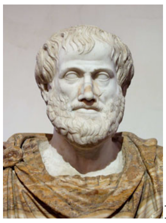
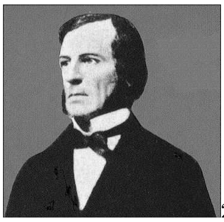
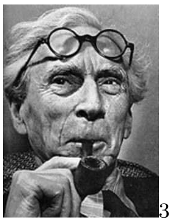
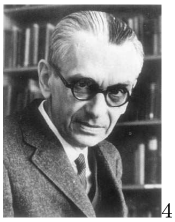
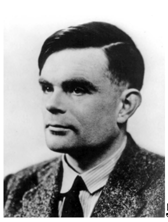
Chapitre I

Logique classique

À proprement parler la Logique n'est pas une branche des Mathématiques. Disons que les Mathématiques utilisent une petite partie de la Logique afin de solidifier ses bases, la théorie des ensembles, que nous introduirons au chapitre VI. Du grec λόγος signifiant *le discours, la raison*, la Logique trouve son origine dans l'élaboration des oraisons politiques censées convaincre les auditeurs.


1

2

3

4

5

Après Aristote[1] (384-322 av. J.-C.), la Logique prit une forme mathématisée au xix$^{\text{e}}$ avec George Boole[2] (qui a donné son nom aux *variables booléennes*, ne valant que 0 ou 1).

Bertrand Russell[3] marqua la Logique avec ses célèbres contre-exemples et Kurt Gödel[4] fit sensation en démontrant en 1931 qu'il existait des énoncés mathématiques indémontrables !

Rendons enfin honneur au logicien britannique Alan Turing[5] qui décoda les messages secrets nazis produits par la machine enigma pendant la Seconde Guerre, et fut le père des premiers ordinateurs. Pour le récompenser, on lui réserva une fin des plus tragiques : condamné à la castration chimique à cause de son homosexualité, il se suicida en 1954 en croquant une pomme injectée de cyanure. C'est peut-être pour lui rendre hommage que tant d'ordinateurs arborent aujourd'hui une pomme croquée...

1 Vocabulaire de la Logique classique

Une assertion est une phrase pouvant être ou bien vraie ou bien fausse. Dans ce cours nous noterons les assertions par des lettres rondes ($\mathscr{A}$, $\mathscr{B}$, $\mathscr{C}$, etc.)
Exemple. $\mathscr{A}$: « $1+3=4$ » est une assertion vraie, $\mathscr{B}$: « $\sqrt{10}=5$ » est une assertion fausse, mais « 2+6 » n'est pas une assertion ! Dans la pratique, il est d'usage de résumer « l'assertion $\mathscr{A}$ est vraie » par simplement « $\mathscr{A}$ ». Ainsi dit-on simplement « $1+3=4$ » quand on devrait en toute rigueur dire « $1+3=4$ est une assertion vraie ».

Les valeurs de vérité sont les valeurs *vraie* (notée 1) et *fausse* (notée 0). Une assertion ou bien vraie, ou bien fausse : c'est **le principe du tiers exclu**.

Un prédicat est une assertion qui dépend d'un ou de plusieurs paramètres.
Exemple. $\mathscr{A}(a)$: « l'équation $x^2 = a$ admet des solutions dans $\mathbb{R}$ » : $\mathscr{A}(3)$ est vraie mais $\mathscr{A}(-1)$ est fausse. Dans un raisonnement par récurrence il est courant de noter $\mathscr{P}_n$ un prédicat qui dépend d'un entier naturel n.

La négation d'une assertion $\mathscr{A}$ est l'assertion notée $\neg\mathscr{A}$ ou parfois $\overline{\mathscr{A}}$ prenant la valeur de vérité opposée de celle de $\mathscr{A}$.
Exemple 1. La négation de $\mathscr{A}$: « $x = 2$ » est $\neg\mathscr{A}$: « $x \neq 2$ ».
Exemple 2. La négation de $\mathscr{A}$: « $x < 2$ » est $\neg\mathscr{A}$: « $x \geqslant 2$ ».

