

*l'intégrale*

MÉTHODES  
ET EXERCICES

**MPSI**

---

JEAN-MARIE **MONIER**

GUILLAUME **HABERER**

CÉCILE **LARDON**

# Mathématiques

## méthodes et exercices

DUNOD

## Conception et création de couverture : Atelier 3+

<p>Le pictogramme qui figure ci-contre mérite une explication. Son objet est d'alerter le lecteur sur la menace que représente pour l'avenir de l'écrit, particulièrement dans le domaine de l'édition technique et universitaire, le développement massif du photocopillage.</p> <p>Le Code de la propriété intellectuelle du 1<sup>er</sup> juillet 1992 interdit en effet expressément la photocopie à usage collectif sans autorisation des ayants droit. Or, cette pratique s'est généralisée dans les établissements</p>	<p>d'enseignement supérieur, provoquant une baisse brutale des achats de livres et revues, au point que la possibilité même pour les auteurs de créer des œuvres nouvelles et de les faire éditer correctement est aujourd'hui menacée. Nous rappelons donc que toute reproduction, partielle ou totale, de la présente publication est interdite sans autorisation de l'auteur, de son éditeur ou du Centre français d'exploitation du droit de copie (CFC, 20, rue des Grands-Augustins, 75006 Paris).</p>
--	--



**DANGER**  
LE PHOTOCOPIAGE  
TUE LE LIVRE

© Dunod, Paris, 2013  
ISBN 978-2-10-059836-6

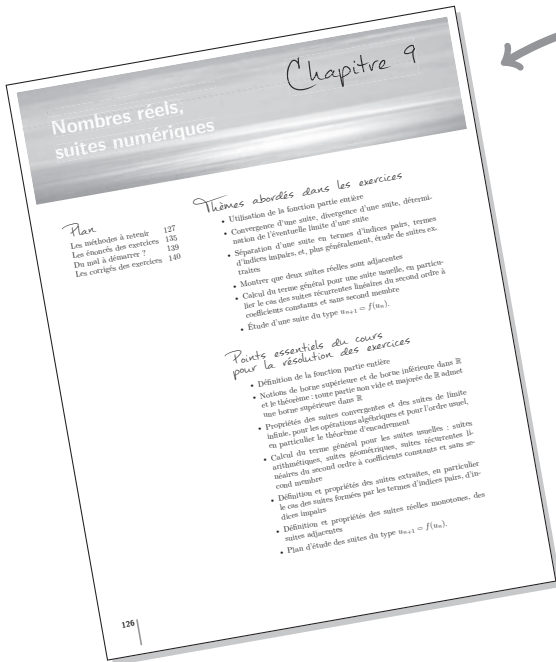
Le Code de la propriété intellectuelle n'autorisant, aux termes de l'article L. 122-5, 2° et 3° a), d'une part, que les « copies ou reproductions strictement réservées à l'usage privé du copiste et non destinées à une utilisation collective » et, d'autre part, que les analyses et les courtes citations dans un but d'exemple et d'illustration, « toute représentation ou reproduction intégrale ou partielle faite sans le consentement de l'auteur ou de ses ayants droit ou ayants cause est illicite » (art. L. 122-4).

Cette représentation ou reproduction, par quelque procédé que ce soit, constituerait donc une contrefaçon sanctionnée par les articles L. 335-2 et suivants du Code de la propriété intellectuelle.

# Table des matières

Pour bien utiliser cet ouvrage	iv	15 Algèbre des polynômes	214
Remerciements	vii	16 Arithmétique des polynômes	227
1 Raisonnement, vocabulaire ensembliste	1	17 Espaces vectoriels	241
2 Calculs algébriques	18	18 Espaces vectoriels de dimension finie	250
3 Nombres complexes et trigonométrie	33	19 Applications linéaires	259
4 Fonctions d'une variable réelle	48	20 Calcul matriciel	272
5 Calcul différentiel élémentaire	60	21 Matrices et applications linéaires	287
6 Fonctions usuelles	75	22 Déterminants	302
7 Calculs de primitives	90	23 Espaces préhilbertiens réels	317
8 Équations différentielles linéaires	108	24 Intégration	335
9 Nombres réels, suites numériques	126	25 Séries	352
10 Limites, continuité	147	26 Dénombrements	370
11 Dérivabilité	159	27 Probabilités sur un univers fini	385
12 Analyse asymptotique	172	28 Variables aléatoires	402
13 Arithmétique dans $\mathbb{Z}$	190	29 Couples de variables aléatoires	416
14 Structures algébriques usuelles	201	30 Informatique	440
		Index	473

# Pour bien utiliser cet ouvrage



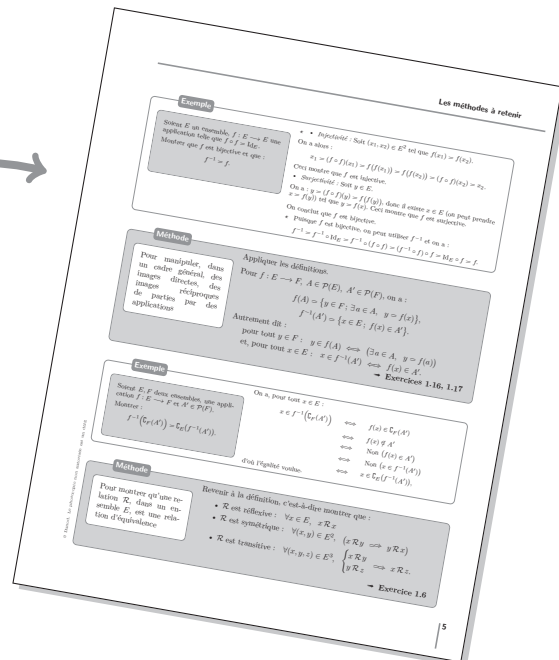
## La page d'entrée de chapitre

Elle propose un plan du chapitre, les thèmes abordés dans les exercices, ainsi qu'un rappel des points essentiels du cours pour la résolution des exercices.

## Les méthodes à retenir

Cette rubrique constitue une synthèse des principales méthodes à connaître, détaillées étape par étape, et indique les exercices auxquels elles se rapportent.

Chaque méthode est illustrée par un ou deux exemples qui la suivent.



## Énoncés des exercices

De nombreux exercices de difficulté croissante sont proposés pour s'entraîner. La difficulté de chaque exercice est indiquée sur une échelle de 1 à 4.

Du mal à démarrer ?

**161** Montrer :  
 $P_1(x) = 0, P_2'(x) = 0, P_3''(x) = 0, P_4'''(x) = 0$

**162** Résoudre l'équation linéaire dans  $\mathbb{C}$  :  
 $(x + 1)^2 = x^2 + x + 1$

**163** Utiliser les notions complexes :  
 a) Montrer que  $(x^2 + 1)^2 = x^4 + 2x^2 + 1$   
 b) Si  $x$  est un nombre complexe, on remarque que  $x^2 + 1 = 0$  implique  $x^4 + 2x^2 + 1 = 0$ .  
 c) Trouver les racines complexes de  $x^4 + 2x^2 + 1 = 0$ .

**164** Soit  $P(x) = x^3 + px^2 + qx + r$ .  
 a) Factoriser  $P(x)$  par  $x + 1$ . L'autre facteur est un trinôme du second degré.  
 b) Factoriser  $P(x)$  par  $x^2 - 1$ . L'autre facteur est un trinôme du second degré.

**165** Soit  $P(x) = x^3 + px^2 + qx + r$ .  
 a) Trouver un contre-exemple.  
 b) Trouver un contre-exemple.  
 c) Trouver un contre-exemple.

**166** Soit  $P(x) = x^3 + px^2 + qx + r$ .  
 a) Trouver un contre-exemple.  
 b) Trouver un contre-exemple.  
 c) Trouver un contre-exemple.

**167** Soit  $P(x) = x^3 + px^2 + qx + r$ .  
 a) Trouver un contre-exemple.  
 b) Trouver un contre-exemple.  
 c) Trouver un contre-exemple.

225

Énoncés des exercices

**2.1** Calcul d'une somme, par récurrence  
 Montrer :  $\forall n \in \mathbb{N}, \sum_{k=1}^n (-1)^k = \frac{(-1)^n(2n+1)-1}{4}$

**2.2** Exemple de calcul d'une somme, raisonnement par récurrence  
 Montrer, pour tout  $n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$ ,  $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k-1)} = \frac{n^2+n-2}{4n(n+1)}$

**2.3** Somme de coefficients binomiaux de 2 en 2  
 Calculer, pour tout  $n \in \mathbb{N}$  :  $A_n = \sum_{k=0, k \equiv 0 \pmod{2}}^n \binom{n}{k}$  et  $B_n = \sum_{k=0, k \equiv 1 \pmod{2}}^n \binom{n}{k}$

**2.4** Exemples simples de résolution de systèmes d'équations linéaires  
 a) Résoudre les systèmes d'équations suivants, d'inconnues  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$  :  
 (1)  $\begin{cases} 4x - 2y = 1 \\ 6x - 3y = 2 \end{cases}$  (2)  $\begin{cases} x - 2y + z = 1 \\ x - 3y = -1 \end{cases}$   
 b) Résoudre les systèmes d'équations suivants, d'inconnues  $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$  :  
 (1)  $\begin{cases} 2x + y + z = 4 \\ x - y + z = 1 \\ x - 2y - z = 0 \end{cases}$  (2)  $\begin{cases} x - 2y + z = 1 \\ 2x - 3y + z = 3 \\ 3x - 4y - 2z = 4 \end{cases}$  (3)  $\begin{cases} 2x + y + z = 2 \\ x + 2y + z = 0 \\ 3x + z = 4 \end{cases}$

**2.5** Exemples de résolution de systèmes d'équations linéaires avec paramètres  
 Résoudre et discuter les systèmes d'équations suivants, d'inconnues  $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$  et de paramètres  $a \in \mathbb{R}$  :  
 a)  $\begin{cases} x + y - 2z = 2 \\ x + y + z = 1 \\ 4x - 2y + az = a \end{cases}$  b)  $\begin{cases} ax + y + z = 1 \\ x + y + az = 1 \\ x + y + az = 1 \end{cases}$

**2.6** Exemple de résolution d'un système d'équations linéaires avec paramètres  
 Résoudre et discuter le système d'équations suivant, d'inconnues  $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$  et de paramètres  $(a, b) \in \mathbb{R}^2$  :  
 $\begin{cases} x - y + 2z = 0 \\ -2x + 3y + z - 4 = 1 \\ -3x + 5y + 4z - 7 = a \\ -x + 2y + 3z - 3 = b \end{cases}$

223

## Du mal à démarrer ?

Des conseils méthodologiques sont proposés pour bien aborder la résolution des exercices.

## Corrigés des exercices

Tous les exercices sont corrigés de façon détaillée.

Corrigés des exercices

**161** Montrer :  
 $P_1(x) = 0, P_2'(x) = 0, P_3''(x) = 0, P_4'''(x) = 0$

**162** Résoudre l'équation linéaire dans  $\mathbb{C}$  :  
 $(x + 1)^2 = x^2 + x + 1$

**163** Utiliser les notions complexes :  
 a) Montrer que  $(x^2 + 1)^2 = x^4 + 2x^2 + 1$   
 b) Si  $x$  est un nombre complexe, on remarque que  $x^2 + 1 = 0$  implique  $x^4 + 2x^2 + 1 = 0$ .  
 c) Trouver les racines complexes de  $x^4 + 2x^2 + 1 = 0$ .

**164** Soit  $P(x) = x^3 + px^2 + qx + r$ .  
 a) Factoriser  $P(x)$  par  $x + 1$ . L'autre facteur est un trinôme du second degré.  
 b) Factoriser  $P(x)$  par  $x^2 - 1$ . L'autre facteur est un trinôme du second degré.

**165** Soit  $P(x) = x^3 + px^2 + qx + r$ .  
 a) Trouver un contre-exemple.  
 b) Trouver un contre-exemple.  
 c) Trouver un contre-exemple.

