





Sommaire



1. Ensembles – Applications





 L'essentiel du cours	15
 Exercices corrigés	
1. Sur les notations ensemblistes	19
2. Vocabulaire sur les applications	20
3. Image directe. Image réciproque	22
4. Injection. Surjection. Bijection : exemples	24
5. Injection, surjection, bijection : exercices théoriques	27
6. Un résultat théorique sur les classes d'équivalence	29
7. Étude de relations d'équivalence	30
8. Relation d'ordre sur $\mathcal{P}(E)$	35

2. Nombres complexes et trigonométrie



 L'essentiel du cours	37
 Exercices corrigés	
1. Écriture algébrique et écriture trigonométrique	46
2. Calculs de puissances	47
3. Équations du second degré	48
4. Racines n -ièmes	49
5. Équations dans \mathbb{C}	50
6. Linéarisation	52
7. Délinéarisation	53
8. Sommes trigonométriques	54
9. Sur les racines n -ièmes de l'unité	56
10. La fonction exponentielle complexe	57
11. Géométrie élémentaire et complexes	57
12. Transformations du plan et complexes	58
13. Géométrie classique et complexes	60
14. Relations trigonométriques	61
15. Équations et inéquations trigonométriques	63
16. Transformation de sommes en produits	67

3. Calculs algébriques



 L'essentiel du cours	70
 Exercices corrigés	
1. Manipulation du symbole \sum	73
2. Calculs de sommes	74
3. Autour des sommes géométriques	77
4. Sur la factorielle	78

5.	Sur les coefficients binomiaux et la formule du binôme	79
6.	Calculs de sommes doubles	82
7.	Calculs de produits	85
4.	Arithmétique	
	L'essentiel du cours	88
	Exercices corrigés	
1.	Équation $ax + by = c$ avec a, b, c entiers	92
2.	Un résultat de divisibilité	94
3.	Une relation de divisibilité avec la division euclidienne	94
4.	Un deuxième exemple d'utilisation de la division euclidienne	95
5.	Exemples d'utilisation de polynômes en arithmétique	95
6.	Nombres de Fermat	96
7.	Congruences	98
8.	Congruences et critères de divisibilité	99
5.	Structures algébriques usuelles	
	L'essentiel du cours	101
	Exercices corrigés	
1.	Étude d'une loi de composition interne	104
2.	Exemples de sous-groupes de (\mathbb{C}^*, \times)	105
3.	Un sous-groupe de \mathcal{S}_n	106
4.	Un groupe de transformations du plan complexe	107
5.	Deux groupes de matrices	108
6.	Intersection et union de deux sous-groupes	108
7.	Centre d'un groupe	109
8.	Opérations sur les parties d'un ensemble	110
9.	Le groupe des homothéties	111
10.	Un exemple d'anneau	112
11.	Entiers de Gauss	113
12.	Anneau intègre—Corps	115
13.	Un exemple de corps	116



6. Ensemble \mathbb{R} : inégalités

	L'essentiel du cours	119
	Exercices corrigés	
1.	Manipulation d'inégalités	123
2.	Recherche d'inégalités ou d'encadrements	123
3.	Différents encadrements d'une même quantité	127
4.	Inéquations	129
5.	Valeur absolue	131
6.	Partie entière d'un nombre réel	134
7.	Majorant, minorant...	136



7. Fonctions de la variable réelle à valeurs dans \mathbb{R} ou \mathbb{C}

 L'essentiel du cours	140
 Exercices corrigés	
1. Éléments de symétrie	151
2. Calcul de dérivées	154
3. Bijection réciproque	157
4. Fonctions majorées, minorées, bornées	162
5. Position, courbe et tangente en un point	164
6. Des inégalités	165
7. Résolutions d'équations et d'inéquations	169
8. Étude de fonctions	174
9. Formules sur les fonctions circulaires réciproques	179
10. $\cos(\text{Arccos}(x))$ et $\text{Arccos}(\cos(x))$	180
11. Des égalités classiques	182



