Maths PSI

J'évalue mon niveau en 500 questions

Hervé Gianella
Professeur de mathématiques spéciales MP* au lycée Blaise Pascal à Orsay

Franck Taieb
Professeur de mathématiques spéciales MP* au lycée Pasteur de Neuilly

Illustration de couverture :
© puentes – Fotolia.com

ISBN 978-2-10-058026-2

Table des matières

PARTIE 3

RÉVISIONS

Avant-Propos

Ce livre a pour vocation d'aider les élèves dans leur préparation aux concours des grandes écoles d'ingénieur. Il complète les excellents ouvrages de cours ou d'exercices corrigés déjà parus dans la collection « J'intègre » du même éditeur.

Après leur première année, les élèves de mathématiques spéciales savent l'importance cruciale de l'apprentissage du cours : il s'agit non seulement de connaître les définitions, les méthodes et techniques de calcul, les théorèmes et leurs démonstrations, mais aussi de savoir mobiliser ces connaissances pour répondre à des problèmes de mathématiques. C'est ce qui permet de distinguer un « cours appris » d'un « cours compris ».

C'est notre expérience auprès de ces élèves, comme professeurs et comme colleurs, qui nous a conduit à élaborer ces tests de connaissances. Leur objectif est triple :

- détecter au travers de questions simples les points du cours qui ne sont pas suffisamment compris ;
- manipuler les notions du cours sur des exemples concrets ;
- progresser dans la logique et la rigueur.

Nous proposons un test par chapitre principal du cours de deuxième année. Conformes au programme officiel, ces tests sont tous indépendants les uns des autres, et peuvent être abordés dans n'importe quel ordre, au fil du cours prodigué par votre professeur de mathématiques. Comptez entre quinze et vingt-cinq minutes pour répondre aux questions du test (généralement entre 15 et 20 questions), puis prenez le temps qu'il faut pour lire et comprendre le corrigé. Les questions sont en principe de difficulté croissante, la majorité des élèves auxquels nous avons proposé ces tests donnent entre 50 % et 60 % de réponses justes. Au-delà de 75 % de réponses justes, vous pouvez considérer que votre apprentissage du cours est satisfaisant.

Dans les corrigés, nous ne nous contentons pas de vous donner la bonne réponse, mais nous vous expliquons aussi pourquoi les autres réponses proposées sont fausses. C'est une manière efficace de prendre du recul sur votre cours.

Vous trouverez aussi dans ce livre deux QCM de révisions portant sur la totalité du programme de première et deuxième année. Ils sont étudiés pour vous permettre de cibler les principaux chapitres sur lesquels vos révisions seront les plus efficaces.

Nous espérons que ces QCM trouveront leur place chaque semaine dans votre emploi du temps. C'est au travers d'un investissement régulier que votre travail portera ses fruits.

Les auteurs

Partie 1
Algèbre

1 Espaces vectoriels et applications linéaires

Thèmes abordés

Avec ce QCM, vous évaluez vos compétences sur les sujets suivants :

- Les familles libres, génératrices et les bases
- Les sommes et sommes directes d'espaces vectoriels
- Les projecteurs
- Les applications linéaires
- Le théorème du rang

Consignes

Répondez d'abord aux questions suivantes, puis allez voir **les corrigés page 31**. Nous vous rappelons qu'il n'y a qu'une seule réponse exacte par question. Certaines questions nécessitent d'écrire quelques lignes au brouillon.

1 Soient p, q deux projecteurs d'un espace vectoriel E qui commutent. Laquelle des applications suivantes n'est pas forcément un projecteur ?

❒ **a.** $\mathrm{Id}_E - p$ ❒ **b.** $p + q$

❒ **c.** $p \circ q$ ❒ **d.** $(\mathrm{Id}_E - p) \circ (\mathrm{Id}_E - q)$

2 Soit u,v deux endomorphismes d'un espace vectoriel E de dimension finie avec $\mathrm{rg}\, u \leqslant \mathrm{rg}\, v$. Quel est le rang maximum que peut avoir $v \circ u$?

❒ **a.** $\mathrm{rg}\, u + \mathrm{rg}\, v$ ❒ **b.** $\mathrm{rg}\, v$ ❒ **c.** $\mathrm{rg}\, u$ ❒ **d.** $\mathrm{rg}\, v - \mathrm{rg}\, u$

3 Soit $E = \mathscr{M}_n(\mathbf{R})$, et A dans E, inversible. Quelle application est linéaire ?

❒ **a.** $f_a : M \mapsto AMA^{-1}$ ❒ **b.** $f_b : M \mapsto MA\,{}^tM$

❒ **c.** $f_c : M \mapsto MAM^{-1}$ ❒ **d.** $f_d : M \mapsto A + M$

4 Soit u un endomorphisme d'un espace vectoriel E de dimension finie, F un sous-espace de E stable par u et v l'endomorphisme de F induit par u. Laquelle des implications suivantes n'est pas vraie ?

