







## 1. Ensembles – Applications

 L'essentiel du cours .....	14
 Exercices corrigés	
1. Sur les notations ensemblistes .....	18
2. Vocabulaire sur les applications .....	19
3. Image directe. Image réciproque .....	21
4. Injection. Surjection. Bijection : exemples .....	23
5. Injection, surjection, bijection : exercices théoriques .....	26
6. Un résultat théorique sur les classes d'équivalence .....	28
7. Étude de relations d'équivalence .....	29

## 2. Nombres complexes et trigonométrie



 L'essentiel du cours .....	35
 Exercices corrigés	
1. Écriture algébrique et écriture trigonométrique .....	44
2. Calculs de puissances .....	45
3. Équations du second degré .....	46
4. Racines $n$ -ièmes .....	47
5. Équations dans $\mathbb{C}$ .....	48
6. Linéarisation .....	50
7. Délinéarisation .....	51
8. Sommes trigonométriques .....	52
9. Sur les racines $n$ -ièmes de l'unité .....	54
10. La fonction exponentielle complexe .....	55
11. Géométrie élémentaire et complexes .....	55
12. Transformations du plan et complexes .....	56
13. Géométrie classique et complexes .....	58
14. Relations trigonométriques .....	59
15. Équations et inéquations trigonométriques .....	61
16. Transformation de sommes en produits .....	65

## 3. Calculs algébriques – Arithmétique



 L'essentiel du cours .....	68
 Exercices corrigés	
1. Manipulation du symbole $\sum$ .....	72
2. Calculs de sommes .....	73
3. Autour des sommes géométriques .....	76
4. Sur la factorielle .....	77
5. Sur les coefficients binomiaux et la formule du binôme .....	78

6. Calculs de sommes doubles .....	81
7. Calculs de produits .....	84
8. Divisibilité .....	86
9. Division euclidienne .....	87
10. Sur les nombres premiers .....	89
11. Sur la décomposition en produit de facteurs premiers .....	90
12. Calcul de PGCD, PPCM .....	91
13. Calcul du PGCD de $2^m - 1$ et de $2^n - 1$ .....	94



#### 4. Ensemble $\mathbb{R}$ : inégalités

 L'essentiel du cours .....	95
 Exercices corrigés	
1. Manipulation d'inégalités .....	98
2. Recherche d'inégalités ou d'encadrements .....	98
3. Différents encadrements d'une même quantité .....	102
4. Inéquations .....	104
5. Valeur absolue .....	106
6. Partie entière d'un nombre réel .....	109
7. Majorant, minorant... .....	111

#### 5. Fonctions de la variable réelle à valeurs dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$



 L'essentiel du cours .....	115
 Exercices corrigés	
1. Éléments de symétrie .....	126
2. Calcul de dérivées .....	129
3. Bijection réciproque .....	132
4. Fonctions majorées, minorées, bornées .....	137
5. Position, courbe et tangente en un point .....	139
6. Des inégalités .....	140
7. Résolutions d'équations et d'inéquations .....	144
8. Étude de fonctions .....	149
9. Formules sur les fonctions circulaires réciproques .....	154
10. $\cos(\text{Arccos}(x))$ et $\text{Arccos}(\cos(x))$ .....	155
11. Des égalités classiques .....	157

#### 6. Primitives



 L'essentiel du cours .....	158
 Exercices corrigés	
1. Primitives de fonctions du type $u' \times f'(u)$ .....	162
2. Primitives de « fonctions trigonométriques » .....	164
3. Primitives de fonctions du type $x \mapsto P(x) \cos(ax)$ ou $x \mapsto P(x) \sin(ax)$ avec $P$ fonction polynomiale et $a$ réel .....	167
4. Primitives de fonctions du type $x \mapsto P(x)e^{ax}$ avec $P$ fonction polynomiale et $a$ réel .....	168
5. Primitives de fonctions du type $x \mapsto P(x) \ln(x)$ avec $P$ fonction polynomiale .....	169