Une tautologie est un prédicat qui est toujours vrai, quelles que soient les valeurs de son (ou ses) paramètres.
Exemple. $\mathscr{A}(a)$: « $(a+1)^2 = a^2 + 2a + 1$ » est une tautologie si $a \in \mathbb{C}$.

Deux assertions $\mathscr{A}$ et $\mathscr{B}$ sont dites **logiquement équivalentes** quand elles ont la même valeur de vérité. On note cela $\mathscr{A} \equiv \mathscr{B}$.

2 Conjonction et disjonction

Considérons deux assertions $\mathscr{A}$ et $\mathscr{B}$.

- l'assertion notée $\mathscr{A} \wedge \mathscr{B}$ est vraie seulement lorsque $\mathscr{A}$ et $\mathscr{B}$ sont vraies, c'est la **conjonction** de $\mathscr{A}$ et de $\mathscr{B}$, que l'on peut aussi noter $\mathscr{A}$ ET $\mathscr{B}$.

- L'assertion notée $\mathscr{A} \vee \mathscr{B}$ est vraie lorsque l'une, au moins, des assertions $\mathscr{A}$ ou $\mathscr{B}$ est vraie : c'est la **disjonction** de $\mathscr{A}$ et de $\mathscr{B}$ que l'on note aussi $\mathscr{A}$ OU $\mathscr{B}$.

On synthétise cela grâce aux *tables de vérités* des connecteurs $\wedge$ et $\vee$:

$\mathscr{A}$	$\mathscr{B}$	$\mathscr{A} \wedge \mathscr{B}$
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

$\mathscr{A}$	$\mathscr{B}$	$\mathscr{A} \vee \mathscr{B}$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

Il est évident que $\mathscr{A} \wedge \mathscr{B} \equiv \mathscr{B} \wedge \mathscr{A}$ et que $\mathscr{A} \vee \mathscr{B} \equiv \mathscr{B} \vee \mathscr{A}$.

Théorème 1 *(de* DE MORGAN*)*
Soient $\mathscr{A}$ et $\mathscr{B}$ deux assertions. Alors

$$\neg(\mathscr{A} \wedge \mathscr{B}) \equiv (\neg\mathscr{A}) \vee (\neg\mathscr{B}).$$

De même, $\neg(\mathscr{A} \vee \mathscr{B}) \equiv (\neg\mathscr{A}) \wedge (\neg\mathscr{B})$.

Certains retiennent ce théorème en disant que le ET est le contraire du OU, mais comme on peut le constater, cette formulation est imprécise.

Exemple. Pour pouvoir rentrer au lycée un élève doit avoir son carnet de correspondance ou sa carte de lycéen (les deux ça marche aussi !). Pour qu'un élève ne puisse rentrer il doit donc n'avoir ni son carnet, ni sa carte (c'est bien une conjonction).

Théorème 2 *(distributivité)*
Soient $\mathscr{A}$, $\mathscr{B}$ et $\mathscr{C}$ trois assertions. Alors

$$(\mathscr{A} \wedge \mathscr{B}) \vee \mathscr{C} \equiv (\mathscr{A} \vee \mathscr{C}) \wedge (\mathscr{B} \vee \mathscr{C}).$$

De même, $(\mathscr{A} \vee \mathscr{B}) \wedge \mathscr{C} \equiv (\mathscr{A} \wedge \mathscr{C}) \vee (\mathscr{B} \wedge \mathscr{C})$.

On notera l'étrange analogie avec la règle opératoire $(a + b) \cdot c = (a \cdot c) + (b \cdot c)$, qui donne son nom au théorème 2.