❒ **a.** si u est un projecteur, v est un projecteur

❒ **b.** si u est une symétrie, v est une symétrie

❒ **c.** si u est non nul, v est non nul

❒ **d.** si u est injectif, v est injectif

5 Soit φ l'endomorphisme de $\mathbf{C}_n[X]$ défini par $\varphi(P) = P(X+1) - P(X)$ pour tout P. Alors φ est de rang

❒ **a.** 1 ❒ **b.** $n-1$ ❒ **c.** n ❒ **d.** $n+1$

6 Soit u un endomorphisme d'un espace vectoriel E de dimension infinie tel que $\operatorname{Ker} u$ soit un hyperplan. Alors

❒ **a.** $\operatorname{rg} u = 1$ ❒ **b.** $\operatorname{rg} u \leqslant 1$ ❒ **c.** $\operatorname{rg} u \geqslant 1$

❒ **d.** u n'est pas forcément de rang fini

7 Soit E un espace vectoriel et $u \in \mathscr{L}(E)$. Les propriétés suivantes sont toutes vraies si E est de dimension finie. Laquelle reste vraie même si E est de dimension infinie ?

❒ **a.** s'il existe $v \in \mathscr{L}(E)$ tel que $u \circ v = \mathrm{Id}_E$ alors u est bijective

❒ **b.** si u est injective alors u est bijective

❒ **c.** si $u \circ u \circ u = \mathrm{Id}_E$ alors u est bijective

❒ **d.** si $\operatorname{Im} u = E$ alors u est bijective

8 Soient F,G deux sous-espaces de E tels que $E = F \oplus G$. Combien existe-t-il d'endomorphismes u de E tels que $u_{|F} = \mathrm{Id}_F$ et $u_{|G} = 0$?

❒ **a.** 0 ❒ **b.** 1 ❒ **c.** une infinité

❒ **d.** cela dépend de F et G

9 Soit E un espace vectoriel et $(F_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ une famille de sous-espaces de E. Pour chaque i on considère une base $\mathscr{B}_i$ de F_i. Notons A la propriété « $E = \bigoplus_{i=1}^{n} F_i$ » et B la propriété « $\bigcup_{i=1}^{n} \mathscr{B}_i$ est une base de E ». Alors

❒ **a.** $A \Longrightarrow B$ ❒ **b.** $B \Longrightarrow A$ ❒ **c.** $A \Longleftrightarrow B$

❒ **d.** il n'y a aucune implication logique entre A et B

10 Soit E un $\mathbf{R}$-espace vectoriel de dimension 3. Combien y a-t-il de décompositions $E = F_1 \oplus F_2 \oplus F_3$ où les F_k sont des sous-espaces quelconques non nuls ?

❒ **a.** une seule ❒ **b.** 6 ❒ **c.** 15 ❒ **d.** une infinité

11 Soit E un espace vectoriel de dimension finie, x_1,x_2,y_1,y_2 des vecteurs de E. Pour qu'il existe un endomorphisme f de E tel que $f(x_1) = y_1$ et $f(x_2) = y_2$ la condition (x_1,x_2) libre est

❒ **a.** nécessaire ❒ **b.** suffisante ❒ **c.** nécessaire et suffisante

❒ **d.** ni nécessaire, ni suffisante

12 Soit E un espace vectoriel de dimension finie et $f \in \mathscr{L}(E)$. Laquelle des conditions suivantes n'est pas suffisante pour affirmer que $E = \operatorname{Ker} f \oplus \operatorname{Im} f$?

❒ **a.** $\operatorname{Ker} f \cap \operatorname{Im} f = \{0\}$ ❒ **b.** f est inversible

❒ **c.** $\operatorname{rg} f = 1$ ❒ **d.** $f^2 = f$

13 Soit $(f_n)_{n\geqslant 0}$ une suite de fonctions de $[-1,1]$ dans $\mathbf{R}$. Pour tout n on note g_n la restriction de f_n à $[0,1]$. Soit (A) l'assertion « la famille $(f_n)_{n\geqslant 0}$ est libre » et (B) l'assertion « la famille $(g_n)_{n\geqslant 0}$ est libre ». Alors

❒ **a.** $(A) \Longrightarrow (B)$ ❒ **b.** $(B) \Longrightarrow (A)$ ❒ **c.** $(A) \Longleftrightarrow (B)$

❒ **d.** il n'y a aucune implication entre (A) et (B)

