme $E = F \oplus P_{n+1}K[X]$ et que \mathcal{F} est une base de F , il est clair que \mathcal{G} est une base de E .

Enfin, comme : $\forall i \in \{1, \dots, n\}, R_i \in \text{Vect}(Q_1, \dots, Q_n)$

et que (Q_1, \dots, Q_n) sont tous de degrés $< \deg(P_{n+1})$, on a : $\forall i \in \{1, \dots, n\}, \deg(R_i) < \deg(P_{n+1})$.

Finalement, \mathcal{G} est une base de E formée de polynômes de degrés deux à deux différents.

Ceci montre le résultat voulu, par récurrence sur n .

b) Notons $n = \dim(E)$. D'après a), E admet au moins une base formée de polynômes de degrés deux à deux différents. En réordonnant, E admet au moins une base $\mathcal{B} = (P_1, \dots, P_n)$ telle que :

$$\deg(P_1) < \dots < \deg(P_n).$$

Notons, pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$: $S_i = \begin{cases} P_i + P_n & \text{si } i < n \\ P_n & \text{si } i = n. \end{cases}$

Il est clair qu'alors : $\forall i \in \{1, \dots, n\}, \deg(S_i) = \deg(P_n)$.

Par construction, les polynômes S_1, \dots, S_n se décomposent linéairement sur P_1, \dots, P_n .

Réciproquement, comme :

$$\forall i \in \{1, \dots, n\}, P_i = \begin{cases} S_i - P_n & \text{si } i < n \\ S_n & \text{si } i = n, \end{cases}$$

P_1, \dots, P_n se décomposent linéairement sur S_1, \dots, S_n .

Comme $\dim(E) = n$ et que la famille $\mathcal{C} = (S_1, \dots, S_n)$ a n éléments et engendre E , on conclut que \mathcal{C} est une base de E .

Finalement, E admet au moins une base formée de polynômes de degrés tous égaux.

1.9

1) Soit $A \in \mathbf{M}_n(K)$.

L'application $\varphi_A : \mathbf{M}_n(K) \rightarrow K, X \mapsto \text{tr}(AX)$ est linéaire car :

$$\forall \alpha \in K, \forall X, Y \in \mathbf{M}_n(K),$$

$$\varphi_A(\alpha X + Y) = \text{tr}(A(\alpha X + Y)) = \text{tr}(\alpha AX + AY)$$

$$= \alpha \text{tr}(AX) + \text{tr}(AY) = \alpha \varphi_A(X) + \varphi_A(Y).$$

Ainsi : $\varphi_A \in \mathbf{M}_n(K)^*$.

2) Considérons l'application $\theta : \mathbf{M}_n(K) \rightarrow \mathbf{M}_n(K)^*$ définie par :

$$\forall A \in \mathbf{M}_n(K), \forall X \in \mathbf{M}_n(K), \theta(A)(X) = \text{tr}(AX).$$

Autrement dit, avec les notations de 1) ci-dessus :

$$\forall A \in \mathbf{M}_n(K), \theta(A) = \varphi_A.$$

★ Montrons que θ est linéaire. Soient $\alpha \in K, A, B \in \mathbf{M}_n(K)$.

On a, pour toute $X \in \mathbf{M}_n(K)$:

$$\begin{aligned} \theta(\alpha A + B)(X) &= \text{tr}((\alpha A + B)X) \\ &= \text{tr}(\alpha AX + BX) = \alpha \text{tr}(AX) + \text{tr}(BX) \\ &= \alpha \theta(A)(X) + \theta(B)(X) = (\alpha \theta(A) + \theta(B))(X), \end{aligned}$$

donc : $\theta(\alpha A + B) = \alpha \theta(A) + \theta(B)$,

ce qui montre la linéarité de θ .

★ Montrons que θ est injective.

Soit $A \in \text{Ker}(\theta)$. On a $\theta(A) = 0$, c'est-à-dire :

$$\forall X \in \mathbf{M}_n(K), \text{tr}(AX) = 0.$$

Notons $A = (a_{ij})_{ij}$. Soit $(i, j) \in \{1, \dots, n\}$.

On a, en utilisant les matrices élémentaires :

$$0 = \text{tr} AE_{ij} = \text{tr} \begin{pmatrix} a_{1i} & & \\ & \ddots & \\ (0) & & (0) \\ & & & a_{ni} \end{pmatrix} = a_{ji},$$

car la colonne numéro i de A a été ainsi déplacée en colonne numéro j .

On a donc : $A = 0$.

Ainsi, $\text{Ker}(\theta) = \{0\}$, donc θ est injective.

★ Puisque $\theta : \mathbf{M}_n(K) \rightarrow \mathbf{M}_n(K)^*$ est linéaire, injective, et que $\mathbf{M}_n(K)$ et $\mathbf{M}_n(K)^*$ sont de dimensions finies égales, on conclut que θ est un isomorphisme de K -ev.