**166** Soit  $P(x) = x^3 + px^2 + qx + r$ .  
 a) Trouver un contre-exemple.  
 b) Trouver un contre-exemple.  
 c) Trouver un contre-exemple.

**167** Soit  $P(x) = x^3 + px^2 + qx + r$ .  
 a) Trouver un contre-exemple.  
 b) Trouver un contre-exemple.  
 c) Trouver un contre-exemple.

**2.1** Calcul d'une somme, par récurrence  
 Montrer :  $\forall n \in \mathbb{N}, \sum_{k=1}^n (-1)^k = \frac{(-1)^n(2n+1)-1}{4}$

**2.2** Exemple de calcul d'une somme, raisonnement par récurrence  
 Montrer, pour tout  $n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$ ,  $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k-1)} = \frac{n^2+n-2}{4n(n+1)}$

**2.3** Somme de coefficients binomiaux de 2 en 2  
 Calculer, pour tout  $n \in \mathbb{N}$  :  $A_n = \sum_{k=0, k \equiv 0 \pmod{2}}^n \binom{n}{k}$  et  $B_n = \sum_{k=0, k \equiv 1 \pmod{2}}^n \binom{n}{k}$

**2.4** Exemples simples de résolution de systèmes d'équations linéaires  
 a) Résoudre les systèmes d'équations suivants, d'inconnues  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$  :  
 (1)  $\begin{cases} 4x - 2y = 1 \\ 6x - 3y = 2 \end{cases}$  (2)  $\begin{cases} x - 2y + z = 1 \\ x - 3y = -1 \end{cases}$   
 b) Résoudre les systèmes d'équations suivants, d'inconnues  $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$  :  
 (1)  $\begin{cases} 2x + y + z = 4 \\ x - y + z = 1 \\ x - 2y - z = 0 \end{cases}$  (2)  $\begin{cases} x - 2y + z = 1 \\ 2x - 3y + z = 3 \\ 3x - 4y - 2z = 4 \end{cases}$  (3)  $\begin{cases} 2x + y + z = 2 \\ x + 2y + z = 0 \\ 3x + z = 4 \end{cases}$

**2.5** Exemples de résolution de systèmes d'équations linéaires avec paramètres  
 Résoudre et discuter les systèmes d'équations suivants, d'inconnues  $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$  et de paramètres  $a \in \mathbb{R}$  :  
 a)  $\begin{cases} x + y - 2z = 2 \\ x + y + z = 1 \\ 4x - 2y + az = a \end{cases}$  b)  $\begin{cases} ax + y + z = 1 \\ x + y + az = 1 \\ x + y + az = 1 \end{cases}$

**2.6** Exemple de résolution d'un système d'équations linéaires avec paramètres  
 Résoudre et discuter le système d'équations suivant, d'inconnues  $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$  et de paramètres  $(a, b) \in \mathbb{R}^2$  :  
 $\begin{cases} x - y + 2z = 0 \\ -2x + 3y + z - 4 = 1 \\ -3x + 5y + 4z - 7 = a \\ -x + 2y + 3z - 3 = b \end{cases}$

69



# Remerciements

Nous tenons ici à exprimer notre gratitude aux nombreux collègues qui ont accepté de réviser des parties du manuscrit :

Marc Albrecht, Bruno Arzac, Jean-Philippe Berne, Jacques Blanc, Gérard Bourgin, Sophie Cohéléach, Carine Courant, Sylvain Delpech, Hermin Durand, Jean Feyler, Viviane Gaggioli, Marguerite Gauthier, Daniel Genoud, André Laffont, Hadrien Larôme, Ibrahim Rihaoui, René Roy, Philippe Saadé, Marie-Dominique Siéfert, Marie-Pascale Thon, Audrey Verdier.





# Raisonnement, vocabulaire ensembliste

## Chapitre 1

### Plan

Les méthodes à retenir	2
Les énoncés des exercices	7
Du mal à démarrer ?	11
Les corrigés des exercices	12

### Thèmes abordés dans les exercices

- Mise en oeuvre, sur des exemples simples, des différents types de raisonnement
- Égalités et inclusions d'ensembles obtenus par opérations sur des parties d'un ensemble
- Injectivité, surjectivité, bijectivité
- Image directe, image réciproque d'une partie par une application.

### Points essentiels du cours pour la résolution des exercices

- Définition et propriétés des opérations entre ensembles,  $\cap$ ,  $\cup$ ,  $\complement_E$ ,  $\setminus$
- Définition de la fonction indicatrice d'une partie d'un ensemble
- Définition du produit cartésien d'un nombre fini d'ensembles
- Définition et propriétés de l'injectivité, de la surjectivité, de la bijectivité pour les applications
- Définition de l'image directe, de l'image réciproque d'une partie par une application
- Relations d'équivalence, relations d'ordre.

## Les méthodes à retenir

### Méthode

Pour travailler de manière générale sur des ensembles

Essayer de passer par les éléments des ensembles, ou de calculer globalement sur les ensembles. La deuxième voie est en général plus courte et plus claire (si elle est praticable).

→ Exercices 1.1, 1.2, 1.7, 1.8, 1.16 à 1.18

### Exemple

Soient  $E$  un ensemble,  $A, B, C \in \mathcal{P}(E)$ .

Montrer :  $(A \setminus C) \setminus (B \setminus C) = A \setminus (B \cup C)$ .

On a :

$$\begin{aligned} (A \setminus C) \setminus (B \setminus C) &= (A \cap \bar{C}) \setminus (B \cap \bar{C}) \\ &= (A \cap \bar{C}) \cap \overline{B \cap \bar{C}} \\ &= (A \cap \bar{C}) \cap (\bar{B} \cup C) \\ &= (A \cap \bar{C} \cap \bar{B}) \cup (A \cap \bar{C} \cap C) \\ &= A \cap \bar{B} \cap \bar{C} \\ &= A \cap \overline{B \cup C} \\ &= A \setminus (B \cup C). \end{aligned}$$

### Méthode

Pour établir une égalité d'ensembles

Essayer de :

- soit montrer directement l'égalité
- soit montrer deux inclusions :  $A \subset B$  et  $B \subset A$
- soit utiliser les fonctions indicatrices des parties d'un ensemble

→ Exercices 1.2, 1.7, 1.8, 1.12, 1.18

Dans chacune des deux premières options, on essaie de passer par les éléments ou de calculer globalement sur les ensembles.

### Exemple

Soient  $E$  un ensemble,  $A, B \in \mathcal{P}(E)$ .

Montrer :

$$(A \setminus B) \cup (A \setminus C) = A \setminus (B \cap C).$$

On a :

$$\begin{aligned} (A \setminus B) \cup (A \setminus C) &= (A \cap \bar{B}) \cup (A \cap \bar{C}) \\ &= A \cap (\bar{B} \cup \bar{C}) \\ &= A \cap \overline{B \cap C} \\ &= A \setminus (B \cap C). \end{aligned}$$

**Exemple**

Montrer :

$$\{y \in \mathbb{R}; \exists x \in [-1; 2], y = x^2\} = [0; 4].$$

- Soit  $y \in \mathbb{R}$  tel qu'il existe  $x \in [-1; 2]$  tel que  $y = x^2$ .

Si  $x \in [-1; 0]$ , alors  $y \in [0; 1]$ .

Si  $x \in [0; 2]$ , alors  $y \in [0; 4]$ .

On déduit  $y \in [0; 4]$ .

Ceci montre que le premier ensemble est inclus dans le second.

- Réciproquement, soit  $y \in [0; 4]$ .

En notant  $x = \sqrt{y}$ , on a  $x \in [0; 2] \subset [-1; 2]$  et  $y = x^2$ .

Ceci montre que le second ensemble est inclus dans le premier.

On conclut à l'égalité demandée.

**Méthode**

Montrer que :

Pour montrer, par récurrence (faible), qu'une propriété  $\mathcal{P}(n)$  est vraie pour tout entier  $n$  tel que  $n \geq n_0$

- $\mathcal{P}(n_0)$  est vraie (*initialisation*)
- pour tout entier  $n$  fixé tel que  $n \geq n_0$ , si  $\mathcal{P}(n)$  est vraie, alors  $\mathcal{P}(n+1)$  est vraie (*hérédité*).

⇒ Exercice 1.5

**Exemple**

On considère la suite de Fibonacci  $(\phi_n)_{n \in \mathbb{N}}$  définie par  $\phi_0 = 0$ ,  $\phi_1 = 1$  et :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \phi_{n+2} = \phi_{n+1} + \phi_n.$$

Montrer :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \phi_{n+1}^2 - \phi_{n+2}\phi_n = (-1)^n.$$

*Initialisation :*

Pour  $n = 0$ , on a :  $\phi_1^2 - \phi_2\phi_0 = 1^2 - 1 \cdot 0 = 1 = (-1)^0$ , donc la formule est vraie pour  $n = 0$ .

*Hérédité :* Supposons que la formule soit vraie pour un  $n \in \mathbb{N}$  fixé.

On a alors :

$$\begin{aligned} \phi_{n+2}^2 - \phi_{n+3}\phi_{n+1} &= \phi_{n+2}^2 - (\phi_{n+2} + \phi_{n+1})\phi_{n+1} \\ &= (\phi_{n+2}^2 - \phi_{n+2}\phi_{n+1}) - \phi_{n+1}^2 \\ &= \phi_{n+2}(\phi_{n+2} - \phi_{n+1}) - \phi_{n+1}^2 \\ &= \phi_{n+2}\phi_n - \phi_{n+1}^2 \\ &= -(\phi_{n+1}^2 - \phi_{n+2}\phi_n) \\ &= -(-1)^n = (-1)^{n+1}, \end{aligned}$$

donc la formule est vraie pour  $n+1$ .

Ceci montre, par récurrence, que la formule est vraie pour tout  $n \in \mathbb{N}$ .

**Méthode**

Montrer que :

Pour montrer, par récurrence à deux pas, qu'une propriété  $\mathcal{P}(n)$  est vraie pour tout entier  $n$  tel que  $n \geq n_0$

- $\mathcal{P}(n_0)$  et  $\mathcal{P}(n_0+1)$  sont vraies (*initialisation*)
- pour tout entier  $n$  fixé tel que  $n \geq n_0$ , si  $\mathcal{P}(n)$  et  $\mathcal{P}(n+1)$  sont vraies, alors  $\mathcal{P}(n+2)$  est vraie (*hérédité*).

⇒ Exercice 1.10

**Exemple**

On considère la suite réelle  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  définie par  $u_0 = 0, u_1 = 1$  et :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = \frac{u_{n+1} + u_n}{2}.$$

Montrer :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n > 0.$$

*Initialisation* : Pour  $n = 1$ , on a  $u_1 = 1 > 0$ , et, pour  $n = 2$ , on a  $u_2 = \frac{u_1 + u_0}{2} = \frac{1}{2} > 0$  donc la propriété est vraie pour  $n = 1$  et pour  $n = 2$ .

*Hérédité* : Supposons que la propriété soit vraie pour  $n$  et  $n + 1$ , où  $n \in \mathbb{N}^*$  est fixé. On a donc  $u_n > 0$  et  $u_{n+1} > 0$ , d'où  $\frac{u_{n+1} + u_n}{2} > 0$ , donc la propriété est vraie pour  $n + 2$ .

Ceci montre, par récurrence à deux pas, que la propriété est vraie pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ .

**Méthode**

Montrer que :

Pour montrer, par récurrence forte, qu'une propriété  $\mathcal{P}(n)$  est vraie pour tout entier  $n$  tel que  $n \geq n_0$

- $\mathcal{P}(n_0)$  est vraie (*initialisation*)
- pour tout entier  $n$  fixé tel que  $n \geq n_0$ , si  $\mathcal{P}(n_0), \dots, \mathcal{P}(n)$  sont vraies, alors  $\mathcal{P}(n + 1)$  est vraie (*hérédité*).

⇒ **Exercice 1.11**

**Exemple**

On considère la suite réelle  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  définie par  $u_1 = 1$  et :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, u_{n+1} = \frac{u_1 + u_2^2 + \dots + u_n^n}{n^n}.$$

Montrer :  $\forall n \in \mathbb{N}^*, 0 < u_n \leq 1$ .