8. Primitives

 L'essentiel du cours	183
 Exercices corrigés	
1. Primitives de fonctions du type $u' \times f'(u)$	187
2. Primitives de « fonctions trigonométriques »	189
3. Primitives de fonctions du type $x \mapsto P(x) \cos(ax)$ ou $x \mapsto P(x) \sin(ax)$ avec P fonction polynomiale et a réel	192
4. Primitives de fonctions du type $x \mapsto P(x)e^{ax}$ avec P fonction polynomiale et a réel	193
5. Primitives de fonctions du type $x \mapsto P(x) \ln(x)$ avec P fonction polynomiale	194
6. Primitives de fonctions usuelles	195
7. Primitives de fonctions du type : $x \mapsto e^{ax} \cos(bx)$ ou $x \mapsto e^{ax} \sin(bx)$ avec a, b réels	197
8. Primitives de fonctions du type : $x \mapsto \frac{1}{ax^2 + bx + c}$	197
9. Changement de variable (1)	201
10. Changement de variable (2)	204
11. Calculs d'intégrales	206



9. Équations différentielles

 L'essentiel du cours	209
 Exercices corrigés	
1. Équation différentielle linéaire d'ordre 1	213
2. Résolution d'équations différentielles linéaire d'ordre 1 sur un intervalle où a s'annule	215
3. Équation différentielle linéaire d'ordre 2 à coefficients constants	219
4. Équation différentielle avec paramètre	223
5. Équation différentielle du premier ordre à coefficients constants	224
6. Une équation fonctionnelle	225
7. Un système différentiel	226
8. Changement de fonction inconnue	228



10. Suites réelles et complexes

 L'essentiel du cours	229
 Exercices corrigés	
1. Monotonie d'une suite	236
2. Suites majorées, minorées... ..	239
3. Suites et relation d'ordre	242
4. Étude d'une suite à l'aide d'une suite auxiliaire	244
5. Suites arithmético-géométrique	244
6. Étude de suites récurrentes linéaires d'ordre 2	246
7. Exemples de suites divergentes	247
8. Sur des suites monotones	248
9. Utilisation des suites extraites. Suites adjacentes	250
10. Étude d'une suite définie implicitement	251
11. Étude de suites « imbriquées »	253
12. Généralités sur les suites récurrentes	254
13. Étude d'une suite récurrente : exemple 1	257
14. Étude d'une suite récurrente : exemple 2	259
15. Étude d'une suite complexe	261
16. Utilisation de la densité	262

11. Limites – Continuité



 L'essentiel du cours	264
 Exercices corrigés	
1. Recherche de limites	273
2. Ordre et limites	278
3. Autour de $\frac{\sin x}{x}$	279
4. Fonctions ne possédant pas de limite en a (a désignant un réel ou $-\infty$ ou $+\infty$)	283
5. Étude de la continuité	284
6. Étude de la continuité ou du prolongement par continuité en x_0	286
7. Fonctions continues sur un segment	288
8. Théorème des valeurs intermédiaires	290
9. À propos du théorème de la bijection	292
10. Étude d'une équation fonctionnelle	295
11. Étude d'une famille de fonctions	296

12. Dérivabilité



 L'essentiel du cours	300
 Exercices corrigés	
1. Utilisation de la notion de dérivabilité	306
2. Étude de la dérivabilité d'une fonction	308
3. Dérivée et sens de variations	310
4. Bijection réciproque et dérivabilité	311
5. À propos du théorème de Rolle	313

6.	À propos du théorème et de l'inégalité des accroissements finis	316
7.	Théorème des accroissements finis généralisés	319
8.	Sur le Théorème de limite de la dérivée	320
9.	Recherche de dérivée $n^{\text{ème}}$	325
10.	Fonctions de classe C^∞ avec un problème local	330
11.	Fonctions à valeurs complexes et dérivation	331