1.10

Puisque A, B, C, M sont des matrices de projecteurs, leurs traces sont égales à leurs rangs et sont des entiers naturels. D'où :

$$\begin{aligned} \text{tr}(M) &= \text{tr}(A + \sqrt{2}B + \sqrt{3}C) \\ &= \text{tr}(A) + \sqrt{2} \text{tr}(B) + \sqrt{3} \text{tr}(C), \end{aligned}$$

$$\text{donc : } \underbrace{(\text{tr}(A) - \text{tr}(M))}_{\text{noté } \alpha} + \underbrace{\text{tr}(B)}_{\text{noté } \beta} \sqrt{2} + \underbrace{\text{tr}(C)}_{\text{noté } \gamma} \sqrt{3} = 0.$$

On a donc $(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{Z}^3$ et $\alpha + \beta\sqrt{2} + \gamma\sqrt{3} = 0$.

Montrons : $(\alpha, \beta, \gamma) = (0, 0, 0)$.

On a en faisant passer $\gamma\sqrt{3}$ dans le second membre, puis en élevant au carré : $\alpha^2 + 2\beta^2 + 2\alpha\beta\sqrt{2} = 3\gamma^2$,

$$\text{d'où, si } \alpha\beta \neq 0 : \sqrt{2} = \frac{3\gamma^2 - \alpha^2 - 2\beta^2}{2\alpha\beta} \in \mathbb{Q},$$

contradiction, car on sait que $\sqrt{2}$ est irrationnel.

Il en résulte : $\alpha\beta = 0$.

De même, on obtient : $\alpha\gamma = 0$ et $\beta\gamma = 0$. Si $\alpha \neq 0$, il en résulte $\beta = 0$ et $\gamma = 0$, puis $\alpha = 0$, contradiction.

On a donc $\alpha = 0$.

Comme $\beta\gamma = 0$, on a $\beta = 0$ ou $\gamma = 0$, puis $\beta = 0$ et $\gamma = 0$.

On conclut : $\alpha = 0, \beta = 0, \gamma = 0$.

Ici : $\text{tr}(B) = 0$ et $\text{tr}(C) = 0$,

donc : $\text{rg}(B) = \text{tr}(B) = 0$ et $\text{rg}(C) = \text{tr}(C) = 0$,

et on conclut : $B = 0$ et $C = 0$.

1.11

D'après le cours, puisque $r = \text{rg}(A)$,

il existe $P \in \mathbf{GL}_n(K), Q \in \mathbf{GL}_p(K)$ telles que :

$$A = PJ_{n,p,r}Q, \text{ où : } J_{n,p,r} = \begin{pmatrix} I_r & & \\ & 0_{r,p-r} & \\ & & 0_{n-r,p-r} \end{pmatrix}.$$

Il est clair que : $J_{n,p,r} = \begin{pmatrix} I_r & \\ & 0_{n-r,r} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_r & 0_{r,p-r} \end{pmatrix}$,

d'où la décomposition de A en produit :

$$A = P \underbrace{\begin{pmatrix} I_r & \\ & 0_{n-r,r} \end{pmatrix}}_{\text{notée } U} \underbrace{\begin{pmatrix} I_r & 0_{r,p-r} \end{pmatrix}}_{\text{notée } V} Q,$$

et on a bien : $U \in \mathbf{M}_{n,r}(K), V \in \mathbf{M}_{r,p}(K)$.

1.12

a) 1) En notant U_1, \dots, U_p les colonnes de U , et V_1, \dots, V_q les colonnes de V , on a :

$$\begin{aligned} \text{Vect}(U_1, \dots, U_p, V_1, \dots, V_q) \\ = \text{Vect}(U_1, \dots, U_p) + \text{Vect}(V_1, \dots, V_q), \end{aligned}$$

donc :

$$\begin{aligned} \dim \text{Vect}(U_1, \dots, U_p, V_1, \dots, V_q) \\ \leq \dim \text{Vect}(U_1, \dots, U_p) + \dim \text{Vect}(V_1, \dots, V_q), \end{aligned}$$

c'est-à-dire : $\text{rg}(M) \leq \text{rg}(U) + \text{rg}(V)$.