*Initialisation* : Pour  $n = 1$ , on a bien  $0 < u_1 \leq 1$  car  $u_1 = 1$ .

*Hérédité* : Supposons, pour un  $n \in \mathbb{N}^*$  fixé, que l'on ait :

$$\forall k \in \{1, \dots, n\}, 0 < u_k \leq 1.$$

On a alors :  $u_{n+1} = \frac{u_1 + u_2^2 + \dots + u_n^n}{n^n} > \frac{0 + \dots + 0}{n^n} = 0$

et  $u_{n+1} = \frac{u_1 + u_2^2 + \dots + u_n^n}{n^n} \leq \frac{1 + \dots + 1}{n^n} = \frac{n}{n^n} = \frac{1}{n^{n-1}} \leq 1$ .

Ceci montre, par récurrence forte :  $\forall n \in \mathbb{N}^*, 0 < u_n \leq 1$ .

**Méthode**

Essayer de :

Pour résoudre une question portant sur injectivité, surjectivité, bijectivité, d'applications dans un cadre général

- utiliser les définitions et les propositions du cours sur la composée de deux applications injectives (resp. surjectives)
- utiliser le résultat de l'exercice classique 1.14 (en le redémontrant).

⇒ **Exercices 1.3, 1.14, 1.15**

**Exemple**

Soient  $E$  un ensemble,  $f : E \rightarrow E$  une application telle que  $f \circ f = \text{Id}_E$ .

Montrer que  $f$  est bijective et que :

$$f^{-1} = f.$$

★ • *Injectivité* : Soit  $(x_1, x_2) \in E^2$  tel que  $f(x_1) = f(x_2)$ .

On a alors :

$$x_1 = (f \circ f)(x_1) = f(f(x_1)) = f(f(x_2)) = (f \circ f)(x_2) = x_2.$$

Ceci montre que  $f$  est injective.

• *Surjectivité* : Soit  $y \in E$ .

On a :  $y = (f \circ f)(y) = f(f(y))$ , donc il existe  $x \in E$  (on peut prendre  $x = f(y)$ ) tel que  $y = f(x)$ . Ceci montre que  $f$  est surjective.

On conclut que  $f$  est bijective.

★ Puisque  $f$  est bijective, on peut utiliser  $f^{-1}$  et on a :

$$f^{-1} = f^{-1} \circ \text{Id}_E = f^{-1} \circ (f \circ f) = (f^{-1} \circ f) \circ f = \text{Id}_E \circ f = f.$$

**Méthode**

Pour manipuler, dans un cadre général, des images directes, des images réciproques de parties par des applications

Appliquer les définitions.

Pour  $f : E \rightarrow F$ ,  $A \in \mathcal{P}(E)$ ,  $A' \in \mathcal{P}(F)$ , on a :

$$f(A) = \{y \in F ; \exists a \in A, y = f(a)\},$$

$$f^{-1}(A') = \{x \in E ; f(x) \in A'\}.$$

Autrement dit :

$$\text{pour tout } y \in F : y \in f(A) \iff (\exists a \in A, y = f(a))$$

$$\text{et, pour tout } x \in E : x \in f^{-1}(A') \iff f(x) \in A'.$$

→ Exercices 1.16, 1.17

**Exemple**

Soient  $E, F$  deux ensembles, une application  $f : E \rightarrow F$  et  $A' \in \mathcal{P}(F)$ .

Montrer :

$$f^{-1}(\mathcal{C}_F(A')) = \mathcal{C}_E(f^{-1}(A')).$$

On a, pour tout  $x \in E$  :

$$x \in f^{-1}(\mathcal{C}_F(A')) \iff f(x) \in \mathcal{C}_F(A')$$

$$\iff f(x) \notin A'$$

$$\iff \text{Non } (f(x) \in A')$$

$$\iff \text{Non } (x \in f^{-1}(A'))$$

$$\iff x \in \mathcal{C}_E(f^{-1}(A')),$$

d'où l'égalité voulue.

**Méthode**

Pour montrer qu'une relation  $\mathcal{R}$ , dans un ensemble  $E$ , est une relation d'équivalence

Revenir à la définition, c'est-à-dire montrer que :

•  $\mathcal{R}$  est réflexive :  $\forall x \in E, x \mathcal{R} x$

•  $\mathcal{R}$  est symétrique :  $\forall (x, y) \in E^2, (x \mathcal{R} y \implies y \mathcal{R} x)$

•  $\mathcal{R}$  est transitive :  $\forall (x, y, z) \in E^3, \begin{cases} x \mathcal{R} y \\ y \mathcal{R} z \end{cases} \implies x \mathcal{R} z.$

→ Exercice 1.6

**Exemple**

On note  $\mathcal{R}$  la relation définie dans  $\mathbb{R}$  par :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, (x \mathcal{R} y \iff |x| = |y|).$$

Montrer que  $\mathcal{R}$  est une relation d'équivalence dans  $\mathbb{R}$  et déterminer, pour tout  $x \in \mathbb{R}$ , la classe de  $x$  modulo  $\mathcal{R}$ .

- ★ • On a, pour tout  $x \in \mathbb{R}$ ,  $|x| = |x|$ , d'où  $x \mathcal{R} x$ , donc  $\mathcal{R}$  est réflexive.
- On a, pour tous  $x, y \in \mathbb{R}$  :

$$x \mathcal{R} y \iff |x| = |y| \iff |y| = |x| \iff y \mathcal{R} x,$$

donc  $\mathcal{R}$  est symétrique.

- On a, pour tous  $x, y, z \in \mathbb{R}$  :

$$\begin{cases} x \mathcal{R} y \\ y \mathcal{R} z \end{cases} \iff \begin{cases} |x| = |y| \\ |y| = |z| \end{cases} \implies |x| = |z| \iff x \mathcal{R} z,$$

donc  $\mathcal{R}$  est transitive.

On conclut que  $\mathcal{R}$  est une relation d'équivalence dans  $\mathbb{R}$ .

- ★ Pour tout  $x \in \mathbb{R}$ , la classe de  $x$  modulo  $\mathcal{R}$  est :

$$\hat{x} = \{y \in \mathbb{R}; x \mathcal{R} y\} = \{y \in \mathbb{R}; |x| = |y|\} = \begin{cases} \{x, -x\} & \text{si } x \neq 0 \\ \{0\} & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

**Méthode**

Pour montrer qu'une relation  $\mathcal{R}$ , dans un ensemble  $E$ , est une relation d'ordre

Revenir à la définition, c'est-à-dire montrer que :

- $\mathcal{R}$  est réflexive :  $\forall x \in E, x \mathcal{R} x$
- $\mathcal{R}$  est antisymétrique :  $\forall (x, y) \in E^2, \begin{cases} x \mathcal{R} y \\ y \mathcal{R} x \end{cases} \implies x = y$
- $\mathcal{R}$  est transitive :  $\forall (x, y, z) \in E^3, \begin{cases} x \mathcal{R} y \\ y \mathcal{R} z \end{cases} \implies x \mathcal{R} z$ .

→ Exercices 1.9, 1.13

**Exemple**

On note  $E = \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$  l'ensemble des applications de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$  et  $\leq$  la relation définie dans  $E$  par, pour toutes  $f, g \in E$  :

$$f \leq g \iff (\forall x \in \mathbb{R}, f(x) \leq g(x)).$$

Montrer que  $\leq$  est une relation d'ordre dans  $E$ . Cet ordre est-il total ?

- ★ • On a, pour toute  $f \in E$  :  $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) \leq f(x)$ , d'où  $f \leq f$ , donc  $\leq$  est réflexive.

- On a, pour toutes  $f, g \in E$  :

$$\begin{cases} f \leq g \\ g \leq f \end{cases} \iff \begin{cases} \forall x \in \mathbb{R}, f(x) \leq g(x) \\ \forall x \in \mathbb{R}, g(x) \leq f(x) \end{cases} \iff (\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = g(x)) \iff f = g,$$

donc  $\leq$  est antisymétrique.

- On a, pour toutes  $f, g, h \in E$  :

$$\begin{cases} f \leq g \\ g \leq h \end{cases} \iff \begin{cases} \forall x \in \mathbb{R}, f(x) \leq g(x) \\ \forall x \in \mathbb{R}, g(x) \leq h(x) \end{cases} \implies (\forall x \in \mathbb{R}, f(x) \leq h(x)) \iff f \leq h,$$

donc  $\leq$  est transitive.

Ceci montre que  $\leq$  est une relation d'ordre dans  $E$ .

- ★ Considérons  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto 0$  et  $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto x$ .

On a  $f(1) = 0 < 1 = g(1)$ , donc on n'a pas  $g \leq f$ .

On a  $f(1) = 0 > -1 = g(-1)$ , donc on n'a pas  $f \leq g$ .

On conclut que l'ordre  $\leq$  sur  $E$  n'est pas total.

# Énoncés des exercices



## 1.1 Exemple de calcul ensembliste : inclusion

Soient  $E$  un ensemble,  $A, B, C \in \mathcal{P}(E)$ .

- Montrer :  $(A \cup B) \cap C \subset A \cup (B \cap C)$ .
- Établir qu'il y a égalité dans l'inclusion précédente si et seulement si :  $A \subset C$ .



## 1.2 Exemple de calcul ensembliste : équivalence entre deux égalités

Soient  $E$  un ensemble,  $A, B, C \in \mathcal{P}(E)$ . Montrer :

$$A \cap B = A \cap C \iff A \cap \complement_E(B) = A \cap \complement_E(C).$$



## 1.3 Exemple d'une restriction bijective

On considère la fonction  $f$  de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$  donnée par :  $f(x) = \frac{3x-1}{x-2}$ .

- Montrer qu'il existe un réel et un seul, noté  $a$ , n'ayant pas d'image par  $f$ .
- Montrer qu'il existe un réel et un seul, noté  $b$ , n'ayant pas d'antécédent par  $f$ .
- Montrer que la restriction  $g$  de  $f$  à  $\mathbb{R} \setminus \{a\}$  au départ et à  $\mathbb{R} \setminus \{b\}$  à l'arrivée est bijective, et préciser l'application réciproque  $g^{-1}$  de  $g$ .



## 1.4 Exemple de calcul de composée de deux applications

On note  $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  les applications définies, pour tout  $x \in \mathbb{R}$ , par :

$$f(x) = 1 + x, \quad g(x) = x^2.$$

Préciser  $f \circ g$  et  $g \circ f$ . A-t-on  $f \circ g = g \circ f$  ?



## 1.5 Exemple de raisonnement par récurrence (faible)

On considère la suite de Lucas  $(L_n)_{n \in \mathbb{N}}$  définie par  $L_0 = 2, L_1 = 1$  et :

$$\forall n \in \mathbb{N}, L_{n+2} = L_{n+1} + L_n.$$

Montrer, par récurrence, pour tout  $n \in \mathbb{N}$  :

- $L_{n+1}^2 - L_n L_{n+2} = 5(-1)^{n+1}$
- $\sum_{k=0}^n L_k^2 = L_n L_{n+1} + 2$
- $L_{2n} = L_n^2 - 2(-1)^n$  et  $L_{2n+1} = L_n L_{n+1} - (-1)^n$ .

**1.6 Exemple de relation d'équivalence dans  $\mathbb{R}$**

On note  $\mathcal{R}$  la relation définie dans  $\mathbb{R}$  par :

$$\forall(x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad (x \mathcal{R} y \iff x^2 - 2x = y^2 - 2y).$$

- a) Montrer que  $\mathcal{R}$  est une relation d'équivalence dans  $\mathbb{R}$ .
- b) Déterminer, pour tout  $x \in \mathbb{R}$ , la classe d'équivalence de  $x$  modulo  $\mathcal{R}$ .

**1.7 Réunion ou intersection de produits cartésiens**

Soient  $E, F$  deux ensembles,  $A_1, A_2$  des parties de  $E$ ,  $B_1, B_2$  des parties de  $F$ .