14 Laquelle des familles suivantes de fonctions est une base de $\mathscr{C}^0([0,1],\mathbf{R})$?

❒ **a.** $(x \mapsto x^n)_{n\in\mathbf{N}}$ ❒ **b.** $(x \mapsto |x-a|)_{a\in[0,1]}$

❒ **c.** $(x \mapsto x^a)_{a\in\mathbf{R}_+^*}$ ❒ **d.** aucune des trois

15 Laquelle des familles suivantes n'est pas une base de $\mathbf{R}[X]$?

❒ **a.** $((X+n)^n)_{n\in\mathbf{N}}$ ❒ **b.** $(X^n+n)_{n\in\mathbf{N}}$

❒ **c.** $(X+X^n)_{n\in\mathbf{N}}$ ❒ **d.** $((X^n+n)^n)_{n\in\mathbf{N}}$

16 Soit u l'application de $\mathscr{M}_n(\mathbf{R})$ dans $\mathscr{M}_n(\mathbf{R})$ définie par $u(M) = M + {}^tM$. Quel est le rang de u ?

❒ **a.** n ❒ **b.** $\dfrac{n(n+1)}{2}$

❒ **c.** $\dfrac{n(n-1)}{2}$ ❒ **d.** u n'est pas linéaire

17 Dans $E = \mathbf{R}[X]$, lequel des ensembles suivants est un sous-espace vectoriel qui admet un supplémentaire de dimension finie ?

❒ **a.** $\{P(X^2),\ P \in E\}$ ❒ **b.** $\{P \in E \,/ \displaystyle\int_0^1 P(t)\,\mathrm{d}t = 1\}$

❒ **c.** $\{X^2P,\ P \in E\}$ ❒ **d.** $\{P \in E \,/\, P$ admet exactement 2 racines $\}$

18 On considère $E = \mathbf{C}[X]$ et $n \geqslant 2$. Dans lequel des cas suivants peut on dire que $E = F_1 \oplus F_2 \oplus \cdots \oplus F_n$?

❒ **a.** $F_k = \mathbf{C}_k[X]$

❒ **b.** $F_k = \{P(X^k), P \in \mathbf{C}[X]\}$

❒ **c.** $F_k = \{P \in \mathbf{C}[X] \ / \ \deg P \equiv k \ [n]\} \cup \{0\}$

❒ **d.** $F_k = \{P \in \mathbf{C}[X] \ / \ P(\omega X) = \omega^k P(X)\}$ où $\omega = e^{\frac{2i\pi}{n}}$

19 Soit E de dimension finie, et $F_1, F_2, \ldots, F_n$ des sous-espaces tels que $E = \sum_{i=1}^{n} F_i$.
On considère la proposition (A) : « E est la somme directe des F_i » et la proposition (B) : « $\sum_{i=1}^{n} \dim F_i = \dim E$ ». Alors

❒ **a.** $A \Longrightarrow B$ ❒ **b.** $B \Longrightarrow A$ ❒ **c.** $A \Longleftrightarrow B$

❒ **d.** il n'y a pas de lien entre les deux propositions

Retrouvez les corrigés du chapitre 1 page 31.

2 Matrices

Thèmes abordés

Avec ce QCM, vous évaluez vos compétences sur les sujets suivants :

- La trace des matrices et des endomorphismes
- La décomposition par blocs des matrices
- Le rang des matrices
- Les opérations sur les lignes et colonnes
- Les systèmes linéaires
- Le calcul matriciel

Consignes

Répondez d'abord aux questions suivantes, puis allez voir **les corrigés page 37**. Nous vous rappelons qu'il n'y a qu'une seule réponse exacte par question. Certaines questions nécessitent d'écrire quelques lignes au brouillon.

Notations. On désigne par **K** le corps **R** ou **C**. Une matrice est parfois identifiée à l'application linéaire qui lui est canoniquement associée.

1 Si A,B sont deux matrices de $\mathscr{M}_n(\mathbf{K})$, les matrices AB et BA ont toujours même

❒ **a.** rang ❒ **b.** trace ❒ **c.** diagonale ❒ **d.** transposée

2 Soit $M \in \mathscr{M}_{2n}(\mathbf{K})$ de la forme $M = \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & A \end{pmatrix}$, où A et B sont dans $\mathscr{M}_n(\mathbf{K})$. Que vaut la matrice M^2 ?