2) On applique 1) en transposant :

$$\begin{aligned} \text{rg}(M) &= \text{rg} \begin{pmatrix} R \\ S \end{pmatrix} = \text{rg} \left({}^t \begin{pmatrix} R \\ S \end{pmatrix} \right) = \text{rg} \begin{pmatrix} {}^tR & {}^tS \end{pmatrix} \\ &\leq \text{rg}({}^tR) + \text{rg}({}^tS) = \text{rg}(R) + \text{rg}(S). \end{aligned}$$

3) On combine les deux résultats précédents :

$$\begin{aligned} \text{rg}(M) &= \text{rg} \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \leq \text{rg} \begin{pmatrix} A \\ C \end{pmatrix} + \text{rg} \begin{pmatrix} B \\ D \end{pmatrix} \\ &\leq (\text{rg}(A) + \text{rg}(C)) + (\text{rg}(B) + \text{rg}(D)). \end{aligned}$$

b) D'après a) et puisque M est inversible, on a :

$$n = \text{rg}(M) \leq \text{rg}(A) + \text{rg}(B) + \text{rg}(C).$$

Comme $B \in \mathbf{M}_{m,n-p}(K)$ et $C \in \mathbf{M}_{n-m,p}(K)$,

on a, en particulier : $\text{rg}(B) \leq n - p$ et $\text{rg}(C) \leq n - m$,

d'où : $n \leq \text{rg}(A) + (n - p) + (n - m)$,

et on conclut : $\text{rg}(A) \geq m + p - n$.

1.13

1) ★ On a, pour tout $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix} \in \mathbf{M}_{p,1}(\mathbb{K})$:

$$\begin{aligned} \|AX\|_1 &= \sum_{i=1}^n \left| \sum_{j=1}^p a_{ij}x_j \right| \\ &\leq \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^p |a_{ij}| |x_j| = \sum_{j=1}^p \left(\sum_{i=1}^n |a_{ij}| \right) |x_j| \end{aligned}$$

$$\leq \sum_{j=1}^p \|A\|_\ell |x_j| = \|A\|_\ell \sum_{j=1}^p |x_j| = \|A\|_\ell \|X\|_1.$$

d'où : $\forall X \in \mathbf{M}_{p,1}(\mathbb{K}) - \{0\}, \frac{\|AX\|_1}{\|X\|_1} \leq \|A\|_\ell.$

★ Puisque $\|A\|_\ell = \text{Max}_{1 \leq j \leq p} \left(\sum_{i=1}^n |a_{ij}| \right)$, il existe un indice

dice $j \in \{1, \dots, p\}$ tel que : $\|A\|_\ell = \sum_{i=1}^n |a_{ij}|.$

Considérons la matrice-colonne $X = E_j$, dont tous les éléments sont nuls, sauf celui situé à la ligne numéro j , et qui est égal à 1.

On a : $\|X\|_1 = 1$ et $AX = \begin{pmatrix} a_{1j} \\ \vdots \\ a_{nj} \end{pmatrix},$

donc : $\|AX\|_1 = \sum_{i=1}^n |a_{ij}| = \|A\|_\ell,$

d'où : $\frac{\|AX\|_1}{\|X\|_1} = \|A\|_\ell.$

Autrement dit, le majorant $\|A\|_\ell$ obtenu ci-dessus, est atteint.

On conclut : $\text{Sup}_{X \in \mathbf{M}_{p,1}(\mathbb{K}) - \{0\}} \frac{\|AX\|_1}{\|X\|_1} = \|A\|_\ell.$

2) ★ On a, pour tout $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix} \in \mathbf{M}_{p,1}(\mathbb{K}) :$

$$\begin{aligned} \|AX\|_\infty &= \text{Max}_{1 \leq i \leq n} \left| \sum_{j=1}^p a_{ij} x_j \right| \\ &\leq \text{Max}_{1 \leq i \leq n} \sum_{j=1}^p |a_{ij}| |x_j| \leq \text{Max}_{1 \leq i \leq n} \left(\sum_{j=1}^p |a_{ij}| \|X\|_\infty \right) \\ &= \left(\text{Max}_{1 \leq i \leq n} \sum_{j=1}^p |a_{ij}| \right) \|X\|_\infty = \|A\|_c \|X\|_\infty. \end{aligned}$$

d'où : $\forall X \in \mathbf{M}_{p,1}(\mathbb{K}) - \{0\}, \frac{\|AX\|_\infty}{\|X\|_\infty} \leq \|A\|_c.$

★ Puisque $\|A\|_c = \text{Max}_{1 \leq i \leq n} \left(\sum_{j=1}^p |a_{ij}| \right)$, il existe un indice

dice $i_0 \in \{1, \dots, n\}$ tel que : $\|A\|_c = \sum_{j=1}^p |a_{i_0 j}|.$

Considérons la colonne $X = \begin{pmatrix} \varepsilon_1 \\ \vdots \\ \varepsilon_p \end{pmatrix} \in \mathbf{M}_{p,1}(\mathbb{K})$ définie, pour

tout $j \in \{1, \dots, p\}$, par : $\varepsilon_j = \begin{cases} |a_{i_0 j}| & \text{si } a_{i_0 j} \neq 0 \\ a_{i_0 j} & \text{si } a_{i_0 j} = 0. \end{cases}$

On a $\|X\|_\infty = 1$, car chaque terme de X est de module 1, et donc aussi $X \neq 0$.