- a) Montrer :  $(A_1 \times B_1) \cap (A_2 \times B_2) = (A_1 \cap A_2) \times (B_1 \cap B_2)$ .
- b) 1) Montrer :  $(A_1 \times B_1) \cup (A_2 \times B_1) = (A_1 \cup A_2) \times B_1$ .
- 2) A-t-on nécessairement :  $(A_1 \times B_1) \cup (A_2 \times B_2) = (A_1 \cup A_2) \times (B_1 \cup B_2)$  ?

**1.8 Études de  $\mathcal{P}(E \cap F)$  et de  $\mathcal{P}(E \cup F)$**

- a) Montrer :  $E \subset F \iff \mathcal{P}(E) \subset \mathcal{P}(F)$ .
- b) Établir :  $\mathcal{P}(E \cap F) = \mathcal{P}(E) \cap \mathcal{P}(F)$ .
- c) A-t-on :  $\mathcal{P}(E \cup F) = \mathcal{P}(E) \cup \mathcal{P}(F)$  ?

**1.9 Exemple de relation d'ordre sur les entiers**

On considère la relation  $\mathcal{R}$  définie dans  $\mathbb{N}^*$  par :  $x \mathcal{R} y \iff (\exists n \in \mathbb{N}^*, y = x^n)$ .

- a) Montrer que  $\mathcal{R}$  est un ordre sur  $\mathbb{N}^*$ .
- b) Est-ce que  $\mathcal{R}$  est total ?

**1.10 Exemple de raisonnement par récurrence à deux pas**

On considère la suite réelle  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  définie par  $u_0 = 0, u_1 = 1$  et :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+2} = \frac{u_{n+1} + u_n}{2} + 1.$$

Montrer que la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est strictement croissante.

**1.11 Exemple de raisonnement par récurrence forte**

On considère la suite réelle  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  définie par  $u_0 = 1$  et :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = \sum_{k=0}^n \frac{u_k}{k!(n-k)!}.$$

Montrer :  $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \in \mathbb{Q}_+^*$ .



**1.12 Fonction indicatrice d'une partie d'un ensemble**

Soit  $E$  un ensemble.

On rappelle que, pour toute  $A \in \mathcal{P}(E)$ , la fonction indicatrice de  $A$  est l'application

$$\mathbf{1}_A : E \mapsto \{0, 1\}, \quad x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x \notin A \\ 1 & \text{si } x \in A. \end{cases}$$

On note  $\mathbf{1}$  l'application de  $\mathcal{P}(E)$  dans  $\{0, 1\}$  constante égale à 1.

a) Montrer, pour toutes  $A, B \in \mathcal{P}(E)$  :

$$A = B \iff \mathbf{1}_A = \mathbf{1}_B, \quad \mathbf{1}_{\overline{A}} = \mathbf{1} - \mathbf{1}_A,$$

$$\mathbf{1}_{A \cap B} = \mathbf{1}_A \mathbf{1}_B, \quad \mathbf{1}_{A \cup B} = \mathbf{1}_A + \mathbf{1}_B - \mathbf{1}_A \mathbf{1}_B, \quad \mathbf{1}_{A \setminus B} = \mathbf{1}_A - \mathbf{1}_A \mathbf{1}_B.$$

b) En déduire, pour toutes  $A, B \in \mathcal{P}(E)$  :  $A \cap (A \cup B) = A$  et  $A \cup (A \cap B) = A$ .

**1.13 Exemple de relation d'ordre sur un ensemble de fonctions**

On note  $E$  l'ensemble des applications  $f : [0; +\infty[ \rightarrow \mathbb{R}$  dérivables, telles que  $f(0) = 1$ , et on note  $\mathcal{R}$  la relation définie dans  $E$  par, pour tout  $(f, g) \in E^2$  :

$$f \mathcal{R} g \iff f' \leq g'.$$

a) Montrer que  $\mathcal{R}$  est une relation d'ordre sur  $E$ .

b) Est-ce que l'ordre  $\mathcal{R}$  est total ?

c) Montrer :  $\forall (f, g) \in E^2, (f \mathcal{R} g \implies f \leq g)$ .

d) A-t-on :  $\forall (f, g) \in E^2, (f \leq g \implies f \mathcal{R} g)$  ?

**1.14 Composée injective, composée surjective**

Soient  $E, F, G$  des ensembles,  $f : E \rightarrow F, g : F \rightarrow G$  des applications. Montrer :

a) si  $g \circ f$  est injective, alors  $f$  est injective

b) si  $g \circ f$  est surjective, alors  $g$  est surjective

c) si  $g \circ f$  est bijective, alors  $f$  est injective et  $g$  est surjective.

**1.15 Conséquences de la bijectivité d'une certaine composée**

Soient  $E, F$  des ensembles,  $f : E \rightarrow F, g : F \rightarrow E$  des applications.

On suppose que  $g \circ f \circ g$  est bijective. Montrer que  $f$  et  $g$  sont bijectives.

On pourra utiliser le résultat de l'exercice 1.14

**1.16 Images directes de parties par une application**

Soient  $E, E'$  deux ensembles,  $f : E \rightarrow E'$  une application. Montrer, pour toutes parties  $A, B$  de  $E$  :

a)  $A \subset B \implies f(A) \subset f(B)$

b)  $A \subset f^{-1}(f(A))$

c)  $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$

d)  $f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B)$ .



**1.17 Images réciproques de parties par une application**

Soient  $E, E'$  deux ensembles,  $f : E \rightarrow E'$  une application. Montrer, pour toutes parties  $A', B'$  de  $E$  :

- a)  $A' \subset B' \implies f^{-1}(A') \subset f^{-1}(B')$
- b)  $f(f^{-1}(A')) \subset A'$
- c)  $f^{-1}(A' \cup B') = f^{-1}(A') \cup f^{-1}(B')$
- d)  $f^{-1}(A' \cap B') = f^{-1}(A') \cap f^{-1}(B')$ .



**1.18 Différence symétrique, associativité**

Soit  $E$  un ensemble. On note, pour toutes parties  $A, B$  de  $E$  :

$$A \Delta B = (A \cup B) \cap \overline{(A \cap B)},$$

appelée *différence symétrique* de  $A$  et  $B$ .

a) *Deux exemples* : Déterminer  $A \Delta B$  dans les deux exemples suivants :

- 1)  $E = \{1, 2, 3, 4\}$ ,  $A = \{1, 2\}$ ,  $B = \{1, 3\}$
- 2)  $E = \mathbb{R}$ ,  $A = ] - \infty ; 2]$ ,  $B = [1 ; +\infty[$ .

b) Établir :  $\forall (A, B) \in (\mathcal{P}(E))^2$ ,  $A \Delta B = (A \cap \overline{B}) \cup (B \cap \overline{A})$ .

c) Montrer, pour tout  $(A, B) \in (\mathcal{P}(E))^2$  :  $\mathbf{1}_{A \Delta B} = \mathbf{1}_A + \mathbf{1}_B - 2 \cdot \mathbf{1}_A \mathbf{1}_B$ .

d) En déduire que la loi  $\Delta$  est associative dans  $\mathcal{P}(E)$ , c'est-à-dire :

$$\forall (A, B, C) \in (\mathcal{P}(E))^3, (A \Delta B) \Delta C = A \Delta (B \Delta C).$$

# Du mal à démarrer ?

- 1.1** a) Utiliser la distributivité de  $\cap$  sur  $\cup$ .  
 b) Séparer l'équivalence logique en deux implications.

**1.2** *Première méthode :*

Noter  $A', \dots$  le complémentaire de  $A, \dots$  dans  $E$  et raisonner par équivalences logiques en passant aux complémentaires.

*Deuxième méthode :*

Supposer  $A \cap B = A \cap C$ .

• Partir d'un élément quelconque  $x$  de  $A \cap \complement_E(B)$  et raisonner par l'absurde.

• L'autre inclusion s'en déduit en échangeant  $B$  et  $C$ .

- 1.3** a)  $a = 2$ . b)  $b = 3$ .  
 c) À partir de  $y = f(x)$ , calculer  $x$  en fonction de  $y$ .

**1.4** Calculer, pour tout  $x \in \mathbb{R}$ ,  $(f \circ g)(x)$  et  $(g \circ f)(x)$ , et trouver un  $x \in \mathbb{R}$  tel que ces deux résultats soient différents.

**1.5** Récurrence (faible) sur  $n$ , pour chacune des trois questions.  
 Pour c), utiliser a).

**1.6** a) Revenir à la définition d'une relation d'équivalence.  
 Noter  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $x \mapsto x^2 - 2x$ , pour la commodité.

b) Revenir à la définition de la classe d'équivalence  $\hat{x}$  de  $x$  modulo  $\mathcal{R} : \forall y \in \mathbb{R}, (y \in \hat{x} \iff x \mathcal{R} y)$ .

**1.7** a) Raisonner par équivalences logiques successives, en partant de  $(a, b) \in (A_1 \times B_1) \cap (A_2 \times B_2)$ .  
 b) 1) Même méthode qu'en a).  
 2) Envisager un élément de  $A_1 \times B_2$ .

**1.8** a) Séparer l'équivalence logique en deux implications.

1) Supposer  $E \subset F$ . Alors, toute partie de  $E$  est une partie de  $F$ .

2) Réciproquement, supposer  $\mathcal{P}(E) \subset \mathcal{P}(F)$ . Pour montrer que tout élément  $x$  de  $E$  est élément de  $F$ , penser à considérer le singleton  $\{x\}$ .

b) Raisonner par équivalences logiques.  
 c) Montrer, par un contreexemple, qu'il se peut que  $\mathcal{P}(E \cup F)$  et  $\mathcal{P}(E) \cup \mathcal{P}(F)$  ne soient pas égaux.

**1.9** a) Revenir à la définition d'une relation d'ordre.  
 b) Envisager les éléments 1 et 2 de  $\mathbb{N}^*$ , par exemple.

**1.10** Récurrence à deux pas sur  $n$ .

**1.11** Récurrence forte sur  $n$ .

**1.12** a) • Un sens est évident.

Réciproquement, supposer  $\mathbf{1}_A = \mathbf{1}_B$  et partir d'un élément quelconque  $a$  de  $A$ , pour montrer  $A \subset B$ .

- Pour  $x \in E$ , séparer en cas :  $x \in A$ ,  $x \notin A$ .
- Pour  $x \in E$ , séparer en cas :  $x \in A \cap B$ ,  $x \notin A \cap B$ .
- Passer aux complémentaires à partir du résultat précédent.
- Utiliser les résultats précédents.

b) Calculer  $\mathbf{1}_{A \cap (A \cup B)}$  et  $\mathbf{1}_{A \cup (A \cap B)}$ .

**1.13** a) Revenir à la définition d'une relation d'ordre.  
 b) Envisager  $f, g$  de façon que  $f - g$  ne soit ni croissante ni décroissante.  
 c) Remarquer que, si  $f \mathcal{R} g$ , alors  $f - g$  est décroissante et se rappeler que  $f(0) = g(0)$ .  
 d) Envisager  $f, g$  de façon que  $f \leq g$  mais que  $f - g$  ne soit pas décroissante.

**1.14** a) Revenir aux définitions.  
 b) Revenir aux définitions.  
 c) Se déduit directement de a) et b).

**1.15** Appliquer le résultat de l'exercice 1.14, en groupant en  $(g \circ f) \circ g$  ou en  $g \circ (f \circ g)$ .

**1.16** a) Supposer  $A \subset B$ .  
 Partir d'un élément quelconque  $y$  de  $f(A)$  et utiliser la définition de l'image directe d'une partie de  $E$  par  $f$ .  
 b) Partir de  $a \in A$  et utiliser les définitions.  
 c) • Montrer, en utilisant a) :

$$f(A) \cup f(B) \subset f(A \cup B).$$

- Réciproquement, partir de  $y \in f(A \cup B)$  et utiliser la définition de l'image directe d'une partie de  $E$  par  $f$ .
- d) Utiliser a).

**1.17** a) Supposer  $A' \subset B'$ .  
 Partir d'un élément quelconque  $x$  de  $f^{-1}(A')$  et utiliser la définition de l'image réciproque d'une partie de  $F$  par  $f$ .