7.	Primitives de fonctions du type : $x \mapsto e^{ax} \cos(bx)$ ou $x \mapsto e^{ax} \sin(bx)$ avec $a, b$ réels ...	172
8.	Primitives de fonctions du type : $x \mapsto \frac{1}{ax^2 + bx + c}$ ...	172
9.	Changement de variable (1) ...	176
10.	Changement de variable (2) ...	179
11.	Calculs d'intégrales ...	181

## 7. Équations différentielles

	<b>L'essentiel du cours</b> ...	<b>184</b>
	<b>Exercices corrigés</b>	
1.	Équation différentielle linéaire d'ordre 1 ...	188
2.	Résolution d'équations différentielles linéaire d'ordre 1 sur un intervalle où $a$ s'annule ...	190
3.	Équation différentielle linéaire d'ordre 2 à coefficients constants ...	194
4.	Équation différentielle avec paramètre ...	198
5.	Équation différentielle du premier ordre à coefficients constants ...	199
6.	Une équation fonctionnelle ...	200
7.	Un système différentiel ...	201
8.	Changement de fonction Inconnue ...	203

## 8. Suites

	<b>L'essentiel du cours</b> ...	<b>204</b>
	<b>Exercices corrigés</b>	
1.	Monotonie d'une suite ...	210
2.	Suites majorées, minorées... ..	213
3.	Suites et relation d'ordre ...	216
4.	Étude d'une suite à l'aide d'une suite auxiliaire ...	218
5.	Suites arithmético-géométrique ...	218
6.	Étude de suites récurrentes linéaires d'ordre 2 ...	220
7.	Exemples de suites divergentes ...	221
8.	Sur des suites monotones ...	222
9.	Utilisation des suites extraites. Suites adjacentes ...	224
10.	Étude d'une suite définie implicitement ...	225
11.	Étude de suites « imbriquées » ...	227
12.	Généralités sur les suites récurrentes ...	228
13.	Étude d'un suite récurrente : exemple 1 ...	231
14.	Étude d'un suite récurrente : exemple 2 ...	233
15.	Étude d'une suite complexe ...	235

## 9. Limites – Continuité

	<b>L'essentiel du cours</b> ...	<b>236</b>
	<b>Exercices corrigés</b>	
1.	Recherche de limites ...	244
2.	Ordre et limites ...	249

3. Autour de $\frac{\sin x}{x}$ .....	250
4. Fonctions ne possédant pas de limite en $a$ ( $a$ désignant un réel ou $-\infty$ ou $+\infty$ ) .....	254
5. Étude de la continuité .....	255
6. Étude de la continuité ou du prolongement par continuité en $x_0$ .....	257
7. Fonctions continues sur un segment .....	259
8. Théorème des valeurs intermédiaires .....	261
9. À propos du théorème de la bijection .....	263
10. Étude d'une équation fonctionnelle .....	266
11. Étude d'une famille de fonctions .....	267

## 10. Dérivabilité

 <b>L'essentiel du cours</b> .....	<b>271</b>
---	------------

### Exercices corrigés

1. Utilisation de la notion de dérivabilité .....	277
2. Étude de la dérivabilité d'une fonction .....	279
3. Dérivée et sens de variations .....	281
4. Bijection réciproque et dérivabilité .....	282
5. À propos du théorème de Rolle .....	284
6. À propos du théorème et de l'inégalité des accroissements finis .....	287
7. Théorème des accroissements finis généralisés .....	290
8. Sur le Théorème de limite de la dérivée .....	291
9. Recherche de dérivée $n^{\text{ème}}$ .....	296
10. Fonctions à valeurs complexes et dérivation .....	301