On a : $\|AX\|_\infty = \text{Max}_{1 \leq i \leq n} \left(\sum_{j=1}^p |a_{ij} \varepsilon_j| \right) \geq \sum_{j=1}^p |a_{i_0 j} \varepsilon_j|.$

Mais, pour tout $j \in \{1, \dots, p\} : |a_{i_0 j} \varepsilon_j| = |a_{i_0 j}|,$ comme on le voit en séparant les cas $a_{i_0 j} \neq 0, a_{i_0 j} = 0.$

D'où : $\|AX\|_\infty \geq \sum_{j=1}^p |a_{i_0 j}| = \|A\|_c.$

Ainsi, il existe $X \in \mathbf{M}_{p,1}(\mathbb{K})$ tel que : $\frac{\|AX\|_\infty}{\|X\|_\infty} \geq \|A\|_c.$

Autrement dit, compte tenu de l'inégalité obtenue au point précédent, le majorant obtenu au point précédent est atteint.

On conclut : $\text{Sup}_{X \in \mathbf{M}_{p,1}(\mathbb{K}) - \{0\}} \frac{\|AX\|_\infty}{\|X\|_\infty} = \|A\|_c.$

1.14

a) 1) Caractère interne de la loi :

Montrons que la loi \circ est interne dans \mathcal{G} .

Soient $f_1, f_2 \in \mathcal{G}$.

★ * On a : $\text{Im}(f_2 \circ f_1) \subset \text{Im}(f_2) = F.$

* Soit $z \in F$. On a : $z \in F = \text{Im}(f_2)$, donc il existe $y \in E$ tel que : $z = f_2(y)$. Puisque $E = F \oplus G$, il existe $u \in F, v \in G$ tels que $y = u + v$. On a alors :

$$z = f_2(y) = f_2(u + v) = f_2(u) + f_2(v).$$

Mais $u \in F = \text{Im}(f_1)$, donc il existe $x \in E$ tel que $u = f_1(x)$, et, d'autre part, $v \in G = \text{Ker}(f_2)$, donc $f_2(v) = 0$.

D'où : $z = f_2(f_1(x)) = f_2 \circ f_1(x) \in \text{Im}(f_2 \circ f_1).$

Ceci montre : $F \subset \text{Im}(f_2 \circ f_1).$

On conclut : $\text{Im}(f_2 \circ f_1) = F.$

★ * On a : $\text{Ker}(f_2 \circ f_1) \supset \text{Ker}(f_1) = G.$

* Soit $x \in \text{Ker}(f_2 \circ f_1)$; On a $f_2(f_1(x)) = 0$, donc :

$$f_1(x) \in \text{Im}(f_1) \cap \text{Ker}(f_2) = F \cap G = \{0\},$$

d'où $x \in \text{Ker}(f_1) = G.$

Ceci montre : $\text{Ker}(f_2 \circ f_1) \subset G.$

On conclut : $\text{Ker}(f_2 \circ f_1) = G.$

On a obtenu : $f_2 \circ f_1 \in \mathcal{G}.$

2) Neutre :

Considérons le projecteur p sur F parallèlement à G . On a : $p \in \mathcal{L}(E), \text{Im}(p) = F, \text{Ker}(p) = G$, donc : $p \in \mathcal{G}.$

Soit $f \in \mathcal{G}.$

★ Comme : $\forall x \in E, f(x) \in \text{Im}(f) = F,$

on a : $\forall x \in E, p(f(x)) = f(x),$

ce qui montre : $p \circ f = f.$

★ On a : $\forall x \in E, x - p(x) \in \text{Ker}(p) = G = \text{Ker}(f),$

donc : $\forall x \in E, f(x - p(x)) = 0,$

c'est-à-dire : $\forall x \in E, f(x) = f(p(x)),$

ce qui montre : $f = f \circ p.$

Ainsi, p est neutre pour \circ dans $\mathcal{G}.$

3) *Associativité* :

Il est connu que la loi \circ est associative.

4) *Symétriques* :

Soit $f \in \mathcal{G}$. Puisque F est un supplémentaire de $G = \text{Ker}(f)$ dans E , d'après le théorème d'isomorphisme, l'application :

$$f' : F \longrightarrow \text{Im}(f) = F, \quad x \longmapsto f(x)$$

est un isomorphisme de K -ev.

Considérons $g : E \longrightarrow E, \quad x \longmapsto f'^{-1}(p(x)),$

où p a été défini plus haut.

★ Il est clair que g est linéaire.