❒ **a.** $\begin{pmatrix} A^2 & B^2 \\ 0 & A^2 \end{pmatrix}$ ❒ **b.** $\begin{pmatrix} AB & BA \\ 0 & A^2 \end{pmatrix}$

❒ **c.** $\begin{pmatrix} A^2 & 2AB \\ 0 & A^2 \end{pmatrix}$ ❒ **d.** $\begin{pmatrix} A^2 & AB+BA \\ 0 & A^2 \end{pmatrix}$

3 Soit A,B dans $\mathscr{M}_n(\mathbf{K})$ telles que $AB = 0$. Alors

❒ **a.** $A = 0$ ou $B = 0$ ❒ **b.** $\operatorname{Im} B \cap \operatorname{Im} A = \{0\}$

❒ **c.** $\operatorname{Im} B \subset \operatorname{Ker} A$ ❒ **d.** $\operatorname{Im} A \subset \operatorname{Ker} B$

4 Soit $E = \mathscr{M}_n(\mathbf{K})$, F l'ensemble des matrices triangulaires supérieures, G l'ensemble des matrices triangulaires inférieures. Alors

❒ **a.** E est la somme directe de F et G

❒ **b.** E est la somme, non directe, de F et G

❒ **c.** E n'est pas la somme de F et G

❒ **d.** F et G ne sont pas des sous-espaces vectoriels de E

5 Soient A,B,C,D quatre matrices de $\mathscr{M}_n(\mathbf{K})$. Alors $ABCD$ a la même trace que

❒ **a.** $DCBA$ ❒ **b.** $BADC$ ❒ **c.** $BCDA$ ❒ **d.** $ACBD$

6 Soit A,B,C des matrices de $\mathscr{M}_n(\mathbf{K})$, P,Q des matrices de $\mathrm{GL}_n(\mathbf{K})$. On définit par blocs les matrices $U = \begin{pmatrix} P & 0 \\ 0 & Q \end{pmatrix}$ et $M = \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & C \end{pmatrix}$ de $\mathscr{M}_{2n}(\mathbf{K})$. La matrice UMU^{-1} vaut :

❒ **a.** $\begin{pmatrix} PAP^{-1} & PBQ^{-1} \\ 0 & QCQ^{-1} \end{pmatrix}$ ❒ **b.** $\begin{pmatrix} PAP^{-1} & PBP^{-1} \\ 0 & QCQ^{-1} \end{pmatrix}$

❒ **c.** $\begin{pmatrix} PAP^{-1} & PBQ^{-1} \\ QBP^{-1} & QCQ^{-1} \end{pmatrix}$ ❒ **d.** $\begin{pmatrix} PAP^{-1} & P^{-1}BQ \\ 0 & QCQ^{-1} \end{pmatrix}$

7 Soit $D = \mathrm{Diag}(d_1, \ldots, d_n) \in \mathscr{M}_n(\mathbf{R})$ une matrice diagonale inversible, et $M = (m_{ij}) \in \mathscr{M}_n(\mathbf{R})$. On pose $A = DMD^{-1}$ et on note (a_{ij}) ses coefficients. Alors

❒ **a.** $A = M$ ❒ **b.** $a_{ij} = d_i d_j m_{ij}$

❒ **c.** $a_{ij} = \dfrac{d_i}{d_j} m_{ij}$ ❒ **d.** $a_{ij} = \dfrac{d_j}{d_i} m_{ij}$

8 Laquelle des matrices suivantes est semblable à $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$?

❒ **a.** $\begin{pmatrix} a+c & b+d \\ c & d \end{pmatrix}$ ❒ **b.** $\begin{pmatrix} d & c \\ b & a \end{pmatrix}$

❒ **c.** $\begin{pmatrix} b & a \\ d & c \end{pmatrix}$ ❒ **d.** $\begin{pmatrix} 2a & 2b \\ 2c & 2d \end{pmatrix}$

9 Soit E un $\mathbf{R}$-espace vectoriel de dimension n et s une symétrie de E par rapport à un sous-espace de dimension p. Alors la trace de s vaut

❒ **a.** p ❒ **b.** $n-p$ ❒ **c.** $n-2p$ ❒ **d.** $2p-n$

10 Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbf{K})$ et $B = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & A \end{pmatrix}$. Quel est le rang de B ?

❒ **a.** $\operatorname{rg} A$ ❒ **b.** $2 \operatorname{rg} A$ ❒ **c.** $(\operatorname{rg} A)^2$ ❒ **d.** $n + \operatorname{rg} A$

11 Soient n,p,q dans $\mathbf{N}^*$, $A \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbf{K})$ et $B \in \mathscr{M}_{p,q}(\mathbf{K})$. On suppose que les colonnes de B engendrent $\mathbf{K}^p$. Alors le rang de AB vaut

❒ **a.** $\operatorname{rg} A$ ❒ **b.** $\operatorname{rg} B$ ❒ **c.** q ❒ **d.** p

12 Soient n,p,q dans $\mathbf{N}^*$, $A \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbf{K})$ et $B \in \mathscr{M}_{p,q}(\mathbf{K})$. On suppose que les lignes de A engendrent $\mathbf{K}^p$. Alors le rang de AB vaut