Preuve. Les théorèmes 1 et 2 se démontrent facilement à l'aide de tables de vérité. □

Le OU exclusif. Dans la phrase « fromage ou dessert » souvent lue dans les menus, il est sous-entendu que l'on ne peut prendre en même temps le fromage et le dessert. Il ne s'agit pas du connecteur $\vee$, mais d'un OU *exclusif.*

On notera $\mathscr{A} \dot{\vee} \mathscr{B}$, ou parfois $\mathscr{A}$ xor $\mathscr{B}$, l'assertion qui est vraie seulement quand $\mathscr{A}$ et $\mathscr{B}$ ont des valeurs de vérité différentes : c'est donc $(\mathscr{A} \vee \mathscr{B}) \wedge \neg(\mathscr{A} \wedge \mathscr{B})$.

3 Les quantificateurs existentiel et universel

Soit $\mathscr{P}(x)$ un prédicat portant sur une variable x d'un ensemble E. On écrit

- $\forall x \in E \ \mathscr{P}(x)$ pour dire que « quel que soit $x \in E$, $\mathscr{P}(x)$ est vraie ».

- $\exists x \in E \ ; \mathscr{P}(x)$ quand « il existe (au moins) un $x \in E$ tel que $\mathscr{P}(x)$ est vraie ».

Dans ces deux constructions, la lettre x est *muette*, c'est-à-dire que chacune de ses occurrences peut être remplacée par n'importe quelle autre lettre. Ainsi, l'assertion $\forall x \in E \ \mathscr{P}(x)$ est logiquement équivalente à $\forall y \in E \ \mathscr{P}(y)$.

Exemples.
- L'assertion (vraie) $\forall x \in \mathbb{R} \ x^2 \geqslant 0$ peut se lire plus élégamment « tout réel a un carré positif ou nul », phrase dans laquelle la lettre x n'apparaît pas !
- L'assertion (vraie) $\exists x \in \mathbb{C} \ ; \ z^2 = -1$ peut quant à elle être lue « on peut trouver un complexe dont le carré égale -1 ».
- On sait que tout réel positif admet une racine carrée. Ce fait peut s'écrire $\forall x \in \mathbb{R}_+ \ \exists r \in \mathbb{R} \ ; \ x = r^2$.
- On sait que $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$. Ainsi, il existe des rationnels positifs sans racine carrée, ce qui s'écrit $\exists x \in \mathbb{Q}_+ \ ; \ \forall r \in \mathbb{Q} \ x \neq r^2$.

Négation d'une assertion quantifiée. Notons F l'ensemble de toutes les fleurs. L'assertion « $\forall x \in F$ x est rouge » étant fausse, sa négation doit être vraie. Contrairement à ce que le débutant croit, le contraire de « toutes les fleurs sont » n'est pas « aucune fleur n'est », sinon la négation de la phrase précédente serait « aucune fleur n'est rouge », ce qui est tout aussi faux !

Propriété 1 *(négation d'une quantification)*
Soit $\mathscr{P}(x)$ un prédicat à une variable x, élément d'un ensemble E. Alors

$$\neg(\forall x \in E\ \mathscr{P}(x)) \equiv \exists x \in E\ ;\ \neg\mathscr{P}(x).$$

De même, $\neg(\exists x \in E\ ;\ \mathscr{P}(x)) \equiv \forall x \in E\ \neg\mathscr{P}(x)$.

PIÈGE !
Certains veulent trop bien faire et pensent que la négation de $\forall x \in E\ \mathscr{P}(x)$ est $\exists x \boxed{\notin} E\ ;\ \neg\mathscr{P}(x)$. C'est bien sûr une erreur, l'exemple des fleurs rouges suffit à s'en convaincre.

Succession de quantificateurs. On note P l'ensemble des portes munies d'une serrure d'un lycée et C l'ensemble des clefs que possède le gardien de ce lycée.