## 11. Analyse asymptotique

 <b>L'essentiel du cours</b> .....	<b>303</b>
--	------------



### Exercices corrigés

1. Recherche d'équivalents de suites .....	309
2. Quelques résultats théoriques sur les équivalents et applications .....	315
3. Études de limites .....	318
4. Étude d'une suite définie implicitement .....	320
5. Développement asymptotique d'une suite définie implicitement .....	323
6. Équivalent d'une suite définie par récurrence .....	325
7. Recherche d'un équivalent d'une suite définie à l'aide d'une intégrale .....	327
8. Recherche d'équivalents de fonctions .....	328
9. Recherche de limites .....	332
10. Étude locale de fonctions de la forme $u(x)^{v(x)}$ .....	334
11. Premiers calculs de DL .....	337
12. Quotients de DL .....	340
13. Composition de DL .....	343
14. Recherche de DL en $a \neq 0$ .....	346
15. Recherche d'équivalents et de limites .....	350
16. Étude locale d'une fonction .....	351
17. Étude de la vitesse de convergence de suites .....	355



## 12. Intégration

 L'essentiel du cours .....	358
 Exercices corrigés	
1. Intégrale des fonctions en escalier .....	362
2. Calculs d'intégrales .....	362
3. Sommes de Riemann .....	367
4. Aire et calcul intégral .....	370
5. Suite définie par une intégrale (1) .....	372
6. Suite définie par une intégrale (2) : Intégrales de Wallis .....	374
7. Suite définie par une intégrale (3) .....	377
8. Intégrale et limite : $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_a^b f_n(t) dt$ .....	378
9. Fonction définie par une intégrale (1) .....	381
10. Fonction définie par une intégrale (2) : Étude complète .....	382
11. Formule de Taylor avec reste intégral .....	385
12. À propos de la nullité d'une intégrale .....	386
13. Égalité de la moyenne .....	390



## 13. Séries numériques

 L'essentiel du cours .....	392
 Exercices corrigés	
1. Calculs de sommes de séries convergentes .....	396
2. Étude de la nature de séries .....	400
3. Étude de la nature de séries .....	404
4. Séries de Bertrand .....	406
5. Série harmonique et lien entre suites et séries .....	410
6. Autour de la série $\sum \frac{(-1)^n}{n}$ .....	411
7. Autour de la série $\sum \frac{1}{n!}$ .....	413
8. Série complexe .....	414
9. Utilisation de comparaisons avec des séries géométriques .....	415
10. Étude de séries dont le terme général est défini par récurrence .....	417
11. Étude d'une série dont le terme général est défini par une intégrale .....	419
12. Étude d'une série dont le terme général est défini à l'aide d'une somme .....	421
13. Étude d'une série dont le terme général est le reste d'une série convergente .....	422



## 14. Systèmes linéaires

 L'essentiel du cours .....	423
 Exercices corrigés	
1. Étude de systèmes échelonnés .....	426
2. Résolutions de systèmes par deux méthodes .....	431
3. Système à deux inconnues et géométrie plane .....	438
4. Système à trois inconnues et géométrie dans l'espace .....	440
5. Système et système homogène associé .....	444



## 15. Calcul matriciel

 L'essentiel du cours .....	446
 Exercices corrigés	
1. Calculs avec des matrices .....	454
2. Puissance $n$ -ième d'une matrice carrée .....	457
3. Inverse d'une matrice carrée .....	460
4. Calcul de $A^n$ avec diagonalisation .....	466
5. Lien entre matrices et systèmes .....	467
6. Réduction à une matrice échelonnée réduite .....	468
7. Matrices élémentaires .....	469
8. Étude d'une famille de matrices .....	471
9. Matrices symétriques .....	472
10. Trace d'une matrice carrée .....	473

## 16. Géométrie élémentaire du plan : PTSI



 L'essentiel du cours .....	475
 Exercices corrigés	
1. Coordonnées polaires .....	482
2. Propriétés algébriques du produit scalaire et du produit mixte .....	483
3. Équations cartésiennes de droites et de cercles .....	485
4. Distance d'un point à une droite .....	488
5. Droites parallèles .....	491
6. Équation cartésienne d'un cercle – Tangentes à un cercle .....	492
7. Intersections de droites et de cercles .....	493
8. Bases orthonormales .....	496
9. Lignes de niveau .....	497
10. Transformations du plan .....	498
11. Problème de régionnement .....	502