❒ **a.** $\operatorname{rg} A$ ❒ **b.** $\operatorname{rg} B$ ❒ **c.** $n - \operatorname{rg} A$ ❒ **d.** $p - \operatorname{rg} B$

13 Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbf{K})$, $1 \leqslant r \leqslant n$ et J_r la matrice diagonale de taille n dont les r premiers coefficients diagonaux valent 1 les autres étant nuls. Si (P) désigne l'assertion « $\operatorname{rg} A = r$ » et (Q) l'assertion « $\exists U \in \mathrm{GL}_n(\mathbf{K}),\ A = UJ_r$ », alors :

❒ **a.** $(P) \Longrightarrow (Q)$ ❒ **b.** $(Q) \Longrightarrow (P)$ ❒ **c.** $(P) \Longleftrightarrow (Q)$

❒ **d.** il n'y a aucune implication entre (P) et (Q)

14 Soit $E = \mathscr{M}_n(\mathbf{R})$, F l'ensemble des matrices triangulaires supérieures, G l'ensemble des matrices antisymétriques. Alors

❒ **a.** E est la somme directe de F et G

❒ **b.** E est la somme, non directe, de F et G

❒ **c.** E n'est pas la somme de F et G

❒ **d.** F et G ne sont pas des sous-espaces vectoriels de E

15 Soit E un espace vectoriel de dimension n sur $\mathbf{R}$ et $(f_1, f_2, \ldots, f_n)$ un système de n formes linéaires liées de E^*.

Le système d'équations $f_1(x) = f_2(x) = \cdots = f_n(x) = 1$

❒ **a.** possède exactement 1 solution

❒ **b.** n'admet aucune solution

❒ **c.** admet moins de n solutions

❒ **d.** admet 0 ou une infinité de solutions

16 On considère les matrices $A,B,C \in \mathscr{M}_{2n}(\mathbf{K})$ que l'on décompose en blocs de taille $n \times n$ sous la forme $A = \begin{pmatrix} A_1 & A_2 \\ A_3 & A_4 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} B_1 & B_2 \\ B_3 & B_4 \end{pmatrix}$ et $C = \begin{pmatrix} I_n & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. On suppose que $AC = CB$. Que peut-on en déduire ?

❒ **a.** $A_1 = B_1$ et $B_2 = A_3$ ❒ **b.** $A_1 = B_1$ et $A_4 = B_4 = 0$

❒ **c.** $A_1 = B_2$ et $A_3 = B_1 = 0$ ❒ **d.** $A_1 = B_1$ et $A_3 = B_2 = 0$

17 On suppose que $\begin{pmatrix} -1 & 2 & 5 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & -2 \end{pmatrix} = T \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & -2 \end{pmatrix}$ où $T \in \mathscr{M}_3(\mathbf{R})$. Que vaut la matrice T ?

❒ **a.** $\begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ ❒ **b.** $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

❒ **c.** $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$ ❒ **d.** $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

18 La matrice réelle $M_a = \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ est semblable à la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

❒ **a.** pour tout réel a ❒ **b.** pour a non nul

❒ **c.** seulement pour $a = 1$ ❒ **d.** seulement pour $a > 0$

Retrouvez les corrigés du chapitre 2 page 37.

3 Déterminants

Thèmes abordés

Avec ce QCM, vous évaluez vos compétences sur les sujets suivants :

- Les généralités sur les permutations, la signature
- Le déterminant, une forme n-linéaire et alternée
- L'expression développée du déterminant
- La multiplicativité du déterminant
- La caractérisation des bases et des isomorphismes
- Le développement d'un déterminant selon une ligne ou une colonne
- Le déterminant d'une matrice triangulaire par blocs
- La comatrice

Consignes

Répondez d'abord aux questions suivantes, puis allez voir **les corrigés page 44**. Nous vous rappelons qu'il n'y a qu'une seule réponse exacte par question. Certaines questions nécessitent d'écrire quelques lignes au brouillon.

Notations. K désigne indifféremment $\mathbf{R}$ ou $\mathbf{C}$.

1 Si $B \in \mathscr{M}_n(\mathbf{K})$ est une matrice carrée de taille n, alors $\det(nB)$ est égal à

❒ **a.** $n\det(B)$ ❒ **b.** $n!\det(B)$ ❒ **c.** $n^n\det(B)$ ❒ **d.** $\det(B)^n$

2 Le déterminant de la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 1 & x \\ 2 & 1 & y \\ 3 & 2 & z \end{pmatrix}$ est égal à

❒ **a.** $x+y+z$ ❒ **b.** $x-y+z$ ❒ **c.** $x-y-z$ ❒ **d.** $x+y-z$

3 Soit $A \in \mathscr{M}_4(\mathbf{R})$ une matrice de déterminant -1. Laquelle des matrices suivantes n'a pas le même déterminant que A ?