On a : $\text{Im}(g) = f'^{-1}(p(E)) = f'^{-1}(F) = F.$

On a, pour tout $x \in E$:

$$x \in \text{Ker}(g) \iff g(x) = 0 \iff f'^{-1}(p(x)) = 0 \iff p(x) = 0 \iff x \in G,$$

donc : $\text{Ker}(g) = G.$

Ceci montre : $g \in \mathcal{G}.$

★ On a, pour tout $x \in E$:

$$(f \circ g)(x) = f(f'^{-1}(p(x))) = f'(f'^{-1}(p(x))) = p(x),$$

donc : $f \circ g = p.$

★ Soit $x \in E.$

Comme $f(x) \in \text{Im}(f) = F$, on a : $p(f(x)) = f(x)$, puis :

$$g(f(x)) = f'^{-1}(p(f(x))) = f'^{-1}(f(x)).$$

Mais $f = f \circ p$, donc :

$$f'^{-1}(f(x)) = f'^{-1}(f(p(x))) = f'^{-1}(f'(p(x))) = p(x).$$

Ainsi : $g \circ f = p.$

Ceci montre : $g \circ f = f \circ g = p,$

donc f admet g pour symétrique dans $(\mathcal{G}, \circ).$

Finalement : (\mathcal{G}, \circ) est un groupe.

b) ★ Pour tout $f \in \mathcal{G}$, comme $\text{Im}(f) = F$ et $\text{Ker}(f) = G$, la matrice de f dans \mathcal{B} est de la forme $\begin{pmatrix} M & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, où M est la matrice de l'endomorphisme f' induit par f sur F .

De plus : $\text{rg}(M) = \text{rg} \begin{pmatrix} M & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \text{rg}(f) = \dim(F) = p.$

Il en résulte $M \in \mathbf{GL}_p(K)$, donc $\begin{pmatrix} M & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in H.$

On peut donc considérer l'application

$$\theta : \mathcal{G} \longrightarrow H, \quad f \longmapsto \text{Mat}_{\mathcal{B}}(f).$$

★ Réciproquement, considérons l'application φ qui, à une matrice A de H , associe l'endomorphisme f de E tel que $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = A.$

Avec ces notations, puisque $A = \begin{pmatrix} M & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(f)$,

où $M \in \mathbf{GL}_p(K)$, on a :

$$\text{Im}(f) = F \text{ et } \text{Ker}(f) = G,$$

donc : $f \in \mathcal{G}.$

★ Il est clair que θ et φ sont des applications réciproques l'une de l'autre, donc sont bijectives.

★ De plus, avec des notations évidentes :

$$\begin{aligned} \forall f_1, f_2 \in \mathcal{G}, \quad \theta(f_2)\theta(f_1) &= \begin{pmatrix} M_2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} M_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} M_2 M_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \theta(f_2 \circ f_1). \end{aligned}$$

Ainsi, θ est un isomorphisme de (\mathcal{G}, \circ) sur $(H, \cdot).$

★ Comme (\mathcal{G}, \circ) est un groupe, par transport de structure, (H, \cdot) est un groupe.

Finalement, l'application $\theta : f \longmapsto \text{Mat}_{\mathcal{B}}(f)$ est un isomorphisme du groupe (\mathcal{G}, \circ) sur le groupe $(H, \cdot).$

1.15

Soit H un hyperplan de $\mathbf{M}_n(K)$. Raisonnons par l'absurde : supposons : $H \cap \mathbf{GL}_n(K) = \emptyset.$

1) Montrons que H contient toutes les matrices nilpotentes.

Soit $N \in \mathbf{M}_n(K)$, nilpotente.

Raisonnons par l'absurde : supposons $N \notin H.$

D'après le cours, puisque $N \notin H$ et que H est un hyperplan de $\mathbf{M}_n(K)$, on a : $\mathbf{M}_n(K) = H \oplus KN.$

En particulier, il existe $M \in H$ et $\alpha \in K$ tels que :

$$I_n = M + \alpha N.$$

Alors : $M = I_n - \alpha N.$

Puisque N est nilpotente, il existe $k \in \mathbb{N}^*$ tel que $N^k = 0$ d'où :

$$\begin{cases} (I_n - \alpha N) \left(\sum_{p=0}^{k-1} (\alpha N)^p \right) = I_n - \alpha^k N^k = I_n \\ \left(\sum_{p=0}^{k-1} (\alpha N)^p \right) (I_n - \alpha N) = I_n - \alpha^k N^k = I_n, \end{cases}$$

d'où : $I_n - \alpha N \in \mathbf{GL}_n(K).$

Ainsi : $M \in H \cap \mathbf{GL}_n(K)$, contradiction.

Ceci montre que H contient toutes les matrices nilpotentes.

2) Considérons les matrices suivantes de $\mathbf{M}_n(K)$:

$$N_1 = \begin{pmatrix} 0 & \dots & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & (0) & \vdots \\ 0 & (0) & \ddots & \vdots \\ 1 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}, \quad N_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & (0) & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & (0) & & \ddots & 1 \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \end{pmatrix}.$$

Il est clair que N_1 et N_2 sont nilpotentes.