- b) Partir de  $y \in f(f^{-1}(A'))$  et utiliser les définitions.
- c) Raisonner par équivalences logiques successives en partant de  $x \in f^{-1}(A' \cup B')$  et en appliquant les définitions.
- d) Raisonner par équivalences logiques successives en partant de  $x \in f^{-1}(A' \cap B')$  et en appliquant les définitions.

1.18 a) Réponses :

1)  $A \Delta B = \{2, 3\}$ ,

2)  $A \Delta B = ]-\infty; 1[ \cup ]2; +\infty[$ .

b) Calculer  $A \Delta B$  d'après sa définition, en utilisant les formules sur le calcul sur les ensembles.

c) Utiliser b) et les formules sur les fonctions caractéristiques (cf. Exercice 1.12).

En particulier, pour tous ensembles  $X, Y$  :

$$\mathbf{1}_{\overline{X}} = 1 - \mathbf{1}_X, \quad \mathbf{1}_{X \cap Y} = \mathbf{1}_X \mathbf{1}_Y,$$

$$\mathbf{1}_{X \cup Y} = \mathbf{1}_X + \mathbf{1}_Y - \mathbf{1}_X \mathbf{1}_Y.$$

d) Calculer les fonctions caractéristiques des deux membres.

## Corrigés des exercices

1.1

a) On a, par distributivité de  $\cap$  sur  $\cup$  :

$$(A \cup B) \cap C = \underbrace{(A \cap C) \cup (B \cap C)}_{\subset A \cup (B \cap C)} \subset A \cup (B \cap C).$$

b) • Supposons  $(A \cup B) \cap C = A \cup (B \cap C)$ .

Soit  $x \in A$ .

Alors,  $x \in A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap C$ , donc  $x \in C$ .

Ceci montre :  $A \subset C$ .

• Réciproquement, supposons  $A \subset C$ .

On a alors, par distributivité de  $\cap$  sur  $\cup$  :

$$(A \cup B) \cap C = \underbrace{(A \cap C) \cup (B \cap C)}_{= A \cup (B \cap C)} = A \cup (B \cap C).$$

On conclut qu'il y a égalité dans l'inclusion obtenue en a) si et seulement si  $A \subset C$ .

1.2

Première méthode, par les ensembles globalement :

Notons  $A', \dots$  le complémentaire de  $A, \dots$  dans  $E$ .

1) On a :  $A \cap B = A \cap C$

$$\implies (A \cap B)' = (A \cap C)'$$

$$\iff A' \cup B' = A' \cup C'$$

$$\implies A \cap (A' \cup B') = A \cap (A' \cup C')$$

$$\iff (A \cap A') \cup (A \cap B') = (A \cap A') \cup (A \cap C')$$

$$\iff A \cap B' = A \cap C'.$$

2) On applique le résultat précédent à  $(B', C')$  à la place de  $(B, C)$  et on obtient l'implication réciproque.

Deuxième méthode, par les éléments :

On suppose  $A \cap B = A \cap C$ .

• Soit  $x \in A \cap C_E(B)$ . Alors,  $x \in A$  et  $x \notin B$ .

Raisonnons par l'absurde : supposons  $x \in C$ .

Alors,  $x \in A \cap C = A \cap B$ , donc  $x \in B$ , contradiction.

Ceci montre  $x \notin C$ , donc  $x \in C_E(C)$ , puis  $x \in A \cap C_E(C)$ .

On a ainsi montré :  $A \cap C_E(B) \subset A \cap C_E(C)$ .

• Par rôles symétriques de  $B$  et  $C$  dans  $A \cap B = A \cap C$ , on a aussi l'autre inclusion, d'où l'égalité.

1.3

a) Il est clair que :  $a = 2$ .

b) Soit  $(x, y) \in (\mathbb{R} \setminus \{2\}) \times \mathbb{R}$ . On a :

$$y = f(x) \iff y = \frac{3x-1}{x-2} \iff xy - 2y = 3x - 1$$

$$\iff xy - 3x = 2y - 1 \iff (y-3)x = 2y - 1.$$

$$\text{Si } y \neq 3, \text{ on a : } y = f(x) \iff x = \frac{2y-1}{y-3}$$

donc  $y$  admet un antécédent et un seul par  $f$ , qui est  $\frac{2y-1}{y-3}$ .

Si  $y = 3$ , alors :  $y = f(x) \iff 0x = 5$ ,

donc  $y$  n'a pas d'antécédent par  $f$ .

Il existe donc un réel et un seul,  $b = 3$ , n'ayant pas d'antécédent par  $f$ .

$$c) \text{ L'application } g : \mathbb{R} \setminus \{2\} \longrightarrow \mathbb{R} \setminus \{3\}, \quad x \longmapsto \frac{3x-1}{x-2}$$

est la restriction de  $f$  à  $\mathbb{R} \setminus \{2\}$  au départ et à  $\mathbb{R} \setminus \{3\}$  à l'arrivée.

On a, pour tout  $(x, y) \in (\mathbb{R} \setminus \{2\}) \times (\mathbb{R} \setminus \{3\})$  :

$$y = g(x) \iff y = \frac{3x-1}{x-2} \iff x = \frac{2y-1}{y-3}.$$

Ainsi, tout élément  $y$  de l'arrivée admet un antécédent et un seul par  $g$ , donc  $g$  est bijective, et l'application réciproque de

$$g \text{ est : } g^{-1} : \mathbb{R} \setminus \{3\} \longrightarrow \mathbb{R} \setminus \{2\}, \quad y \longmapsto \frac{2y-1}{y-3}.$$

**1.4**

• On a, pour tout  $x \in \mathbb{R}$  :

$$\begin{cases} (f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(x^2) = 1 + x^2 \\ (g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(1+x) = (1+x)^2 = 1 + 2x + x^2. \end{cases}$$

• Par exemple :  $(f \circ g)(1) = 2$  et  $(g \circ f)(1) = 4$ , donc :  $f \circ g \neq g \circ f$ .

**1.5**

a) • *Initialisation* :

Pour  $n = 0$ , on a :

$$L_{n+1}^2 - L_n L_{n+2} = L_1^2 - L_0 L_2 = 1^2 - 2 \cdot 3 = -5$$

et  $5(-1)^{n+1} = -5$ ,

donc la formule est vraie pour  $n = 0$ .

• *Hérédité* :

Supposons la formule vraie pour un  $n \in \mathbb{N}$  fixé.

On a alors :

$$\begin{aligned} & L_{n+2}^2 - L_{n+1} L_{n+3} \\ &= L_{n+2}^2 - L_{n+1}(L_{n+2} + L_{n+1}) \\ &= (L_{n+2}^2 - L_{n+1} L_{n+2}) - L_{n+1}^2 \\ &= L_{n+2}(L_{n+2} - L_{n+1}) - L_{n+1}^2 \\ &= L_{n+2} L_n - L_{n+1}^2 \\ &= -(L_{n+1}^2 - L_n L_{n+2}) \\ &= -5(-1)^{n+1} = 5(-1)^{n+2}, \end{aligned}$$

donc la formule est vraie pour  $n + 1$ .

Ceci montre, par récurrence sur  $n$ , que la formule proposée est vraie pour tout  $n \in \mathbb{N}$ .

b) • *Initialisation* :

Pour  $n = 0$  :

$$\sum_{k=0}^n L_k^2 = L_0^2 = 2^2 = 4,$$

et :  $L_n L_{n+1} + 2 = L_0 L_1 + 2 = 2 \cdot 1 + 2 = 4$ ,

donc la formule est vraie pour  $n = 0$ .

• *Hérédité* :

Supposons la formule vraie pour un  $n \in \mathbb{N}$  fixé.

On a alors :

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{n+1} L_k^2 &= \left( \sum_{k=0}^n L_k^2 \right) + L_{n+1}^2 \\ &= (L_n L_{n+1} + 2) + L_{n+1}^2 \\ &= (L_n L_{n+1} + L_{n+1}^2) + 2 \\ &= L_{n+1}(L_n + L_{n+1}) + 2 = L_{n+1} L_{n+2} + 2, \end{aligned}$$

donc la formule est vraie pour  $n + 1$ .

Ceci montre, par récurrence sur  $n$ , que la formule proposée est vraie pour tout  $n \in \mathbb{N}$ .

c) • *Initialisation* :

Pour  $n = 0$  :

$$\begin{cases} L_{2n} = L_0 = 2 \\ L_n^2 - 2(-1)^n = 2^2 - 2 = 2 \end{cases}$$

et

$$\begin{cases} L_{2n+1} = L_1 = 1 \\ L_n L_{n+1} - (-1)^n = 2 \cdot 1 - 1 = 1, \end{cases}$$

donc la formule (système de deux formules) est vraie pour  $n = 0$ .

• *Hérédité* :

Supposons la formule vraie pour un  $n \in \mathbb{N}$  fixé.

On a alors :

$$\begin{aligned} L_{2n+2} &= L_{2n+1} + L_{2n} \\ &= (L_n L_{n+1} - (-1)^n) + (L_n^2 - 2(-1)^n) \\ &= (L_n L_{n+1} + L_n^2) - 3(-1)^n \\ &= L_n(L_{n+1} + L_n) - 3(-1)^n \\ &= L_n L_{n+2} - 3(-1)^n \\ &= (L_{n+1}^2 - 5(-1)^{n+1}) - 3(-1)^n \\ &= L_{n+1}^2 + 2(-1)^n \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} L_{2n+3} &= L_{2n+2} + L_{2n+1} \\ &= (L_{n+1}^2 - 2(-1)^{n+1}) + (L_n L_{n+1} - (-1)^n) \\ &= L_{n+1}(L_{n+1} + L_n) - (-1)^{n+1} \\ &= L_{n+1} L_{n+2} - (-1)^{n+1}, \end{aligned}$$

donc la formule est vraie pour  $n + 1$ .

Ceci montre, par récurrence sur  $n$ , que la formule proposée est vraie pour tout  $n \in \mathbb{N}$ .

**1.6**

a) Notons  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $x \mapsto x^2 - 2x$ .

1) *Réflexivité* :

On a, pour tout  $x \in \mathbb{R}$ ,  $f(x) = f(x)$ , donc  $x \mathcal{R} x$ .

2) *Symétrie* :

Soit  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$  tel que  $x \mathcal{R} y$ .

On a alors  $f(x) = f(y)$ , donc  $f(y) = f(x)$ , d'où  $y \mathcal{R} x$ .

3) *Transitivité* :

Soit  $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$  tel que  $x \mathcal{R} y$  et  $y \mathcal{R} z$ .

On a alors  $f(x) = f(y)$  et  $f(y) = f(z)$ , donc  $f(x) = f(z)$ , d'où  $x \mathcal{R} z$ .

On conclut :  $\mathcal{R}$  est une relation d'équivalence dans  $\mathbb{R}$ .

b) Soit  $x \in \mathbb{R}$ .

Notons  $\hat{x}$  la classe d'équivalence de  $x$  modulo  $\mathcal{R}$ .

On a, pour tout  $y \in \mathbb{R}$  :  $y \in \hat{x}$

$$\begin{aligned} &\iff x \mathcal{R} y \\ &\iff x^2 - 2x = y^2 - 2y \\ &\iff x^2 - y^2 - 2x + 2y = 0 \\ &\iff (x - y)(x + y - 2) = 0 \\ &\iff (y = x \text{ ou } y = 2 - x). \end{aligned}$$

On conclut :  $\hat{x} = \begin{cases} \{1\} & \text{si } x = 1 \\ \{x, 2 - x\} & \text{si } x \neq 1. \end{cases}$

Il en résulte que  $\hat{x}$  est de cardinal 1 si  $x = 1$ , de cardinal 2 si  $x \neq 1$ .