❒ **a.** ${}^tA$ ❒ **b.** A^{-1} ❒ **c.** $-A$ ❒ **d.** A^2

4 Soient A,B deux matrices inversibles de $\mathscr{M}_n(\mathbf{K})$ et $C = ABA^{-1}B^{-1}$. Le déterminant de C

❐ **a.** vaut 1 car C est l'identité
❐ **b.** ne vaut 1 que si A et B commutent
❐ **c.** vaut toujours 1
❐ **d.** ne peut pas être calculé en général

5 La comatrice de $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -3 \end{pmatrix}$ est

❐ **a.** $\begin{pmatrix} -3 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$
❐ **b.** $\begin{pmatrix} -3 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$
❐ **c.** $\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$
❐ **d.** $\begin{pmatrix} -3 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$

6 Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbf{K})$ une matrice inversible. On effectue toutes les permutations possibles sur les lignes de A et on calcule les déterminants des matrices obtenues. Combien de résultats différents obtient-on ?

❐ **a.** 1
❐ **b.** 2
❐ **c.** n
❐ **d.** $n!$

7 Dans l'espace des polynômes réels de degré $\leqslant n$, quel est le déterminant de l'application linéaire $P \mapsto P'$?

❐ **a.** 0
❐ **b.** 1
❐ **c.** $n!$
❐ **d.** $(n+1)!$

8 Pour quelles valeurs du réel a la matrice $\begin{pmatrix} 1+a & 1 & 1 \\ 1 & 1+a & 1 \\ 1 & 1 & 1+a \end{pmatrix}$ est-elle inversible ?

❐ **a.** pour $a \neq 0$
❐ **b.** pour $a \neq 0$ et $a \neq -1$
❐ **c.** pour $a \neq 0$ et $a \neq -2$
❐ **d.** pour $a \neq 0$ et $a \neq -3$

9 Pour calculer le déterminant de $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 3 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 3 & 2 \\ -4 & 2 & 1 & 0 & 4 \\ 2 & 1 & 4 & -7 & 0 \\ 1 & 2 & 7 & 3 & 0 \end{pmatrix}$, quelle méthode est la plus efficace ?

❐ **a.** le pivot de Gauss

❐ **b.** le développement suivant la première ligne

❐ **c.** le développement suivant la dernière colonne

❐ **d.** le calcul du déterminant de l'endomorphisme associé

10 Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbf{R})$ une matrice dont les coefficients $a_{i,j}$ sont tous dans $[-1,1]$. Alors $|\det A|$ est inférieur à

❒ **a.** 1 ❒ **b.** n ❒ **c.** $n!$ ❒ **d.** on ne peut pas savoir

11 Combien vaut le déterminant de $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 7 & -1 & 0 & 2 \\ 2 & 3 & 3 & -1 & -4 & 5 \\ 0 & 0 & 4 & 6 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 2 & 3 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 4 \end{pmatrix}$?

❒ **a.** -2 ❒ **b.** 0 ❒ **c.** 1 ❒ **d.** 48

12 Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbf{R})$. On note (P) la propriété « tous les coefficients de A sont dans $\mathbf{Q}$ » et (Q) la propriété « $\det A \in \mathbf{Q}$ ». Alors

❒ **a.** $(P) \Longrightarrow (Q)$ ❒ **b.** $(P) \Longleftrightarrow (Q)$ ❒ **c.** $(Q) \Longrightarrow (P)$

❒ **d.** il n'y a aucune implication entre (P) et (Q)

13 Soit $\mathscr{B} = (e_1,e_2,\ldots,e_n)$ une base d'un espace vectoriel E et x un vecteur de E. Dans la base $\mathscr{B}$ la coordonnée de x selon le vecteur e_1 vaut :

❒ **a.** $\det_{\mathscr{B}}(e_1,x,x,\ldots,x)$ ❒ **b.** $\det_{\mathscr{B}}(e_1,e_2+x,\ldots,e_n+x)$

❒ **c.** $\det_{\mathscr{B}}(x,e_2,\ldots,e_n)$ ❒ **d.** $\det_{\mathscr{B}}(x+e_1,e_2,\ldots,e_n)$

14 Soient $C_1,\ldots,C_n$ des vecteurs colonnes de $\mathbf{K}^n$. On suppose que

$$\det(C_1,C_2,C_3,\ldots,C_n) = \det(C_2,C_1,C_3,\ldots,C_n)$$

Alors on peut en déduire que :

❒ **a.** $C_1 = C_2$ ❒ **b.** $C_1 = 0$ ou $C_2 = 0$ ❒ **c.** C_1 et C_2 sont liés

❒ **d.** $(C_1,\ldots,C_n)$ est une famille liée

15 Soit A une matrice carrée réelle de taille n et de déterminant 2. Sa comatrice B a pour déterminant

❒ **a.** 1 ❒ **b.** 2 ❒ **c.** 2^{n-1} ❒ **d.** $1/2$

16 Soit E un espace vectoriel de dimension n, $\mathscr{B}$ une base de E et $(x_1,\ldots,x_n)$, $(y_1,\ldots,y_n)$ deux familles de n vecteurs de E.