D'après 1) : $N_1 \in H$ et $N_2 \in H$, puis, comme H est un sev : $N_1 + N_2 \in H.$

$$\text{Mais : } N_1 + N_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & (0) & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & (0) & & \ddots & 1 \\ 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \end{pmatrix},$$

qui est inversible, contradiction.

Ce raisonnement par l'absurde montre que tout hyperplan de $\mathbf{M}_n(K)$ rencontre $\mathbf{GL}_n(K).$

1.16

a) On a, par exemple : $\begin{pmatrix} I_n & B \\ 0 & C \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_n & -B \\ 0 & I_p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_n & 0 \\ 0 & C \end{pmatrix}$.

La matrice $\begin{pmatrix} I_n & -B \\ 0 & I_p \end{pmatrix}$ est triangulaire, à éléments diagonaux tous non nuls (car égaux à 1), donc cette matrice est inversible, d'où, d'après le cours :

$$\text{rg} \begin{pmatrix} I_n & B \\ 0 & C \end{pmatrix} = \text{rg} \begin{pmatrix} I_n & 0 \\ 0 & C \end{pmatrix}.$$

D'autre part, il est clair (par la méthode de Gauss, par exemple) que $\text{rg} \begin{pmatrix} I_n & 0 \\ 0 & C \end{pmatrix} = n + \text{rg}(C)$.

On conclut : $\text{rg} \begin{pmatrix} I_n & B \\ 0 & C \end{pmatrix} = n + \text{rg}(C)$.

b) On a, à l'aide de produits par blocs :

$$\begin{pmatrix} I_n & R \\ -S & I_p \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_n & 0 \\ S & I_p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_n + RS & R \\ 0 & I_p \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} I_n & R \\ -S & I_p \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_n & -R \\ 0 & I_p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_n & 0 \\ -S & I_p + SR \end{pmatrix}.$$

Les matrices carrées $\begin{pmatrix} I_n & 0 \\ S & I_p \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} I_n & -R \\ 0 & I_p \end{pmatrix}$ sont inversibles (comme en 1)), donc, d'après le cours :

$$\text{rg} \begin{pmatrix} I_n & R \\ -S & I_p \end{pmatrix} = \text{rg} \begin{pmatrix} I_n + RS & R \\ 0 & I_p \end{pmatrix},$$

$$\text{rg} \begin{pmatrix} I_n & R \\ -S & I_p \end{pmatrix} = \text{rg} \begin{pmatrix} I_n & 0 \\ -S & I_p + SR \end{pmatrix}.$$

D'après a) et le résultat analogue pour des matrices triangulaires inférieures par blocs (se démontrant comme en a), ou par transposition à partir du résultat de a), on a :

$$\text{rg} \begin{pmatrix} I_n + RS & R \\ 0 & I_p \end{pmatrix} = p + \text{rg}(I_n + RS),$$

$$\text{rg} \begin{pmatrix} I_n & 0 \\ -S & I_p + SR \end{pmatrix} = n + \text{rg}(I_p + SR).$$

On conclut : $p + \text{rg}(I_n + RS) = n + \text{rg}(I_p + SR)$.

1.17

a) Notons $a = \text{rg}(A)$, $b = \text{rg}(B)$. D'après le cours, il existe $P, Q \in \mathbf{GL}_n(K)$, $R, S \in \mathbf{GL}_p(K)$ telles que :

$$A = PJ_{n,a}Q, \quad B = RJ_{p,b}S,$$

où $J_{n,a} = \begin{pmatrix} I_a & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbf{M}_n(K)$, $J_{p,b} = \begin{pmatrix} I_b & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbf{M}_p(K)$.

On a alors, en faisant des produits de matrices diagonales par blocs :

$$\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} PJ_{n,a}Q & 0 \\ 0 & RJ_{p,b}S \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P & 0 \\ 0 & R \end{pmatrix} \begin{pmatrix} J_{n,a} & 0 \\ 0 & J_{p,b} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Q & 0 \\ 0 & S \end{pmatrix}.$$

Il est clair que $\begin{pmatrix} P & 0 \\ 0 & R \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} Q & 0 \\ 0 & S \end{pmatrix}$ sont inversibles.

On a donc :

$$\text{rg} \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix} = \text{rg} \begin{pmatrix} J_{n,a} & 0 \\ 0 & J_{p,b} \end{pmatrix} = \text{rg}(A) + \text{rg}(B).$$

b) On suppose que les matrices $\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & A \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} B & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}$ sont équivalentes. D'après a), on a alors : $2 \text{rg}(A) = 2 \text{rg}(B)$, donc $\text{rg}(A) = \text{rg}(B)$, et on conclut que les matrices A et B sont équivalentes.

c) On suppose que A et B sont équivalentes et que $\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & U \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} B & 0 \\ 0 & V \end{pmatrix}$ sont équivalentes. On a alors $\text{rg}(A) = \text{rg}(B)$, et, d'après a) ; $\text{rg}(A) + \text{rg}(U) = \text{rg}(B) + \text{rg}(V)$.