## 17. Géométrie élémentaire de l'espace : PTSI



 L'essentiel du cours .....	505
 Exercices corrigés	
1. Propriétés algébriques du produit scalaire et du produit vectoriel : Propriétés des tétraèdres .....	513
2. Construction d'une base orthonormale et changement de repères .....	514
3. Équations cartésiennes de plans – Intersection de deux plans .....	515
4. Système d'équations cartésiennes d'une droite de $E$ – Droites coplanaires .....	517
5. Droites et plans parallèles .....	519
6. Orthogonalité d'une droite et d'un plan – Perpendicularité de deux plans .....	521
7. Perpendiculaire commune à deux droites .....	521
8. Distance d'un point à un plan .....	524
9. Distance d'un point à une droite .....	526
10. Équation cartésienne d'une sphère .....	528
11. Intersection sphère plan .....	530
12. Symétries orthogonales .....	---

13. Rotations .....	536
14. Plan médiateur, sphère circonscrite .....	540



## 18. Polynômes

 <b>L'essentiel du cours</b> .....	<b>542</b>
 <b>Exercices corrigés</b>	
1. Étude du degré et du coefficient dominant d'un polynôme .....	547
2. Reste d'une division euclidienne .....	549
3. Une propriété du reste dans une division euclidienne .....	550
4. Racines multiples d'un polynôme .....	550
5. Divisibilité et racines d'un polynôme .....	551
6. Factorisations dans $\mathbb{C}[X]$ .....	552
7. Factorisations dans $\mathbb{R}[X]$ .....	553
8. Nullité d'un polynôme – Égalité de polynômes .....	555
9. Équations polynomiales .....	556
10. Relations coefficients-racines .....	557
11. Sur la formule de Taylor .....	558
12. Polynômes interpolateurs de Lagrange .....	559

## 19. Espaces vectoriels



 <b>L'essentiel du cours</b> .....	<b>561</b>
 <b>Exercices corrigés</b>	
1. Espaces vectoriels - Sous-espaces vectoriels .....	567
2. Sous-espaces vectoriels engendrés .....	570
3. Familles libres de $n$ vecteurs .....	573
4. Familles libres – Familles liées .....	573
5. Recherche de bases .....	576
6. Exemples de bases de $\mathbb{R}_n[X]$ .....	578
7. Sous-espaces vectoriels supplémentaires .....	580
8. Sommes et sommes directes .....	584
9. Rang d'une famille de vecteurs .....	586

## 20. Applications linéaires



 <b>L'essentiel du cours</b> .....	<b>589</b>
 <b>Exercices corrigés</b>	
1. Recherche d'une famille génératrice de $\text{Im } f$ .....	594
2. Applications de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^p$ .....	594
3. Applications linéaires sur $\mathbb{R}_n[X]$ .....	600
4. Applications linéaires sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ .....	604
5. Une application linéaire sur $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ .....	606
6. Une application linéaire sur $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ .....	607
7. Sur les projecteurs et les symétries .....	608
8. Exemple d'un endomorphisme injectif et non surjectif .....	612
9. Étude d'un ensemble de suites récurrentes linéaires d'ordre 3 .....	613

10. Polynôme annulateur d'un endomorphisme .....	615
11. Modes de définition d'une application linéaire .....	617
12. Quelques résultats théoriques concernant le noyau et l'image d'une application linéaire .....	619
13. Un résultat théorique sur le rang d'une application linéaire .....	621



## 21. Matrices

 L'essentiel du cours .....	622
 Exercices corrigés	
1. Matrice d'une application linéaire .....	626
2. Étude d'un endomorphisme canoniquement associé à une matrice, changement de bases et applications... ..	630
3. Endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$ et matrice... ..	634
4. Projection, symétrie et matrice .....	637
5. Rang d'une matrice .....	641
6. Noyau, image et rang d'une matrice. ....	645
7. Application de la recherche du rang d'une matrice .....	646
8. Une résultat théorique sur le rang d'une matrice .....	648