- L'assertion « $\forall x \in P\ \exists y \in C\ ;\ y$ ouvre x » signifie que le gardien peut ouvrir toutes les portes (traduit en français courant).
- L'assertion « $\exists y \in C\ ; \forall x \in P\ ;\ y$ ouvre x » signifie quant à elle que le gardien possède un passe !

On constate de façon plus générale la propriété suivante.

Propriété 2 *(interversion des quantificateurs)*
Soit $\mathscr{P}(x, y)$ un prédicat à deux variables.
Si l'assertion $\exists y\ ; \forall x\ \mathscr{P}(x, y)$ est vraie, alors l'assertion $\forall x\ \exists y\ ;\ \mathscr{P}(x, y)$ est vraie elle aussi. La réciproque est fausse en général.

Notons que dans $\forall x \in P\ \exists y \in C\ ;\ y$ ouvre x, la clef y qui ouvre la porte x **dépend** bien sûr de la porte. Il est d'usage de noter cette dépendance, et d'écrire ainsi

$$\forall x \in P\ \exists y_x \in C\ ;\ y_x \text{ ouvre } x.$$

À l'inverse, dans $\exists y \in C\ ; \forall x \in P\ y$ ouvre x, le y est valable pour toutes les portes, on dit qu'il est valable *uniformément*.

Existence et unicité. Enfin, il est courant de vouloir signaler l'unicité d'un objet qui existe. Pour écrire qu'il existe *un unique* x dans E tel que $\mathscr{P}(x)$ soit vraie, on note

$$\exists! x \in E\ ;\ \mathscr{P}(x).$$

Ce symbole $\exists!$ n'est pas un vrai quantificateur, on pourrait s'en dispenser quitte à alourdir les formulations (cf. exercices).

Remarque. Pour une petite partie des mathématiciens, les *constructivistes*, un objet n'existe vraiment que si l'on est capable de le construire effectivement, à l'aide d'un algorithme par exemple. Ces considérations sont intéressantes et amènent à d'autres formes de logiques dans laquelle le principe du tiers exclu est remis en cause. Bien sûr, cela ne nous concernera pas dans ce cours.

4 L'implication

Si $\mathscr{A}$ et $\mathscr{B}$ sont deux assertions, on crée une troisième assertion notée $\mathscr{A} \implies \mathscr{B}$ qui est vraie lorsqu'on « peut démontrer » $\mathscr{B}$ à partir de $\mathscr{A}$. Améliorons cette définition peu rigoureuse.

La négation de $\mathscr{A} \implies \mathscr{B}$ signifie que $\mathscr{A}$ n'implique pas $\mathscr{B}$, ce qui est équivalent à dire qu'on peut avoir $\mathscr{A}$ sans pour autant avoir $\mathscr{B}$, ou de façon formalisée, $\mathscr{A} \wedge \neg\mathscr{B}$. Grâce aux règles de De Morgan on pense donc à définir l'implication de la manière suivante :

$$\mathscr{A} \implies \mathscr{B} \quad \equiv \quad \neg\mathscr{A} \vee \mathscr{B}.$$

On en déduit alors le tableau de vérité du connecteur $\implies$.

$\mathscr{A}$	$\mathscr{B}$	$\mathscr{A} \implies \mathscr{B}$
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	1

Exemple. L'assertion : « J'aurai un passeport et un visa, ou je n'irai pas aux USA » ne comporte pas le mot « donc » pourtant c'est une implication :

$$\neg(\text{J'ai un passeport} \wedge \text{j'ai un visa}) \implies \text{Je ne vais pas aux USA.}$$

Notons au passage qu'il est mathématiquement incorrect d'écrire « j'ai un passeport $\wedge$ un visa », car « un visa » n'est pas une assertion !

Conditions nécessaires, conditions suffisantes. Quand une implication $\mathscr{A} \implies \mathscr{B}$ est vraie, on dit

- que $\mathscr{A}$ est une *condition suffisante* pour que $\mathscr{B}$ soit vraie.
- que $\mathscr{B}$ est une *condition nécessaire* pour que $\mathscr{A}$ soit vraie.