1.7

a) On a, pour tout  $(a, b) \in E \times F$  :

$$\begin{aligned} & (a, b) \in (A_1 \times B_1) \cap (A_2 \times B_2) \\ \iff & ((a, b) \in A_1 \times B_1 \text{ et } (a, b) \in A_2 \times B_2) \\ \iff & (a \in A_1 \text{ et } b \in B_1) \text{ et } (a \in A_2 \text{ et } b \in B_2) \\ \iff & (a \in A_1 \text{ et } a \in A_2) \text{ et } (b \in B_1 \text{ et } b \in B_2) \\ \iff & (a \in A_1 \cap A_2 \text{ et } b \in B_1 \cap B_2) \\ \iff & (a, b) \in (A_1 \cap A_2) \times (B_1 \cap B_2), \end{aligned}$$

donc :  $(A_1 \times B_1) \cap (A_2 \times B_2) = (A_1 \cap A_2) \times (B_1 \cap B_2)$ .

b) 1) On a, pour tout  $(a, b) \in E \times F$  :

$$\begin{aligned} & (a, b) \in (A_1 \times B_1) \cup (A_2 \times B_1) \\ \iff & ((a, b) \in A_1 \times B_1 \text{ ou } (a, b) \in A_2 \times B_1) \\ \iff & ((a \in A_1 \text{ ou } a \in A_2) \text{ et } b \in B_1) \\ \iff & (a \in A_1 \cup A_2 \text{ et } b \in B_1) \\ \iff & (a, b) \in (A_1 \cup A_2) \times B_1, \end{aligned}$$

donc :  $(A_1 \times B_1) \cup (A_2 \times B_1) = (A_1 \cup A_2) \times B_1$ .

2) L'ensemble  $(A_1 \cup A_2) \times (B_1 \cup B_2)$  contient, entre autres, les couples  $(a, b)$  où  $a \in A_1$  et  $b \in B_2$ , et ces couples ne sont pas nécessairement dans  $A_1 \times B_1$  ou  $A_2 \times B_2$ .

Donnons un contreexemple.

Notons  $E = F = \{0, 1\}$ ,  $A_1 = B_1 = \{0\}$ ,  $A_2 = B_2 = \{0, 1\}$ .

$$\begin{aligned} \text{On a alors : } & (A_1 \times B_1) \cup (A_2 \times B_2) = \{(0, 0)\} \cup \{(1, 1)\} \\ \text{et } & (A_1 \cup A_2) \times (B_1 \cup B_2) = \{0, 1\} \times \{0, 1\} \\ & = \{(0, 0), (0, 1), (1, 0), (1, 1)\}. \end{aligned}$$

Ainsi,  $(0, 1)$  est dans le premier ensemble et non dans le second.

On conclut qu'en général il n'y a pas égalité entre les deux ensembles envisagés.

1.8

a) 1) Supposons  $E \subset F$ .

Soit  $X \in \mathcal{P}(E)$ . On a :  $\forall x \in X, x \in E \subset F$ , donc :  $X \subset F$ , c'est-à-dire :  $X \in \mathcal{P}(F)$ .

Ceci montre :  $\mathcal{P}(E) \subset \mathcal{P}(F)$ .

On a établi :  $E \subset F \implies \mathcal{P}(E) \subset \mathcal{P}(F)$ .

2) Réciproquement, supposons  $\mathcal{P}(E) \subset \mathcal{P}(F)$ .

Soit  $x \in E$ . Considérons le singleton  $\{x\}$ , c'est-à-dire l'ensemble à un élément formé par  $x$  tout seul.

On a :  $\{x\} \in \mathcal{P}(E) \subset \mathcal{P}(F)$ , donc :  $x \in F$ .

Ceci montre :  $E \subset F$ .

On a établi :  $\mathcal{P}(E) \subset \mathcal{P}(F) \implies E \subset F$ .

On conclut à l'équivalence logique :

$$E \subset F \iff \mathcal{P}(E) \subset \mathcal{P}(F).$$

$$\begin{aligned} \text{b) On a, pour tout ensemble } X : \\ X \in \mathcal{P}(E \cap F) & \iff X \subset E \cap F \iff \begin{cases} X \subset E \\ X \subset F \end{cases} \\ \iff & \begin{cases} X \in \mathcal{P}(E) \\ X \in \mathcal{P}(F) \end{cases} \iff X \in \mathcal{P}(E) \cap \mathcal{P}(F), \end{aligned}$$

et on conclut :  $\mathcal{P}(E \cap F) = \mathcal{P}(E) \cap \mathcal{P}(F)$ .

c) 1) On a, pour tout ensemble  $X$  :

$$\begin{aligned} X \in \mathcal{P}(E) \cup \mathcal{P}(F) & \iff (X \subset E \text{ ou } X \subset F) \\ & \implies X \in E \cup F \iff X \in \mathcal{P}(E \cup F), \end{aligned}$$

ce qui montre :  $\mathcal{P}(E) \cup \mathcal{P}(F) \subset \mathcal{P}(E \cup F)$ .

2) Mais la réciproque est en général fautive. En effet, si un ensemble  $X$  est inclus dans une réunion  $E \cup F$ , cela n'entraîne pas, en général, que  $X$  soit inclus dans  $E$  ou que  $X$  soit inclus dans  $F$ . En effet,  $X$  peut contenir des éléments de  $E$  qui ne sont pas dans  $F$  et des éléments de  $F$  qui ne sont pas dans  $E$ .

Pour montrer la non-inclusion, donnons un contreexemple :  $E = \{1\}$ ,  $F = \{2\}$ . On a ici :

$$\mathcal{P}(E \cup F) = \mathcal{P}(\{1, 2\}) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{1, 2\}\},$$

$$\mathcal{P}(E) \cup \mathcal{P}(F) = \{\emptyset, \{1\}\} \cup \{\emptyset, \{2\}\} = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}\}.$$

Dans cet exemple, on n'a pas égalité entre  $\mathcal{P}(E \cup F)$  et  $\mathcal{P}(E) \cup \mathcal{P}(F)$ .

1.9

a) 1) *Réflexivité* :

On a, pour tout  $x \in \mathbb{N}^*$ ,  $x \mathcal{R} x$ , car  $x = x^1$ .

2) *Antisymétrie* :

Soient  $x, y \in \mathbb{N}^*$  tels que  $x \mathcal{R} y$  et  $y \mathcal{R} x$ .

Il existe  $n, p \in \mathbb{N}^*$  tels que  $y = x^n$  et  $x = y^p$ .

On a  $x \in \mathbb{N}^*$  et  $n \in \mathbb{N}^*$ , donc  $x \geq 1$  et  $n \geq 0$ , d'où  $x^n \geq x$ , donc  $y = x^n \geq x$ .

De même,  $x \geq y$ , et on déduit  $x = y$ .

3) *Transitivité* :

Soient  $x, y, z \in \mathbb{N}^*$  tels que  $x \mathcal{R} y$  et  $y \mathcal{R} z$ .

Il existe  $n, p \in \mathbb{N}^*$  tels que  $y = x^n$  et  $z = y^p$ .

On a alors :  $z = y^p = (x^n)^p = x^{np}$  et  $np \in \mathbb{N}^*$ , donc  $x \mathcal{R} z$ .

On conclut :  $\mathcal{R}$  est un ordre sur  $\mathbb{N}^*$ .

b) On n'a ni  $1 \mathcal{R} 2$ , car il n'existe pas  $n \in \mathbb{N}^*$  tel que  $2 = 1^n$ , ni  $2 \mathcal{R} 1$ , car il n'existe pas  $n \in \mathbb{N}^*$  tel que  $1 = 2^n$ .

On conclut :  $\mathcal{R}$  n'est pas total.

1.10

Puisque  $u_{n+2}$  est donné en fonction de  $u_{n+1}$  et de  $u_n$ , on va effectuer une récurrence à deux pas.

• *Initialisation* :

Pour  $n = 0$ , on a  $u_1 > u_0$ , car  $u_1 = 1$  et  $u_0 = 0$ .

Pour  $n = 1$ , on a  $u_2 > u_1$ ,

$$\text{car } u_1 = 1 \text{ et } u_2 = \frac{u_1 + u_0}{2} + 1 = \frac{3}{2}.$$

• *Hérédité* :

Supposons que, pour un  $n \in \mathbb{N}$  fixé, on ait  $u_{n+1} > u_n$  et  $u_{n+2} > u_{n+1}$ . On a alors :

$$u_{n+3} = \frac{u_{n+2} + u_{n+1}}{2} + 1 > \frac{u_{n+1} + u_n}{2} + 1 = u_{n+2}.$$

Ceci montre, par récurrence à deux pas sur  $n$  :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} > u_n.$$

On conclut que la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  est strictement croissante.

**1.11**

Puisque  $u_{n+1}$  est donné (entre autres) en fonction de  $u_0, \dots, u_n$ , on va effectuer un raisonnement par récurrence forte.

• *Initialisation* :

Pour  $n = 0$ , on a  $u_0 = 1 \in \mathbb{Q}_+^*$ .

• *Hérédité* :

Supposons, pour un  $n \in \mathbb{N}$  fixé :  $u_0, \dots, u_n \in \mathbb{Q}_+^*$ .

Comme  $u_{n+1} = \sum_{k=0}^n \frac{u_k}{k!(n-k)!}$ , que  $u_0, \dots, u_n$  sont dans  $\mathbb{Q}_+^*$  et que  $0!, 1!, \dots, n!$  sont dans  $\mathbb{N}^*$ , par opérations, on déduit :  $u_{n+1} \in \mathbb{Q}_+^*$ .

On conclut, par récurrence forte sur  $n$  :  $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \in \mathbb{Q}_+^*$ .

**1.12**

a) • Il est clair que, si  $A = B$ , alors  $\mathbf{1}_A = \mathbf{1}_B$ .

Réciproquement, supposons  $\mathbf{1}_A = \mathbf{1}_B$ .

Pour tout  $a \in A$ , on a  $\mathbf{1}_B(a) = \mathbf{1}_A(a) = 1$ , donc  $a \in B$ , ce qui montre  $A \subset B$ , puis, de même,  $B \subset A$ , donc  $A = B$ .

On conclut :  $A = B \iff \mathbf{1}_A = \mathbf{1}_B$ .

Autrement dit, la connaissance de  $\mathbf{1}_A$  détermine entièrement  $A$ .

• On a, pour tout  $x \in E$  :

si  $x \in A$ , alors  $x \notin \bar{A}$ , donc  $\mathbf{1}_A(x) = 1$  et  $\mathbf{1}_{\bar{A}}(x) = 0$ , d'où  $\mathbf{1}_{\bar{A}}(x) = 1 - \mathbf{1}_A(x)$

si  $x \notin A$ , alors  $x \in \bar{A}$ , donc  $\mathbf{1}_A(x) = 0$  et  $\mathbf{1}_{\bar{A}}(x) = 1$ , d'où  $\mathbf{1}_{\bar{A}}(x) = 1 - \mathbf{1}_A(x)$ .

Ceci montre :  $\forall x \in E, \mathbf{1}_{\bar{A}}(x) = 1 - \mathbf{1}_A(x)$ .

On conclut :  $\mathbf{1}_{\bar{A}} = 1 - \mathbf{1}_A$ .

• On a, pour tout  $x \in E$  :

si  $x \in A \cap B$ , alors  $x \in A$  et  $x \in B$ , donc  $\mathbf{1}_{A \cap B}(x) = 1$ ,  $\mathbf{1}_A(x) = 1$ ,  $\mathbf{1}_B(x) = 1$ , d'où  $\mathbf{1}_{A \cap B}(x) = \mathbf{1}_A(x)\mathbf{1}_B(x)$

si  $x \notin A \cap B$ , alors  $x \notin A$  ou  $x \notin B$ , donc  $\mathbf{1}_{A \cap B}(x) = 0$  et ( $\mathbf{1}_A(x) = 0$  ou  $\mathbf{1}_B(x) = 0$ ), d'où  $\mathbf{1}_{A \cap B}(x) = \mathbf{1}_A(x)\mathbf{1}_B(x)$ .

Ceci montre :  $\forall x \in E, \mathbf{1}_{A \cap B}(x) = \mathbf{1}_A(x)\mathbf{1}_B(x)$ .

On conclut :  $\mathbf{1}_{A \cap B} = \mathbf{1}_A\mathbf{1}_B$ .