Lorsqu'on développe complètement $\det_{\mathscr{B}}(x_1+y_1,\ldots,x_n+y_n)$ par multilinéarité on obtient

❒ **a.** 2 termes ❒ **b.** $2n$ termes

❒ **c.** n^2 termes ❒ **d.** 2^n termes

17 Soit $A \in GL_n(\mathbf{K})$. Si A est semblable à son inverse on peut dire que

❒ **a.** $\operatorname{Tr} A = 0$ ❒ **b.** $\det A = \pm 1$ ❒ **c.** $A^2 = I_n$

❒ **d.** rien car la situation évoquée n'est pas possible

18 Soit $A = (a_{ij})_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$ et $B = (b_{ij})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$ la comatrice de A. On note $(E_{ij})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$ la base des matrices élémentaires. Que vaut $\det(A + E_{ij})$?

❒ **a.** $\det(A)$ ❒ **b.** $\det(A) + 1$

❒ **c.** $\det(A) + b_{ij}$ ❒ **d.** $\det(A) + (-1)^{i+j} b_{ij}$

19 Soit n un entier pair, et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$. On note $C_1, C_2, \ldots, C_n$ les colonnes de A, et on construit la matrice $B = (C_n \mid C_{n-1} \mid \cdots \mid C_1)$ en réordonnant les colonnes de A. Quelle relation y a-t-il entre les déterminants de A et de B ?

❒ **a.** $\det A = \det B$ ❒ **b.** $\det A = -\det B$

❒ **c.** $\det A = (-1)^n \det B$ ❒ **d.** $\det A = (-1)^{n/2} \det B$

20 Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ et J la matrice dont les coefficients de la dernière colonne valent 1, les autres coefficients étant tous nuls. La fonction

$$f : x \mapsto \det(A + xJ)$$

❒ **a.** est un polynôme de degré $\leqslant 1$

❒ **b.** est un polynôme de degré $\leqslant n$

❒ **c.** est un polynôme de degré $\leqslant n!$

❒ **d.** n'est pas une fonction polynôme

21 Soit A,B,C trois matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbf{K})$. En général, combien y a-t-il de déterminants différents parmi les 4 suivants ?

$$\begin{vmatrix} A & B \\ 0 & C \end{vmatrix} \qquad \begin{vmatrix} 0 & A \\ C & B \end{vmatrix} \qquad \begin{vmatrix} C & 0 \\ B & A \end{vmatrix} \qquad \begin{vmatrix} A & B \\ C & 0 \end{vmatrix}$$

❒ **a.** 1 ❒ **b.** 2 ❒ **c.** 3 ❒ **d.** 4

Retrouvez les corrigés du chapitre 3 page 44.

4 Formes linéaires et dualité

Thèmes abordés

Avec ce QCM, vous évaluez vos compétences sur les sujets suivants :

- L'espace vectoriel des formes linéaires
- La notion de base duale et de base antéduale
- Les hyperplans comme noyaux de formes linéaires

Consignes

Répondez d'abord aux questions suivantes, puis allez voir **les corrigés page 50**. Nous vous rappelons qu'il n'y a qu'une seule réponse exacte par question. Certaines questions nécessitent d'écrire quelques lignes au brouillon.

Notations. Sauf indication contraire, E désigne un espace vectoriel réel de dimension quelconque.

1 On suppose $\dim E = n$. Soit $(e_1, \ldots, e_n)$ une base de E et $(e_1^*, \ldots, e_n^*)$ sa base duale. Combien vaut le réel $(e_1^* + e_2^* + e_3^*)(e_1 + e_2 + e_3)$?

❒ **a.** 1 ❒ **b.** 3 ❒ **c.** 9 ❒ **d.** $3n$

2 Soient f et g deux formes linéaires non nulles sur E, (A) la propriété « (f,g) est liée » et (B) la propriété « $\operatorname{Ker} f = \operatorname{Ker} g$ ». Alors

❒ **a.** $(A) \Longrightarrow (B)$ ❒ **b.** $(B) \Longrightarrow (A)$ ❒ **c.** $(A) \Longleftrightarrow (B)$

❒ **d.** il n'y a pas d'implication entre (A) et (B)

3 Soit $u \in \mathscr{L}(E)$ et $\varphi \in \mathscr{L}(E^*)$ définie par $\varphi(f) = f \circ u$ pour tout $f \in E^*$. Que vaut $\operatorname{Ker} \varphi$?