Il s'ensuit : $\text{rg}(U) = \text{rg}(V)$, donc les matrices U et V sont équivalentes.

1.18

Il suffit de trouver un couple $(u, v) \in \mathcal{L}(E)^2$ tel que : $u \circ f \circ v = p$,

où p est le projecteur sur F parallèlement à G .

Notons $r = \text{rg}(f)$, $d = \dim(F) = \text{rg}(p)$.

Le K -ev E , de dimension finie, admet au moins une base \mathcal{B} . Notons A, P_1 les matrices respectives de f, p dans \mathcal{B} .

D'après le cours, il existe $P, Q, R, S \in \mathbf{GL}_n(K)$ telles que :

$$A = PJ_rQ \text{ et } P_1 = RJ_dS,$$

où $J_r = \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbf{M}_n(K)$, $J_d = \begin{pmatrix} I_d & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbf{M}_n(K)$.

Soient $(u, v) \in (\mathcal{L}(E))^2$ quelconque.

Notons U, V les matrices respectives de u, v dans \mathcal{B} .

On a :

$$u \circ f \circ v = p \iff UAV = P_1 \iff UPJ_rQV = RJ_dS \iff (R^{-1}UP)J_r(QVS^{-1}) = J_d.$$

Choisissons : $U = RJ_rP^{-1}$ et $V = Q^{-1}J_dS$.

On a alors : $(R^{-1}UP)J_r(QVS^{-1}) = J_rJ_rJ_d = J_d$, car $d \leq r$.

Ainsi, il existe $(u, v) \in (\mathcal{L}(E))^2$ convenant.

1.19

1re méthode : Recherche de l'inverse par résolution d'un système :

Cherchons l'éventuel inverse de M sous forme de matrice décomposée en blocs, dans le même format que pour M . Soit

$$N = \begin{pmatrix} X & Y \\ Z & T \end{pmatrix}. \text{ On a :}$$

$$MN = I_{n+p} \iff \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X & Y \\ Z & T \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_n & 0 \\ 0 & I_p \end{pmatrix}$$

$$\iff \begin{cases} AX + BZ = I_n & (1) \\ AY + BT = 0 & (2) \\ CX + DZ = 0 & (3) \\ CY + DT = I_p & (4) \end{cases}$$

Les équations (1) et (3) ont pour inconnues X et Z , les équations (2) et (4) ont pour inconnues Y et T .

Puisque A est inversible :

$$\begin{cases} (2) \\ (4) \end{cases} \iff \begin{cases} Y = -A^{-1}BT \\ (D - CA^{-1}B)T = I_p \end{cases} \quad (5).$$

Si $D - CA^{-1}B$ n'est pas inversible, l'équation (5) n'a pas de solution (en T), donc M n'est pas inversible.

Supposons $D - CA^{-1}B$ inversible.

$$\text{Alors : } \begin{cases} (2) \\ (4) \end{cases} \iff \begin{cases} Y = -A^{-1}B(D - CA^{-1}B)^{-1} \\ T = (D - CA^{-1}B)^{-1}. \end{cases}$$

D'autre part, puisque A est inversible :

$$\begin{aligned} & \begin{cases} (1) \\ (3) \end{cases} \iff \begin{cases} X + A^{-1}BZ = A^{-1} \\ CX + DZ = 0 \end{cases} \\ & \iff \begin{cases} X + A^{-1}BZ = A^{-1} \\ (D - CA^{-1}B)Z = -CA^{-1} \quad [L_2 \leftarrow L_2 - CL_1] \end{cases} \\ & \iff \begin{cases} Z = -(D - CA^{-1}B)^{-1}CA^{-1} \\ X = A^{-1} + A^{-1}B(D - CA^{-1}B)^{-1}CA^{-1}. \end{cases} \end{aligned}$$

On conclut que la matrice carrée M est inversible si et seulement si $D - CA^{-1}B$ est inversible et que, dans ce cas, en notant $E = (D - CA^{-1}B)^{-1}$, on a :

$$M^{-1} = \begin{pmatrix} A^{-1} + A^{-1}BECA^{-1} & -A^{-1}BE \\ -ECA^{-1} & E \end{pmatrix}.$$

2^è méthode : Utilisation d'une factorisation par blocs :

On remarque (cf. aussi l'exercice 1.22) :

$$\begin{pmatrix} I_n & 0 \\ -CA^{-1} & I_p \end{pmatrix} \overbrace{\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}}^M \begin{pmatrix} I_n & -A^{-1}B \\ 0 & I_p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & D - CA^{-1}B \end{pmatrix}.$$

Les deux matrices autour de M sont triangulaires et à termes diagonaux tous non nuls (car égaux à 1), donc ces deux matrices sont inversibles. Il en résulte que M est inversible si et seulement si $\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & D - CA^{-1}B \end{pmatrix}$ est inversible, ce qui revient, puisque A est supposée inversible, à ce que $D - CA^{-1}B$ soit inversible.