Par exemple, considérons l'implication

$$\text{Avoir 18 de moyenne générale aux épreuves du Bac} \implies \text{Avoir son Bac.}$$

Le lecteur a tout de suite compris qu'avoir 18 de moyenne était (largement) suffisant pour avoir son Bac. À l'inverse, pour pouvoir se vanter d'avoir eu 18 de moyenne, il est nécessaire d'avoir eu son Bac (mais ce n'est pas suffisant !).

Le faux implique ce qu'on veut. La table de vérité du connecteur $\implies$ permet de voir que lorsque $\mathscr{A}$ est fausse, l'implication $\mathscr{A} \implies \mathscr{B}$ est vraie, peu importe $\mathscr{B}$.

Cet exemple surprenant a été expliqué par B. RUSSELL à l'un de ses étudiants qui ne le comprenait pas : « Mais alors, dit l'étudiant, si on suppose que $0 = 1$, vous pouvez montrer n'importe quoi ? par exemple que vous êtes le Pape ? », ce que fit sur-le-champ le célèbre logicien :

- on suppose que $0 = 1$ (assertion $\mathscr{A}$),
- on ajoute 1 de chaque côté pour obtenir $1 = 2$,
- le Pape et moi sommes 2 personnes. Mais comme $2 = 1$, ces deux personnes n'en font qu'une,
- je suis donc le Pape (assertion $\mathscr{B}$).

L'assertion $\mathscr{A} \Longrightarrow \mathscr{B}$ est vraie, pourtant ni $\mathscr{A}$ ni $\mathscr{B}$ ne le sont !

Ainsi le débutant pense avoir juste quand il arrive au bon résultat, oui mais en supposant quelque chose dont on n'est pas sûr (typiquement il suppose le résultat).

Que veut dire « donc » ? Ce mot n'est pas un substitut au connecteur $\Longrightarrow$. Comparer les deux phrases suivantes :

- Si je suis très malade, alors je n'irai pas au lycée.
- Je suis très malade, donc je n'irai pas au lycée.

Si l'on veut formaliser, on s'aperçoit que « $\mathscr{A}$ donc $\mathscr{B}$ » signifie en fait

$$(\mathscr{A} \text{ est vraie}) \wedge ([\mathscr{A} \Longrightarrow \mathscr{B}] \text{ est vraie}),$$

qui entraîne le fait que $\mathscr{B}$ soit vraie (c'est le principe du *modus ponens*).

Réciproque et contraposée. Si $\mathscr{A} \Longrightarrow \mathscr{B}$ est une implication, on appelle

- *réciproque* de $\mathscr{A} \Longrightarrow \mathscr{B}$ l'assertion $\mathscr{B} \Longrightarrow \mathscr{A}$.
- *contraposée* de $\mathscr{A} \Longrightarrow \mathscr{B}$ l'assertion $\neg\mathscr{B} \Longrightarrow \neg\mathscr{A}$.

Théorème *(contraposée)*
Si $\mathscr{A}$ et $\mathscr{B}$ sont deux assertions, alors

$$(\mathscr{A} \Longrightarrow \mathscr{B}) \equiv (\neg\mathscr{B} \Longrightarrow \neg\mathscr{A}).$$

En revanche, $(\mathscr{A} \Longrightarrow \mathscr{B}) \not\equiv (\mathscr{B} \Longrightarrow \mathscr{A})$ en général.

Exemple. Considérons l'assertion « Je suis très malade $\Longrightarrow$ je ne vais pas au lycée ».

- Sa contraposée est « Je vais au lycée $\Longrightarrow$ je ne suis pas très malade », ce qui est bien la même chose que l'implication de départ.
- Sa réciproque est « Je ne vais pas au lycée $\Longrightarrow$ je suis très malade », qui est bien sûr fausse, comme le savent tous les filous de l'école buissonnière.