• On a, en passant par des complémentaires et en utilisant des résultats précédents :

$$\begin{aligned} \mathbf{1}_{A \cup B} &= 1 - \mathbf{1}_{\overline{A \cup B}} \\ &= 1 - \mathbf{1}_{\overline{A} \cap \overline{B}} \\ &= 1 - \mathbf{1}_{\bar{A}}\mathbf{1}_{\bar{B}} \\ &= 1 - (1 - \mathbf{1}_A)(1 - \mathbf{1}_B) \\ &= 1 - (1 - \mathbf{1}_A - \mathbf{1}_B + \mathbf{1}_A\mathbf{1}_B) \end{aligned}$$

$$= \mathbf{1}_A + \mathbf{1}_B - \mathbf{1}_A\mathbf{1}_B.$$

• On a :

$$\mathbf{1}_{A \setminus B} = \mathbf{1}_{A \cap \bar{B}} = \mathbf{1}_A\mathbf{1}_{\bar{B}} = \mathbf{1}_A(1 - \mathbf{1}_B) = \mathbf{1}_A - \mathbf{1}_A\mathbf{1}_B.$$

b) On a, pour tout  $A, B \in \mathcal{P}(E)$ .

$$\begin{aligned} \mathbf{1}_{A \cap (A \cup B)} &= \mathbf{1}_A\mathbf{1}_{A \cup B} = \mathbf{1}_A(\mathbf{1}_A + \mathbf{1}_B - \mathbf{1}_A\mathbf{1}_B) \\ &= \mathbf{1}_A + \mathbf{1}_A\mathbf{1}_B - \mathbf{1}_A\mathbf{1}_B = \mathbf{1}_A, \end{aligned}$$

donc, d'après a) :  $A \cap (A \cup B) = A$ .

De même :

$$\begin{aligned} \mathbf{1}_{A \cup (A \cap B)} &= \mathbf{1}_A + \mathbf{1}_{A \cap B} - \mathbf{1}_A\mathbf{1}_{A \cap B} \\ &= \mathbf{1}_A + \mathbf{1}_A\mathbf{1}_B - \mathbf{1}_A(\mathbf{1}_A\mathbf{1}_B) = \mathbf{1}_A + \mathbf{1}_A\mathbf{1}_B - \mathbf{1}_A\mathbf{1}_B = \mathbf{1}_A, \end{aligned}$$

donc, d'après a) :  $A \cup (A \cap B) = A$ .

On peut aussi remarquer que, puisque  $A \subset A \cup B$ , on a  $A \cap (A \cup B) = A$ , et que, puisque  $A \cap B \subset A$ , on a  $A \cup (A \cap B) = A$ .

**1.13**

a) 1) *Réflexivité* :

Soit  $f \in E$ . On a  $f' \leq f'$ , donc  $f \mathcal{R} f$ .

2) *Antisymétrie* :

Soit  $(f, g) \in E^2$  tel que  $f \mathcal{R} g$  et  $g \mathcal{R} f$ .

On a alors  $f' \leq g'$  et  $g' \leq f'$ , donc  $f' = g'$ . Ainsi,  $f - g$  est dérivable sur l'intervalle  $[0; +\infty[$  et  $(f - g)' = 0$ , donc  $f - g$  est constante.

Comme  $(f - g)(0) = f(0) - g(0) = 1 - 1 = 0$ , on déduit  $f - g = 0$ , donc  $f = g$ .

3) *Transitivité* :

Soit  $(f, g, h) \in E^3$  tel que  $f \mathcal{R} g$  et  $g \mathcal{R} h$ .

On a alors  $f' \leq g'$  et  $g' \leq h'$ , donc  $f' \leq h'$ , d'où  $f \mathcal{R} h$ .

On conclut :  $\mathcal{R}$  est une relation d'ordre dans  $E$ .

b) Pour montrer que l'ordre  $\mathcal{R}$  n'est pas total, il suffit de trouver  $f, g \in E$  telles que l'on n'ait ni  $f' \leq g'$  ni  $g' \leq f'$ , c'est-à-dire telles que  $f - g$  ne soit ni croissante ni décroissante.

Il est clair que les applications  $f, g : [0; +\infty[ \rightarrow \mathbb{R}$  définies, pour tout  $x \in [0; +\infty[$ , par  $f(x) = 1 + x$  et  $g(x) = 1 + x^2$  conviennent.

On conclut que l'ordre  $\mathcal{R}$  n'est pas total.

c) Soit  $(f, g) \in E^2$  tel que  $f \mathcal{R} g$ .

On a alors  $f' \leq g'$ , donc  $(f - g)' \leq 0$ , donc  $f - g$  est décroissante.

Comme  $(f - g)(0) = f(0) - g(0) = 1 - 1 = 0$ , on déduit  $f - g \leq 0$ , donc  $f \leq g$ .

d) Donnons un contreexemple, dans lequel  $f \leq g$  et non  $f \mathcal{R} g$ .

Il suffit de trouver deux applications  $f, g$ , dérivables, telles que :  $f(0) = g(0) = 1$ ,  $f \leq g$  et  $f - g$  non décroissante.

Considérons les applications  $f, g : [0; +\infty[ \rightarrow \mathbb{R}$  définies, pour tout  $x \in [0; +\infty[$ , par :

$$f(x) = 1 \quad \text{et} \quad g(x) = 1 + \sin^2 x.$$

Il est clair que  $f$  et  $g$  sont dérivables sur  $[0; +\infty[$ , que  $f(0) = g(0) = 1$ , que  $f \leq g$ .

De plus :  $\forall x \in [0; +\infty[$ ,  $f'(x) = 0$  et  $g'(x) = 2 \sin x \cos x$ .

En particulier :

$$f'\left(\frac{3\pi}{4}\right) = 0 \quad \text{et} \quad g'\left(\frac{3\pi}{4}\right) = 2 \frac{1}{\sqrt{2}} \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = 1,$$

donc on n'a pas  $f' \leq g'$ , donc non  $f \mathcal{R} g$ .

**1.14**

a) Supposons  $g \circ f$  injective.

Soit  $(x_1, x_2) \in E^2$  tel que  $f(x_1) = f(x_2)$ . On a alors :

$$g \circ f(x_1) = g(f(x_1)) = g(f(x_2)) = g \circ f(x_2).$$

Puisque  $g \circ f$  est injective, il s'ensuit :  $x_1 = x_2$ .

On conclut que  $f$  est injective.

b) Supposons  $g \circ f$  surjective.

Soit  $z \in G$ . Puisque  $g \circ f$  est surjective, il existe  $x \in E$  tel que :  $z = g \circ f(x)$ .

On a alors :  $z = g(f(x))$  et  $f(x) \in F$ .

Ceci montre :  $\forall z \in G, \exists y \in F, z = g(y)$ .

On conclut que  $g$  est surjective.

c) Si  $g \circ f$  est bijective, alors  $g \circ f$  est injective et surjective, donc, d'après a) et b),  $f$  est injective et  $g$  est surjective.

**1.15**

Schématiquement, en utilisant le résultat de l'exercice 1.14, on a :

$$\begin{aligned} g \circ f \circ g \text{ bijective} &\iff \begin{cases} g \circ f \circ g \text{ injective} \\ g \circ f \circ g \text{ surjective} \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} (g \circ f) \circ g \text{ injective} \\ g \circ (f \circ g) \text{ surjective} \end{cases} \implies \begin{cases} g \text{ injective} \\ g \text{ surjective} \end{cases} \\ &\implies g \text{ bijective.} \end{aligned}$$

Ceci montre que  $g$  est bijective.

On peut donc considérer l'application réciproque  $g^{-1}$  de  $g$ . On a alors :  $f = g^{-1} \circ (g \circ f \circ g) \circ g^{-1}$ , qui est la composée de trois applications bijectives, donc  $f$  est bijective.

Finalement,  $f$  et  $g$  sont bijectives.

**1.16**

a) Supposons  $A \subset B$ .

Soit  $y \in f(A)$ . Il existe  $a \in A$  tel que  $y = f(a)$ .

Comme  $a \in A \subset B$ , on a  $a \in B$ , puis  $y = f(a) \in f(B)$ .

On obtient :  $f(A) \subset f(B)$ .

b) Soit  $a \in A$ . On a :  $f(a) \in f(A)$ , donc par définition d'une image réciproque,  $a \in f^{-1}(f(A))$ .

On conclut :  $A \subset f^{-1}(f(A))$ .

c) • En utilisant a) :

$$\begin{aligned} \begin{cases} A \subset A \cup B \\ B \subset A \cup B \end{cases} &\implies \begin{cases} f(A) \subset f(A) \cup f(B) \\ f(B) \subset f(A) \cup f(B) \end{cases} \\ &\implies f(A) \cup f(B) \subset f(A \cup B). \end{aligned}$$

• Soit  $y \in f(A \cup B)$ .

Il existe  $x \in A \cup B$  tel que  $y = f(x)$ .

On a :  $x \in A$  ou  $x \in B$ .

Si  $x \in A$ , alors  $f(x) \in f(A) \subset f(A) \cup f(B)$ .

Si  $x \in B$ , alors  $f(x) \in f(B) \subset f(A) \cup f(B)$ .

On a donc :  $f(x) \in f(A) \cup f(B)$ .

Ceci montre :  $\forall (A \cup B) \subset f(A) \cup f(B)$ .

On conclut :  $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$ .

d) En utilisant a) :

$$\begin{aligned} \begin{cases} A \cap B \subset A \\ A \cap B \subset B \end{cases} &\implies \begin{cases} f(A \cap B) \subset f(A) \\ f(A \cap B) \subset f(B) \end{cases} \\ &\implies f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B). \end{aligned}$$

**1.17**

a) Supposons  $A' \subset B'$ .

Soit  $x \in f^{-1}(A')$ .

On a  $f(x) \in A'$ , donc  $f(x) \in B'$ , puis  $x \in f^{-1}(B')$ .

On conclut :  $f^{-1}(A') \subset f^{-1}(B')$ .

b) Soit  $y \in f(f^{-1}(A'))$ .

Il existe  $x \in f^{-1}(A')$  tel que  $y = f(x)$ .

Puis, comme  $x \in f^{-1}(A')$ , on a  $f(x) \in A'$ , donc  $y \in A'$ .

On conclut :  $f(f^{-1}(A')) \subset A'$ .

c) On a, pour tout  $x \in E$  :

$$\begin{aligned} &x \in f^{-1}(A' \cup B') \\ \iff &f(x) \in A' \cup B' \\ \iff &(f(x) \in A' \text{ ou } f(x) \in B') \\ \iff &(x \in f^{-1}(A') \text{ ou } x \in f^{-1}(B')) \\ \iff &x \in f^{-1}(A') \cup f^{-1}(B'). \end{aligned}$$

On conclut :  $f^{-1}(A' \cup B') = f^{-1}(A') \cup f^{-1}(B')$ .

d) On a, pour tout  $x \in E$  :

$$\begin{aligned} &x \in f^{-1}(A' \cap B') \\ \iff &f(x) \in A' \cap B' \\ \iff &(f(x) \in A' \text{ et } f(x) \in B') \\ \iff &(x \in f^{-1}(A') \text{ et } x \in f^{-1}(B')) \\ \iff &x \in f^{-1}(A') \cap f^{-1}(B'). \end{aligned}$$

On conclut :  $f^{-1}(A' \cap B') = f^{-1}(A') \cap f^{-1}(B')$ .



