Algèbre

Fiche-méthodes 1 :

Décomposer une fraction rationnelle en éléments simples

Le but de la méthode est de décomposer une fraction rationnelle $f = \dfrac{P}{Q}$ (où P et Q sont des polynômes premiers entre eux) en une somme de fractions rationnelles « plus simples » .
On peut présenter deux méthodes classiques pour y arriver.

On réduit tous les termes au même dénominateur.

> On réduit au même dénominateur tous les termes de la partie fractionnaire de f, et on identifie avec la fraction initiale.
> L'énoncé nous proposera la décomposition attendue (ou en tous les cas sa forme).

Exemple : Soit la fraction rationnelle $f(x) = \dfrac{x^2+1}{(x-1)^2(x+2)}$; il nous faut trouver $a, b, c \in \mathbb{R}$ tels que $f(x) = \dfrac{a}{(x-1)^2} + \dfrac{b}{x-1} + \dfrac{c}{x+2}$ pour $x \neq 1$ et $x \neq -2$.
Solution : On part de la forme proposée et on réduit tout au même dénominateur :
$\dfrac{a}{(x-1)^2} + \dfrac{b}{x-1} + \dfrac{c}{x+2} = \dfrac{(b+c)x^2 + (a+b-2c)x + (2a-2b+c)}{(x-1)^2(x+2)}$
et on l'identifie à la forme initiale de f, ce qui nous donne le système

$$\left\{\begin{array}{l} b+c=1 \\ a+b-2c=0 \\ 2a-2b+c=1 \end{array}\right. .$$

On trouve alors : $a = \dfrac{2}{3}$, $b = \dfrac{4}{9}$, $c = \dfrac{5}{9}$, d'où la décomposition de f :

$$\frac{x^2+1}{(x-1)^2(x+2)} = \frac{2/3}{(x-1)^2} + \frac{4/9}{x-1} + \frac{5/9}{x+2}.$$

Remarque : cette méthode donne souvent lieu à des calculs assez lourds ; il est conseillé, chaque fois que cela est possible, de l'éviter.

On calcule les coefficients de la décomposition en les isolant.

> Pour isoler le coefficient α se trouvant dans la fraction $\dfrac{\alpha}{x-a}$ d'une décomposition en éléments simples, on pensera à multiplier toute la relation par $x-a$ puis à prendre $x=a$. On répète l'opération pour chacun des coefficients à déterminer.

Exemple 1 : Soit à décomposer en éléments simples $f(x) = \dfrac{x}{(x-2)(x+3)}$ pour $x \neq 2$ et $x \neq -3$; il nous faut trouver $a, b \in \mathbb{R}$ tels que

$$f(x) = \frac{a}{x-2} + \frac{b}{x+3}.$$

Solution : On a les valeurs : $a = (x-2)f(x)\Big|_{x=2} = \dfrac{x}{x+3}\Big|_{x=2} = \dfrac{2}{5}$,
et $b = (x+3)f(x)\Big|_{x=-3} = \dfrac{x}{x-2}\Big|_{x=-3} = \dfrac{3}{5}$.
D'où la décomposition :

$$\frac{x}{(x-2)(x+3)} = \frac{2/5}{x-2} + \frac{3/5}{x+3}.$$

Exemple 2 : La tâche peut s'avérer plus délicate s'il on a dans la décomposition un terme avec un carré.
Prenons l'exemple $f(x) = \dfrac{x+2}{(x-1)^2(x+1)} = \dfrac{a}{(x-1)^2} + \dfrac{b}{x-1} + \dfrac{c}{x+1}$ pour $x \neq -1$ et $x \neq 1$.
Solution : On a les valeurs : $c = (x+1)f(x)\Big|_{x=-1} = \dfrac{x+2}{(x-1)^2}\Big|_{x=-1} = \dfrac{1}{4}$,
et $a = (x-1)^2 f(x)\Big|_{x=1} = \dfrac{x+2}{x+1}\Big|_{x=1} = \dfrac{3}{2}$.
Le problème se présente au moment où nous voulons calculer b car on ne peut multiplier la relation par $x-1$ puis prendre $x = 1$ (à cause du terme en $\dfrac{1}{(x-1)^2}$).
On contourne ce problème en multipliant toute la relation par x puis en faisant tendre x vers $+\infty$, il vient : $0 = 0 + b + \dfrac{1}{4}$ d'où $b = -\dfrac{1}{4}$.
Ainsi, on a la décomposition :

$$\frac{x+2}{(x-1)^2(x+1)} = \frac{3/2}{(x-1)^2} + \frac{-1/4}{x-1} + \frac{1/4}{x+1}.$$

Fiche-méthodes 2 :

Espaces vectoriels et sous-espaces vectoriels

Comment montrer qu'une partie F d'un ev E est un sev de E ?

• **On revient à la définition**.