Le connecteur $\Longleftrightarrow$. Si $\mathscr{A}$ et $\mathscr{B}$ sont deux assertions on note $\mathscr{A} \Longleftrightarrow \mathscr{B}$ l'assertion

$$(\mathscr{A} \Longrightarrow \mathscr{B}) \wedge (\mathscr{B} \Longrightarrow \mathscr{A}).$$

Quand elle est vraie, on dit alors « $\mathscr{A}$ si et seulement si $\mathscr{B}$ ». Une table de vérité montrerait que $\neg(\mathscr{A} \Longleftrightarrow \mathscr{B}) \equiv \mathscr{A} \dot{\vee} \mathscr{B}$.

5 Les grands types de raisonnement

Le raisonnement par contraposée. Il consiste à montrer une implication $\mathscr{A} \Longrightarrow \mathscr{B}$ en montrant sa contraposée $\neg\mathscr{B} \Longrightarrow \neg\mathscr{A}$ qui lui est équivalente.

Exemple. Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que si n^2 est impair, alors n est impair aussi.

Une approche directe est déroutante : si n^2 est impair on peut écrire $n^2 = 2k+1$ avec $k \in \mathbb{N}$, mais que faire après ? prendre la racine carrée ? cela ne semble pas aboutir.

Raisonnons par contraposée : supposons que n ne soit pas impair, c'est-à-dire que n soit pair. On peut l'écrire $n = 2k$ avec $k \in \mathbb{N}$. On en déduit que $n^2 = 4k^2 = 2k'$ avec $k' = 2k^2 \in \mathbb{N}$. Ainsi n^2 est pair, donc n'est pas impair. En contraposant, on a gagné !

Le raisonnement par l'absurde. Souvent confondu (à tort) avec le raisonnement par contraposée, ce type de raisonnement est lui aussi utilisé pour démontrer une implication $\mathscr{A} \Longrightarrow \mathscr{B}$. Son principe est simple : si on suppose en même temps que $\mathscr{A}$ est vraie et que $\mathscr{B}$ est fausse, cela doit mener à une absurdité. On introduit généralement un raisonnement par l'absurde par la phrase « supposons $\mathscr{A}$ et imaginons un instant que $\mathscr{B}$ soit fausse », puis on s'applique à trouver une contradiction.

Formellement parlant, le raisonnement par l'absurde consiste à établir que

$$\mathscr{A} \Longrightarrow \mathscr{B} \quad \equiv \quad (\mathscr{A} \wedge \neg\mathscr{B}) \Longrightarrow \mathscr{F},$$

où $\mathscr{F}$ est une assertion fausse, par exemple $\mathscr{B} \wedge \neg\mathscr{B}$. Le lecteur est invité à dresser une table de vérité pour prouver cette équivalence logique.

Exemple. Le plus célèbre raisonnement par l'absurde est certainement le fameux $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$. Mais où est l'implication à montrer ? Elle est un peu cachée mais elle est bien présente :

$$\forall x \ (x \in \mathbb{Q} \Longrightarrow x^2 \neq 2).$$

Supposons donc que x soit un nombre rationnel. On sait qu'il peut s'écrire $x = \frac{a}{b}$ avec a et b deux entiers premiers entre eux (c'est-à-dire sans facteur commun autre que 1) et b non nul.

Imaginons un instant que $x^2 = 2$. On aurait donc $a^2 = 2b^2$, donc a^2 serait pair et par suite a aussi (sauriez-vous l'expliquer ?). On pourrait donc écrire $a = 2k$ avec k un entier, si bien que $a^2 = 4k^2$. La relation $a^2 = 2b^2$ deviendrait donc $4k^2 = 2b^2$ soit, en simplifiant, $b^2 = 2k^2$, ce qui prouve que b serait pair, et par suite b aussi. Mais alors, a et b seraient tous les deux pairs, donc auraient 2 en facteur commun ! C'est absurde car on a bien pris la forme irréductible de la fraction. En conclusion, $x^2 \neq 2$ et $\sqrt{2}$ est bien irrationnel.