❒ **a.** $\operatorname{Ker} u \cap \operatorname{Ker} f$ ❒ **b.** $\operatorname{Ker} u$

❒ **c.** $\mathscr{L}(E^*, \operatorname{Im} u)$ ❒ **d.** $\{f \in E^*, \operatorname{Im} u \subset \operatorname{Ker} f\}$

4 Si f est une forme linéaire sur $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$, alors il existe une matrice A telle que pour tout M, $f(M) =$

❒ **a.** AM ❒ **b.** $\mathrm{Tr}(AMA^{-1})$ ❒ **c.** $\mathrm{Tr}(A)$ ❒ **d.** $\mathrm{Tr}(AM)$

5 Soit e_1,e_2,e_3 trois vecteurs de $\mathbf{R}^5$. L'espace vectoriel des formes linéaires f qui s'annulent sur chaque e_i est un sous-espace du dual de $\mathbf{R}^5$ de dimension

❒ **a.** 2 ❒ **b.** $\geqslant 2$ ❒ **c.** $\leqslant 3$ ❒ **d.** 3

6 Soit E l'espace des matrices triangulaires supérieures de taille n, et F le sous-espace des matrices de E de trace nulle. Quelle est la dimension de F ?

❒ **a.** $n^2 - 1$ ❒ **b.** $\dfrac{n(n+1)}{2} - 1$

❒ **c.** $\dfrac{n(n-1)}{2}$ ❒ **d.** $\dfrac{n(n-1)}{2}$

7 Soit (e_1,e_2) une base d'un plan vectoriel E et (φ_1,φ_2) sa base duale. Quelle est la base duale de la base $(e_1 + e_2,e_2)$?

❒ **a.** $(\varphi_1 + \varphi_2, \varphi_2)$ ❒ **b.** $(\varphi_1, \varphi_1 + \varphi_2)$

❒ **c.** $(\varphi_1, \varphi_1 - \varphi_2)$ ❒ **d.** $(\varphi_1, \varphi_2 - \varphi_1)$

8 Soit $E = \mathbf{R}_n[X]$, et $a_0, \ldots, a_n$ des réels deux à deux distincts. Pour tout k on pose $\varphi_k(P) = P(a_k)$. Alors

❒ **a.** $(\varphi_0, \ldots, \varphi_n)$ est la base duale de la base d'interpolation de Lagrange

❒ **b.** $(\varphi_0, \ldots, \varphi_n)$ est la base duale de $((X - a_k)^n)_{0 \leqslant k \leqslant n}$

❒ **c.** $(\varphi_0, \ldots, \varphi_n)$ est la base duale de $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$

❒ **d.** $(\varphi_0, \ldots, \varphi_n)$ n'est pas une base de E^*

9 On considère une base (e_1,e_2,e_3) de $\mathbf{R}^3$, avec $e_1 = (1,0,0)$, $e_2 = (1,1,0)$ et $e_3 = (1,1,1)$. On note (e_1^*, e_2^*, e_3^*) la base duale. Que vaut $e_1^*(x,y,z)$?

❒ **a.** x ❒ **b.** $x - y$ ❒ **c.** $x + y - z$ ❒ **d.** $y + z$

10 On considère les deux formes linéaires f et g sur $\mathbf{R}^2$ définies par $f(x,y) = x + y$ et $g(x,y) = x + 2y$. Alors (f,g) est la base duale de

❒ **a.** $((1,1),(1,2))$ ❒ **b.** $((-1,1),(-2,1))$

❒ **c.** $((2,-1),(-1,1))$ ❒ **d.** $((0,1),(1,-\frac{1}{2}))$

11 On considère un vecteur non nul e_1 de $\mathbf{R}^2$ et une forme linéaire non nulle φ_1 sur $\mathbf{R}^2$. Combien y a-t-il de couples (e_2,φ_2) formés d'un vecteur et d'une forme linéaire tels que (e_1,e_2) et (φ_1,φ_2) soient des bases duales l'une de l'autre ?

❒ **a.** 1 ❒ **b.** 0 ou 1 selon la valeur de $\varphi_1(e_1)$

❒ **c.** une infinité ❒ **d.** 0 ou une infinité selon la valeur de $\varphi_1(e_1)$

12 Combien y a-t-il de polynômes $P \in \mathbf{R}_2[X]$ tels que $\displaystyle\int_0^1 P = 1$, $\displaystyle\int_{-1}^0 P = 0$ et $P(1) = 0$?

❒ **a.** aucun ❒ **b.** 1 ❒ **c.** 2 ❒ **d.** une infinité

Retrouvez les corrigés du chapitre 4 page 50.