> Soit E un espace vectoriel réel et $F \subset E$; F est un sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel E si :
> - $0_E \in F$
> - $\forall \alpha \in \mathbb{R},\ \forall (x,y) \in F^2,\ \alpha x + y \in F$.

Exemple : Soit l'ensemble

$$F = \{M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}),\ AM = MA\}$$

où $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ est donnée ; montrer que F est un espace vectoriel.
Solution : Tout d'abord on note que $F \subset \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ (c'est notre espace vectoriel E).
Vérifions les axiomes :
- Ici $0_{\mathcal{M}_3(\mathbb{R})}$ représente la matrice nulle, on a évidemment $A \times 0 = 0 \times A = 0$ donc $0_{\mathcal{M}_3(\mathbb{R})} \in F$.
- Pour $\alpha \in \mathbb{R}$ et $M, N \in F$, voyons si $\alpha M + N \in F$.
$A(\alpha M + N) = \alpha AM + AN \underset{M,N \in F}{=} \alpha MA + NA = (\alpha M + N)A$, ainsi $\alpha M + N \in F$.
En conclusion, F est bien un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ (et donc F est lui-même un espace vectoriel).

• **On écrit, quand cela est possible, l'ensemble F à l'aide d'un Vect**.

> Soit $S = (v_1, \ldots, v_n)$ une famille de n vecteurs de E.
> On rappelle que $F = Vect(v_1, \ldots, v_n) = \{\alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_n v_n;\ \alpha_i \in \mathbb{R}\}$ est l'ensemble des combinaisons linéaires de $v_1, \ldots, v_n$. On sait que F est un sous-espace vectoriel de E, appelé le sous-espace vectoriel engendré par S (S est donc une famille génératrice de F).

Exemple : Soit l'ensemble

$$F = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3,\ x + y = 0,\ 2x - y + z = 0\}.$$

Noter que : $\left\{ \begin{array}{l} x + y = 0 \\ 2x - y + z = 0 \end{array} \right. \iff \left\{ \begin{array}{l} x = -y \\ z = 3y \end{array} \right.$; montrer que F est un espace vectoriel.

Solution : On a $v = (x, y, z) \in F \iff$ il existe un réel y tel que :
$v = (x, y, z) \in F \iff v = (-y, y, 3y) = y(-1, 1, 3)$, d'où :
$F = Vect((-1, 1, 3))$.
On peut donc conclure que F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ (et donc c'est un espace vectoriel).

Remarque : on peut même conclure que $((-1, 1, 3))$ *est une base de* F *et dim* $F = 1$.

• On peut essayer de montrer que *F* est le noyau ou l'image d'une application linéaire.

<u>*Exemple*</u> : Soit l'ensemble $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3,\ 3x - 4y + z = 0\}$; montrer que F est un espace vectoriel.
Solution : On considère l'application linéaire $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ définie par :

$$f(x, y, z) = 3x - 4y + z.$$

Alors, $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3,\ 3x - 4y + z = 0\} = Ker\ f$; d'où : F est un espace vectoriel.

Comment montrer que *F* n'est pas un sev de *E* ?

On peut soit montrer que $0_E \notin F$, ou si $0_E \in F$ montrer que F n'est pas stable soit pour la multiplication externe soit pour l'addition.

<u>*Exemple 1*</u> : Pour l'ensemble $F = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2,\ x + y = 1\}$, on peut remarquer que $0_{\mathbb{R}^2} = (0, 0)$ n'appartient pas à F car $0 + 0 = 0 \neq 1$.
Donc, F n'est pas un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^2$.

<u>*Exemple 2*</u> : Soit l'ensemble $F = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2,\ xy = 0\}$.
$0_{\mathbb{R}^2} = (0, 0) \in F$; on ne peut rien dire pour le moment.
Considérons : $v_1 = (1, 0) \in F$ et $v_2 = (0, 1) \in F$.
On a $v_1 + v_2 = (1, 1) \notin F$.
La stabilité pour la loi + n'étant pas assurée, F n'est pas un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^2$.

Comment montrer que deux sev de dimension finie sont égaux ?

Pour montrer que deux sous-espaces vectoriels F et G sont égaux, il suffit de montrer par exemple : $F \subset G$ et $dim\ F = dim\ G$.

<u>*Exemple*</u> : Dans $\mathbb{R}^3$, on considère les vecteurs : $v_1 = (2, 3, -1)$, $v_2 = (1, -1, -2)$, $w_1 = (3, 7, 0)$ et $w_2 = (5, 0, -7)$.
Montrer que : $Vect(v_1, v_2) = Vect(w_1, w_2)$.