Le raisonnement par analyse-synthèse. Ce raisonnement très utile permet de prouver l'existence d'un objet mathématique alors qu'on n'a aucune idée de sa valeur. Il se décompose en deux temps, comme son nom l'indique.

- *L'analyse* (ou recherche de conditions nécessaires) : on suppose que l'objet en question existe bel et bien. On établit alors qu'il ne peut avoir que certaines

propriétés bien précises. On doit écrire au moins une fois l'adverbe « nécessairement » dans cette partie.
- *La synthèse* (ou recherche de conditions suffisantes) : on regarde si les candidats précédemment trouvés conviennent.

Exemple. Prouver que les droites $\mathscr{D}_m$ d'équation $12mx - 9y = 3m + 6$ (avec $m \in \mathbb{R}$) sont toutes sécantes en un point que l'on précisera.

Analyse. Supposons qu'effectivement ces droites sont toutes sécantes en un point I. Nécessairement I est l'intersection de $\mathscr{D}_0$ et de $\mathscr{D}_1$ qui ont pour équations respectives : $-9y = 6$ et $12x - 9y = 9$. On en déduit que les coordonnées de I ne peuvent valoir que $y_I = \frac{6}{-9} = -\frac{2}{3}$ et $x_I = \frac{3}{12} = \frac{1}{4}$. Le point I, s'il existe, est donc unique.

Synthèse. Considérons le point $I(\frac{1}{4}, -\frac{2}{3})$. Quel que soit le réel m on a : $12mx_I - 9y_I = \frac{12m}{4} + \frac{18}{3} = 3m + 6$ ce qui prouve que $I \in \mathscr{D}_m$ c'est-à-dire que toutes les droites $\mathscr{D}_m$, quand $m \in \mathbb{R}$, sont sécantes en I.

Le raisonnement par récurrence. Déjà étudié en Terminale, nous le détaillerons au chapitre VIII avec toutes ses variantes (récurrence double, forte, ...)

Bilan

Ce qu'il faut savoir faire

✓ Connaître les tables de vérité des connecteurs $\wedge, \vee, \Longrightarrow, \Longleftrightarrow$.
✓ Savoir prendre la négation d'une conjonction ou d'une disjonction (règles de DE MORGAN).
✓ Savoir prendre la négation d'une implication.
✓ Savoir prendre la négation d'une assertion quantifiée par $\forall$ ou par $\exists$.
✓ Connaître le principe du raisonnement par l'absurde, par contraposée, par analyse-synthèse.

Les erreurs fréquentes

♠ Confondre le ou inclusif (la disjonction) et le ou exclusif.
♠ Croire que la négation de $\mathscr{A} \wedge \mathscr{B}$ est $(\neg\mathscr{A}) \wedge (\neg\mathscr{B})$.
♠ Croire que la négation de $\mathscr{A} \Longrightarrow \mathscr{B}$ est $(\neg\mathscr{A}) \Longrightarrow (\neg\mathscr{B})$ ou une autre implication du même genre. La négation de $\mathscr{A} \Longrightarrow \mathscr{B}$ est $\mathscr{A} \wedge (\neg\mathscr{B})$.
♠ Croire que le contraire de $\forall x \in E(...)$ commence par $\exists x \notin E(...)$.
♠ Mélanger l'ordre des quantifications.
♠ Confondre un raisonnement par l'absurde et un raisonnement par contraposée.
♠ Ne pas penser à faire un raisonnement par analyse-synthèse alors que la question est de prouver que quelque chose existe sans qu'on ait la moindre idée de sa valeur.