On a alors, en notant $E = (D - CA^{-1}B)^{-1}$ pour la commodité :

$$M = \begin{pmatrix} I_n & 0 \\ -CA^{-1} & I_p \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & E^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_n & -A^{-1}B \\ 0 & I_p \end{pmatrix}^{-1}$$

donc :

$$\begin{aligned} M^{-1} &= \begin{pmatrix} I_n & -A^{-1}B \\ 0 & I_p \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A^{-1} & 0 \\ 0 & E \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_n & 0 \\ -CA^{-1} & I_p \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} A^{-1} + A^{-1}BECA^{-1} & -A^{-1}BE \\ -ECA^{-1} & E \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

1.20

1) \star On a $E \subset \mathbf{M}_{n,p}(K)$ et $0 \in E$.

\star On a, pour tout $\alpha \in K$ et tous $X, Y \in E$:

$$A(\alpha X + Y)B = \alpha \underbrace{AXB}_{=0} + \underbrace{AYB}_{=0} = 0,$$

donc $\alpha X + Y \in E$.

On conclut : E est un K -ev.

2) D'après le cours, il existe des matrices $P, Q \in \mathbf{GL}_n(K)$, $R, S \in \mathbf{GL}_p(K)$ telles que :

$$A = PJ_{m,n,a}Q \quad \text{et} \quad B = RJ_{p,q,b}S,$$

où on a noté : $a = \text{rg}(A)$, $b = \text{rg}(B)$,

$$J_{m,n,a} = \begin{pmatrix} I_a & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbf{M}_{m,n}(K),$$

$$J_{p,q,b} = \begin{pmatrix} I_b & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbf{M}_{p,q}(K).$$

On peut supposer, par exemple $a \leq b$, et décomposer en neuf blocs :

$$J_{m,n,a} = \begin{pmatrix} I_a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad J_{p,q,b} = \begin{pmatrix} I_a & 0 & 0 \\ 0 & I_{b-a} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Soit $X \in \mathbf{M}_{n,p}(K)$, quelconque. On a :

$$\begin{aligned} X \in E &\iff AXB = 0 \iff J_{m,n,a}QX(RJ_{p,q,b}S) = 0 \\ &\iff J_{m,n,a}(QXR)J_{p,q,b} = 0. \end{aligned}$$

$$\text{Décomposons } QXR \text{ en blocs : } QXR = \begin{pmatrix} U_1 & V_1 & W_1 \\ U_2 & V_2 & W_2 \\ U_3 & V_3 & W_3 \end{pmatrix}.$$

On obtient, par produit par blocs de trois matrices :

$$J_{m,n,a}(QXR)J_{p,q,b} = \begin{pmatrix} U_1 & V_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Donc : $X \in E \iff (U_1 = 0 \text{ et } V_1 = 0)$.

Ainsi, l'application $X \mapsto QXR$ est un isomorphisme d'espaces vectoriels de E sur le K -ev des matrices décomposées en neuf blocs et telles que les deux premiers blocs soient nuls.

Il en résulte : $\dim(E) = np - ab$.

Le résultat est identique lorsque $a \geq b$.

On conclut : $\dim(E) = np - \text{rg}(A)\text{rg}(B)$.

1.21

Notons $r = \text{rg}(A) < n$ et :

$$M_r = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & (0) & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & (0) & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbf{M}_{r+1}(K),$$

$$N_r = \begin{pmatrix} M_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbf{M}_n(K).$$

Il est clair que M_r est nilpotente, donc N_r est nilpotente.

Comme $\text{rg}(A) = r = \text{rg}(N_r)$, il existe $P, Q \in \mathbf{GL}_n(K)$ telles que : $A = PN_rQ$. On a alors : $A = \underbrace{(PQ)}_{\text{notée } B} \underbrace{(Q^{-1}N_rQ)}_{\text{notée } C}$.

Alors, B, C sont dans $\mathbf{M}_n(K)$, B est inversible car P et Q le sont, et C est nilpotente, car :

$$C^{r+1} = (Q^{-1}N_rQ)^{r+1} = Q^{-1}N_r^{r+1}Q = Q^{-1}0Q = 0.$$

Le couple (B, C) convient.

1.22

On a l'égalité suivante, par produit par blocs :

$$\begin{aligned} & \begin{pmatrix} I_n & 0 \\ CA^{-1} & -I_p \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_n & -A^{-1}B \\ 0 & I_p \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & CA^{-1}B - D \end{pmatrix}. \end{aligned}$$