Solution : On note $F = Vect(v_1, v_2)$ et $G = Vect(w_1, w_2)$.
Clairement, par non colinéarité de v_1 et v_2 et aussi de w_1 et w_2, on a $dim\ F = dim\ G = 2$.
Il nous reste à montrer une inclusion ; par exemple, pour montrer que $F \subset G$, il nous suffit de vérifier que v_1 et v_2 sont dans G.
On trouve facilement que $v_1 = \frac{3}{7}w_1 + \frac{1}{7}w_2$ (on a raisonné à l'aide des coordonnées nulles dans w_1 et w_2).
De même, on a $v_2 = -\frac{1}{7}w_1 + \frac{2}{7}w_2$.
Dès lors, $F \subset G$ et donc, avec $dim\ F = dim\ G$, on a $F = G$.

Comment montrer qu'un sev F de E est stable par $f \in \mathcal{L}(E)$?

• **On utilise la définition.**

> Soit f un endomorphisme d'un espace vectoriel E et F un sous-espace vectoriel de E. F est dit stable par f si $f(F) \subset F$.
> Autrement dit, F est stable par $f \iff \forall x \in F,\ f(x) \in F$.

Remarque : si F est stable par $f \in \mathcal{L}(E)$, la restriction de f à F, notée $f_{|F}$ induit un endomorphisme de F défini par : $\forall x \in F,\ f_{|F}(x) = f(x)$.

Exemple : En notant E_λ le sous-espace propre de f associé à la valeur propre λ, montrer que E_λ est stable par f.
Solution : En effet, pour $x \in E_\lambda$ on $f(x) = \lambda x$.
Il nous faut vérifier que $f(x) \in E_\lambda$ c'est-à-dire $f(f(x)) = \lambda f(x)$ ce qui est immédiat en composant la relation $f(x) = \lambda x$ par f.
Ainsi, tout E_λ est stable par f.

• **On utilise une famille génératrice de F.**

> Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ et $(v_1, \ldots, v_p)$ une famille génératrice de F. Pour montrer que $F = Vect(v_1, \ldots, v_p)$ est stable par f, on vérifie que : $\forall i \in [\![1;p]\!],\ f(v_i) \in F$.

Exemple : On considère l'endomorphisme f de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique est :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Soit $v_1 = (1, 1, 1)$, $v_2 = (2, 1, 0)$ et $F = Vect(v_1, v_2)$.
Montrer que F est stable par f.
Solution : Pour cela, il nous suffit de vérifier que $f(v_1)$ et $f(v_2)$ sont dans F ; on procède matriciellement :

$A\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$ et donc $f(v_1)=v_1\in F$.
$A\begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\2\\1\end{pmatrix}$ et donc $f(v_2)=v_1+v_2\in F$.
En conclusion, F est stable par f.

Fiche-méthodes 3 :

Familles libres ou liées - Bases

Comment montrer que la famille $S = (v_1, \ldots, v_k)$ est libre ?

Soit $S = (v_1, \ldots, v_k)$ une famille de k vecteurs d'un espace vectoriel E de dimension finie n.

• **Dans le cas général, on revient à la définition**.

Celle-ci nous précise que si une combinaison linéaire de ces vecteurs est nulle alors nécessairement tous les coefficients sont nuls, soit :

$$\sum_{i=1}^{k} \lambda_i v_i = 0 \Longrightarrow \forall i \in [\![1; k]\!],\ \lambda_i = 0.$$

Deux cas particuliers :
$\star$ Si la famille ne contient qu'un seul vecteur v, on utilise la propriété : (v) est libre $\Longleftrightarrow v \neq 0_E$.
$\star$ Si la famille contient deux vecteurs u et v, on utilise la propriété : (u, v) libre $\Longleftrightarrow$ u et v ne sont pas proportionnels.

Remarque : noter que pour qu'une famille de plus de trois vecteurs soit libre, il ne suffit pas que les vecteurs soient 2 à 2 non colinéaires.

Exemple : Soit $S = \Big(v_1 = (5, 2, -11), v_2 = (1, 1, 2), v_3 = (-1, 0, 6)\Big)$. Vérifier que S est libre.

Solution : On a : $\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \lambda_3 v_3 = 0_{\mathbb{R}^3} \Longleftrightarrow \begin{cases} 5\lambda_1 + \lambda_2 - \lambda_3 = 0 \\ 2\lambda_1 + \lambda_2 = 0 \\ -11\lambda_1 + 2\lambda_2 + 6\lambda_3 = 0 \end{cases}$

$\Longleftrightarrow \begin{cases} \lambda_2 = -2\lambda_1 \\ \lambda_3 = 3\lambda_1 \\ -11\lambda_1 - 4\lambda_1 + 18\lambda_1 = 0 \end{cases} \Longleftrightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0.$

Ainsi, la famille S est libre.

• **On peut aussi déterminer le rang de S**.

En calculant le rang de S, on utilise l'équivalence :

$$S \text{ est libre} \Longleftrightarrow rg(S) = k.$$