## 22. Déterminants : PCSI + PTSI option PSI

 L'essentiel du cours .....	649
 Exercices corrigés	
1. Calculs de déterminants $3 \times 3$ .....	652
2. Calculs de déterminants par opérations élémentaires .....	653
3. Utilisation de la définition du déterminant .....	654
4. Calculs de déterminants par une relation de récurrence .....	655
5. Utilisation des déterminants .....	659
6. Déterminants avec paramètres .....	661
7. Calculs d'aires et de volumes .....	663
8. Déterminant de Vandermonde .....	664
9. Calcul du déterminant d'un endomorphisme .....	667
10. Utilisation du déterminant d'un endomorphisme .....	668



## 23. Produit scalaire – Espaces euclidiens : PCSI

 L'essentiel du cours .....	670
 Exercices corrigés	
1. Généralités sur norme et produit scalaire .....	675
2. Étude d'un produit scalaire sur $\mathbb{R}_2[X]$ .....	677
3. Sous-espaces orthogonaux – Orthogonal d'un sous-espace vectoriel .....	680
4. Construction de bases orthonormées .....	682
5. Travail sur un produit scalaire dans $C([a, b])$ .....	686
6. Un produit scalaire sur $\mathbb{R}[X]$ .....	691
7. Travail sur le produit scalaire canonique dans $\mathbb{R}^3$ .....	693
8. À propos des équations linéaires .....	695
9. Caractérisation des projections orthogonales .....	696





10. Projections orthogonales de $\mathbb{R}^2$	407
11. Projections orthogonales de $\mathbb{R}^3$	699
12. Étude d'une transformation de $\mathbb{R}^3$	703



## 24. Dénombrement

 L'essentiel du cours	705
 Exercices corrigés	
1. Avec ou sans ordre ? Avec ou sans répétition ?	707
2. Système d'immatriculation des Véhicules	709
3. Tirages dans une urne et dénombrement	710
4. Tirages de cartes et dénombrement	713
5. Des permutations au service des étudiants !	715
6. Exemples d'obtention par le dénombrement de formules avec des coefficients binomiaux	718
7. Exemples de dénombrements par bijection	721
8. Exemples de dénombrement d'une partie d'un produit cartésien	724
9. Dénombrement par récurrence	725



## 25. Probabilités sur un univers fini

 L'essentiel du cours	727
 Exercices corrigés	
1. Dénombrement et propriétés d'une probabilité	732
2. Formules des probabilités composées, des probabilités totales, de Bayes	737
3. Encore plus de probabilités totales	741
4. Indépendance et conditionnement	749



## 26. Variables aléatoires

 L'essentiel du cours	755
 Exercices corrigés	
1. Variables aléatoires et événements	760
2. Détermination de loi de probabilités	760
3. Autour de la loi uniforme	768
4. Autour de la loi de Bernoulli	773
5. Autour de la loi binomiale	775
6. Quelques modélisations	781

## 27. Couples de variables aléatoires

 L'essentiel du cours	787
 Exercices corrigés	
1. Lols conjointes et marginales	791
2. Avec les lois conditionnelles	798
3. Autour de l'indépendance	804
4. Suites finies de variables aléatoires	810

## 28. Logique–Raisonnements

 <b>L'essentiel du cours</b> .....	<b>815</b>
 <b>Exercices corrigés</b>	
1. Quantificateurs – Négation .....	818
2. Implication – Contraposée – Réciproque .....	821
3. Condition nécessaire et suffisante .....	824
4. Quelques modes de raisonnement : en arithmétique .....	826
5. Quelques modes de raisonnement : sur les réels .....	828
6. Quelques modes de raisonnement : sur les suites .....	831
7. Quelques modes de raisonnement : sur les équations .....	833
8. Quelques modes de raisonnement : en algèbre .....	837
9. Une équation fonctionnelle .....	839
10. Lecture de propriétés de cours .....	840
 <u>Index des notations</u>	 <b>842</b>

<u>Index</u>	<b>844</b>
--------------	------------