1.18

a) 1) Pour  $E = \{1, 2, 3, 4\}$ ,  $A = \{1, 2\}$ ,  $B = \{1, 3\}$ , on a :

$$\begin{aligned} A \cup B &= \{1, 2, 3\}, & A \cap B &= \{1\}, \\ \overline{A \cap B} &= \{2, 3, 4\}, & A \Delta B &= \{2, 3\}. \end{aligned}$$

2) Pour  $E = \mathbb{R}$ ,  $A = ]-\infty; 2]$ ,  $B = [1; +\infty[$ , on a :

$$A \cup B = \mathbb{R}, \quad A \cap B = [1; 2],$$

$$\overline{A \cap B} = ]-\infty; 1[ \cup ]2; +\infty[, \quad A \Delta B = ]-\infty; 1[ \cup ]2; +\infty[.$$

b) On a, pour tout  $(A, B) \in (\mathcal{P}(E))^2$  :

$$\begin{aligned} A \Delta B &= (A \cup B) \cap \overline{(A \cap B)} = (A \cup B) \cap (\overline{A} \cup \overline{B}) \\ &= (A \cap \overline{A}) \cup (A \cap \overline{B}) \cup (B \cap \overline{A}) \cup (B \cap \overline{B}) \\ &= (A \cap \overline{B}) \cup (B \cap \overline{A}). \end{aligned}$$

c) On a, pour tout  $(A, B) \in (\mathcal{P}(E))^2$  :

$$\begin{aligned} \mathbf{1}_{A \Delta B} &= \mathbf{1}_{(A \cap \overline{B}) \cup (B \cap \overline{A})} = \mathbf{1}_A \mathbf{1}_{\overline{B}} + \mathbf{1}_B \mathbf{1}_{\overline{A}} - \underbrace{\mathbf{1}_A \mathbf{1}_{\overline{B}} \mathbf{1}_B \mathbf{1}_{\overline{A}}}_{=0} \\ &= \mathbf{1}_A(1 - \mathbf{1}_B) + \mathbf{1}_B(1 - \mathbf{1}_A) = \mathbf{1}_A + \mathbf{1}_B - 2 \cdot \mathbf{1}_A \mathbf{1}_B. \end{aligned}$$

d) Soit  $(A, B, C) \in (\mathcal{P}(E))^3$ . On a :

$$\begin{aligned} \mathbf{1}_{(A \Delta B) \Delta C} &= \mathbf{1}_{A \Delta B} + \mathbf{1}_C - 2 \cdot \mathbf{1}_{A \Delta B} \mathbf{1}_C \\ &= (\mathbf{1}_A + \mathbf{1}_B - 2 \cdot \mathbf{1}_A \mathbf{1}_B) + \mathbf{1}_C - 2 \cdot (\mathbf{1}_A + \mathbf{1}_B - 2 \cdot \mathbf{1}_A \mathbf{1}_B) \mathbf{1}_C \\ &= \mathbf{1}_A + \mathbf{1}_B + \mathbf{1}_C - 2(\mathbf{1}_A \mathbf{1}_B + \mathbf{1}_A \mathbf{1}_C + \mathbf{1}_B \mathbf{1}_C) + 4 \cdot \mathbf{1}_A \mathbf{1}_B \mathbf{1}_C. \end{aligned}$$

De même :

$$\begin{aligned} \mathbf{1}_{A \Delta (B \Delta C)} &= \mathbf{1}_A + \mathbf{1}_{B \Delta C} - 2 \cdot \mathbf{1}_A \mathbf{1}_{B \Delta C} \\ &= \mathbf{1}_A + (\mathbf{1}_B + \mathbf{1}_C - 2 \cdot \mathbf{1}_B \mathbf{1}_C) - 2 \cdot \mathbf{1}_A(\mathbf{1}_B + \mathbf{1}_C - 2 \cdot \mathbf{1}_B \mathbf{1}_C) \\ &= \mathbf{1}_A + \mathbf{1}_B + \mathbf{1}_C - 2(\mathbf{1}_A \mathbf{1}_B + \mathbf{1}_A \mathbf{1}_C + \mathbf{1}_B \mathbf{1}_C) + 4 \cdot \mathbf{1}_A \mathbf{1}_B \mathbf{1}_C. \end{aligned}$$

Ceci montre :  $\mathbf{1}_{(A \Delta B) \Delta C} = \mathbf{1}_{A \Delta (B \Delta C)}$ .

On déduit :  $(A \Delta B) \Delta C = A \Delta (B \Delta C)$ ,

et on conclut que la loi  $\Delta$  est associative dans  $\mathcal{P}(E)$ .

## Plan

Les méthodes à retenir	19
Les énoncés des exercices	23
Du mal à démarrer ?	26
Les corrigés des exercices	27

## Thèmes abordés dans les exercices

- Calculs de sommations simples ou doubles, de produits simples ou doubles
- Manipulation des coefficients binomiaux, obtention d'égalités et calculs de sommes les faisant intervenir
- Résolution de systèmes linéaires.

## Points essentiels du cours pour la résolution des exercices

- Définition et propriétés du symbole  $\sum$  pour une sommation d'un nombre fini de termes, et du symbole  $\prod$  pour un produit d'un nombre fini de facteurs
- Règles de calcul élémentaire sur les nombres entiers, sur les nombres réels
- Sommations usuelles :  $\sum_{k=1}^n k$ ,  $\sum_{k=1}^n k^2$ ,  $\sum_{k=0}^n q^k$
- Factorisation de  $a^n - b^n$  pour  $n \in \mathbb{N}^*$
- Définition et propriétés des coefficients binomiaux  $\binom{n}{p}$ , en particulier :
  - l'expression à l'aide de factorielles  $\binom{n}{p} = \frac{n!}{p!(n-p)!}$ ,
  - la formule fondamentale  $\binom{n}{p} + \binom{n}{p+1} = \binom{n+1}{p+1}$ ,
  - la formule du binôme de Newton
- Opérations élémentaires, méthode du pivot.

# Les méthodes à retenir

## Méthode

Pour calculer certaines  
sommations indexées  
par un entier

- Si le résultat est fourni, essayer de raisonner par récurrence
- Essayer de se ramener aux sommations classiques :
  - la sommation géométrique :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall q \in \mathbb{R} \setminus \{1\}, \sum_{k=0}^n q^k = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$$

- la sommation d'entiers, de carrés d'entiers consécutifs :

$$\sum_{k=1}^n k = \frac{n(n+1)}{2}, \quad \sum_{k=1}^n k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

- la formule du binôme de Newton :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, (x + y)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k y^{n-k}.$$

- Essayer de faire apparaître un télescopage

→ **Exercices 2.1 à 2.3, 2.7, 2.8, 2.14, 2.19 à 2.21**

## Exemple

Montrer, pour tout  $n \in \mathbb{N}$  :

$$\sum_{k=0}^n (-1)^k (2k+1) = (-1)^n (n+1).$$

Récurrence sur  $n$ .

- Pour  $n = 0$ , la formule proposée est évidente.
- Supposons, pour un  $n \in \mathbb{N}$  fixé :

$$\sum_{k=1}^n (-1)^k (2k+1) = (-1)^n (n+1).$$

On a alors :

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{n+1} (-1)^k (2k+1) &= \sum_{k=0}^n (-1)^k (2k+1) + (-1)^{n+1} (2n+3) \\ &= (-1)^n (n+1) + (-1)^{n+1} (2n+3) \\ &= (-1)^{n+1} (-(n+1) + (2n+3)) \\ &= (-1)^{n+1} (n+2), \end{aligned}$$

donc la formule est vraie pour  $n+1$ .

Ceci montre, par récurrence, que la formule est vraie pour tout  $n \in \mathbb{N}$ .

**Exemple**

Calculer, pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$  :

$$S_n = \sum_{k=1}^n k(k+1).$$

On a, pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$  :

$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{k=1}^n k(k+1) = \sum_{k=1}^n k^2 + \sum_{k=1}^n k \\ &= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + \frac{n(n+1)}{2} \\ &= \frac{n(n+1)((2n+1)+3)}{6} = \frac{n(n+1)(n+2)}{6}. \end{aligned}$$

**Exemple**

Calculer, pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$  :

$$S_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)}.$$

On remarque, pour tout  $k \in \mathbb{N}^*$  :  $\frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}$ ,

d'où, pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$  :

$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{k=1}^n \left( \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right) = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \sum_{k=1}^n \frac{1}{k+1} \\ &= \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \sum_{k=2}^{n+1} \frac{1}{k} = \frac{1}{1} - \frac{1}{n+1} = 1 - \frac{1}{n+1}. \end{aligned}$$

**Méthode**

Pour calculer des sommations doubles, ou des produits doubles

Essayer de :

- emboîter deux sommations simples, emboîter deux produits simples
- utiliser une permutation de symboles  $\sum$ , une permutation de symboles  $\prod$
- exploiter des rôles éventuellement symétriques des deux indices

→ Exercices 2.10, 2.12, 2.13, 2.17, 2.18, 2.21

**Exemple**

Calculer, pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$  :

$$S_n = \sum_{1 \leq i, j \leq n} (2i + 3j).$$

On a, pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$  :

$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{1 \leq i, j \leq n} 2i + \sum_{1 \leq i, j \leq n} 3j = 2 \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n i + 3 \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n j \\ &= 2 \sum_{i=1}^n i \left( \sum_{j=1}^n 1 \right) + 3 \sum_{i=1}^n \left( \sum_{j=1}^n j \right) = 2 \sum_{i=1}^n in + 3n \sum_{j=1}^n j \\ &= 2n \sum_{i=1}^n i + 3n \sum_{j=1}^n j = 5n \sum_{i=1}^n i = \frac{5n^2(n+1)}{2}. \end{aligned}$$

**Méthode**

Pour calculer une sommation faisant intervenir des coefficients binomiaux

Essayer de :

- remplacer les coefficients binomiaux par leurs expressions à l'aide de factorielles
- utiliser la formule du binôme de Newton
- utiliser un raisonnement par récurrence, si l'énoncé donne la valeur de la sommation

→ Exercices 2.3, 2.14, 2.19, 2.20

**Exemple**

Montrer, pour tout  $(n, k) \in \mathbb{N}^2$  tel que  $2 \leq k \leq n$  :

$$k(k-1) \binom{n}{k} = n(n-1) \binom{n-2}{k-2}.$$

On a :

$$\begin{aligned} k(k-1) \binom{n}{k} &= k(k-1) \frac{n!}{k!(n-k)!} \\ &= \frac{k(k-1)}{k!} \frac{n!}{(n-k)!} \\ &= \frac{1}{(k-2)!} \frac{n!}{(n-k)!} \\ &= n(n-1) \frac{(n-2)!}{(k-2)!(n-k)!} \\ &= n(n-1) \frac{(n-2)!}{(k-2)!((n-2)-(k-2))!} \\ &= n(n-1) \binom{n-2}{k-2}. \end{aligned}$$

**Exemple**

Calculer, pour  $n \in \mathbb{N}$  :  $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} 2^{k/2}$ .

On applique la formule du binôme de Newton à 1 et  $2^{1/2}$  :

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} 2^{k/2} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} 1^{n-k} (2^{1/2})^k = (1 + \sqrt{2})^n.$$

**Méthode**

Pour résoudre un système linéaire

- Utiliser une méthode de Gauss.
- Utiliser des combinaisons linéaires d'équations pour se ramener à un système équivalent plus simple.

→ Exercices 2.4 à 2.6

**Exemple**

Résoudre le système d'équations, d'inconnue  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$  :

$$\begin{cases} 3x + y = 1 \\ 2x - 3y = 8. \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \begin{cases} 3x + y = 1 & L_1 \\ 2x - 3y = 8 & L_2 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} 3x + y = 1 & L_1 \\ 11x = 11 & L_2 \leftarrow L_2 + 3L_1 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = -2. \end{cases} \end{aligned}$$

**Exemple**

Résoudre le système d'équations, d'inconnue  $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$  :

$$(S) \begin{cases} 4x + y + z = 5 \\ x + 4y + z = -1 \\ x + y + 4z = 8. \end{cases}$$

On a, en additionnant les trois égalités :

$$\begin{aligned} (S) &\Leftrightarrow \begin{cases} (S) \\ 6(x + y + z) = 12 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4x + y + z = 5 & L_1 \\ x + 4y + z = -1 & L_2 \\ x + y + 4z = 8 & L_3 \\ x + y + z = 2 & L_4 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} 3x = 3 & L_1 \leftarrow L_1 - L_4 \\ 3y = -3 & L_2 \leftarrow L_2 - L_4 \\ 3z = 6 & L_3 \leftarrow L_3 - L_4 \\ x + y + z = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = -1 \\ z = 2. \end{cases} \end{aligned}$$