13. Analyse asymptotique

	L'essentiel du cours	333
	Exercices corrigés	
1.	Recherche d'équivalents de suites	339
2.	Quelques résultats théoriques sur les équivalents et applications	345
3.	Études de limites	348
4.	Étude d'une suite définie implicitement	350
5.	Développement asymptotique d'une suite définie implicitement	353
6.	Équivalent d'une suite définie par récurrence	355
7.	Recherche d'un équivalent d'une suite définie à l'aide d'une intégrale	357
8.	Recherche d'équivalents de fonctions	358
9.	Recherche de limites	362
10.	Étude locale de fonctions de la forme $u(x)^{v(x)}$	364
11.	Premiers calculs de DL	367
12.	Quotients de DL	370
13.	Composition de DL	373
14.	Recherche de DL en $a \neq 0$	376
15.	Recherche d'équivalents et de limites	380
16.	Étude locale d'une fonction	381
17.	Étude de la vitesse de convergence de suites	385

14. Intégration

	L'essentiel du cours	388
	Exercices corrigés	
1.	Sur les fonctions en escalier	393
2.	Intégrale des fonctions en escalier	393
3.	Lemme de Lebesgue	394
4.	Calculs d'intégrales	397
5.	Primitives de fonctions rationnelles	402
6.	Sommes de Riemann	404
7.	Aire et calcul intégral	408
8.	Suite définie par une intégrale (1)	410
9.	Suite définie par une intégrale (2) : Intégrales de Wallis	412
10.	Suite définie par une intégrale (3)	415
11.	Intégrale et limite : $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_a^b f_n(t) dt$	416

12. Fonction définie par une intégrale (1)	419
13. Fonction définie par une intégrale (2) : Étude complète	420
14. À propos de la nullité d'une intégrale	423
15. Égalité de la moyenne	427
16. Formule de Taylor avec reste intégral	428

15. Séries numériques

 L'essentiel du cours	432
--	-----

Exercices corrigés

1. Calculs de sommes de séries convergentes	436
2. Étude de la nature de séries	440
3. Étude de la nature de séries	444
4. Séries de Bertrand	446
5. Série harmonique et lien entre suites et séries	450
6. Autour de la série $\sum \frac{(-1)^n}{n}$	451
7. Autour de la série $\sum \frac{1}{n!}$	453
8. Série complexe	454
9. Utilisation de comparaisons avec des séries géométriques	455
10. Étude de séries dont le terme général est défini par récurrence	457
11. Étude d'une série dont le terme général est défini par une intégrale	459
12. Étude d'une série dont le terme général est défini à l'aide d'une somme	461
13. Étude d'une série dont le terme général est le reste d'une série convergente	462

16. Systèmes linéaires

 L'essentiel du cours	463
--	-----

Exercices corrigés

1. Étude de systèmes échelonnés	466
2. Résolutions de systèmes par deux méthodes	471
3. Système à deux inconnues et géométrie plane	478
4. Système à trois inconnues et géométrie dans l'espace	480
5. Système et système homogène associé	484

17. Calcul matriciel



 L'essentiel du cours	486
--	-----

Exercices corrigés



1. Calculs avec des matrices	494
2. Puissance n -ième d'une matrice carrée	497
3. Inverse d'une matrice carrée	500
4. Calcul de A^n avec diagonalisation	506
5. Lien entre matrices et systèmes	507
6. Réduction à une matrice échelonnée réduite	508
7. Matrices élémentaires	509
8. Étude d'une famille de matrices	511

9. Matrices symétriques	512
10. Trace d'une matrice carrée	513



18. Polynômes

 L'essentiel du cours	515
 Exercices corrigés	
1. Étude du degré et du coefficient dominant d'un polynôme	522
2. Reste d'une division euclidienne	524
3. Une propriété du reste dans une division euclidienne	525
4. Racines multiples d'un polynôme	525
5. Divisibilité et racines d'un polynôme	526
6. Factorisations dans $\mathbb{C}[X]$	528
7. Factorisations dans $\mathbb{R}[X]$	529
8. Nullité d'un polynôme – Égalité de polynômes	531
9. Équations polynomiales	532
10. Relations coefficients-racines	533
11. Détermination d'un polynôme à partir de conditions sur les racines	536
12. Polynômes interpolateurs de Lagrange	537
13. Équation : $AU + BV = C$	538
14. PGCD de P et P'	541
15. Arithmétique autour des polynômes $X^n - 1$	542
16. Polynômes à coefficients entiers	543

19. Fractions rationnelles



 L'essentiel du cours	545
 Exercices corrigés	
1. Décomposition en éléments simples dans $\mathbb{C}(X)$	548
2. Décomposition en éléments simples dans $\mathbb{R}(X)$	553
3. Décomposition en éléments simples de $\frac{P}{P'}$	554
4. Utilisations de la décomposition en éléments simples	556

20. Espaces vectoriels



 L'essentiel du cours	559
 Exercices corrigés	
1. Espaces vectoriels - Sous-espaces vectoriels	567
2. Sous-espaces vectoriels engendrés par une famille finie	570
3. Familles libres – Familles liées	573
4. Familles libres. Familles génératrices	575
5. Recherche de bases	578
6. Exemples de bases de $\mathbb{R}_n[X]$	581
7. Sous-espaces vectoriels supplémentaires	582
8. Sommes et sommes directes de deux sous-espaces vectoriels	586
9. Sommes et sommes directes de n sous-espaces vectoriels	589

10. Rang d'une famille de vecteurs	592
11. Intersections de sommes et sommes d'intersections pour des sous-espaces	594



21. Applications linéaires

 L'essentiel du cours	596
 Exercices corrigés	
1. Recherche d'une famille génératrice de $\text{Im } f$	603
2. Applications de \mathbb{R}^n dans \mathbb{R}^p	603
3. Applications linéaires sur $\mathbb{R}_n[X]$	609
4. Applications linéaires sur $\mathcal{A}_n(\mathbb{K})$	613
5. Une application linéaire sur $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$	615
6. Une application linéaire sur $\mathbb{R}^{\mathbb{Z}}$	616
7. Sur les projecteurs et les symétries	617
8. Exemple d'un endomorphisme injectif et non surjectif	621
9. Étude d'un ensemble de suites récurrentes linéaires d'ordre 3	622
10. Polynôme annulateur d'un endomorphisme	624
11. Modes de définition d'une application linéaire	626
12. Quelques résultats théoriques concernant le noyau et l'image d'une application linéaire	628
13. Un résultat théorique sur le rang d'une application linéaire	630
14. Exemples d'hyperplans	631
15. Sous-espaces affines de \mathbb{R}^2 et \mathbb{R}^3	634
16. Sous-espaces affines et systèmes linéaires	637
17. Sous-espaces affines et équations différentielles	639
18. Sous-espaces affines et suites	641
19. Interpolation	643
20. Sur les translations	646



22. Matrices

 L'essentiel du cours	647
 Exercices corrigés	
1. Matrice d'une application linéaire	653
2. Étude d'un endomorphisme canoniquement associé à une matrice, changement de bases et applications... ..	657
3. Endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$ et matrice... ..	661
4. Projection, symétrie et matrice	664
5. Rang d'une matrice	668
6. Noyau, image et rang d'une matrice.	672
7. Application de la recherche du rang d'une matrice	673
8. Un résultat théorique sur le rang d'une matrice	675
9. Matrices par blocs	675
10. Dimension d'un sous-espace de $L(E)$	677
11. Matrices de rang 1	679
12. Une équation matricielle	681



23. Groupe symétrique – Déterminants

 L'essentiel du cours	682
 Exercices corrigés	
1. Opérations sur les permutations, exemples dans \mathcal{S}_7	688
2. Calculs de déterminants 3×3	690
3. Calculs de déterminants par opérations élémentaires	691
4. Sur la formule de calcul du déterminant	692
5. Utilisation du caractère n -linéaire alterné	693
6. Calculs de déterminants par une relation de récurrence	694
7. Utilisation des déterminants	698
8. Déterminants avec paramètres	700
9. Utilisation du pivot de Gauss	702
10. Matrices par blocs	703
11. Calculs d'aires et de volumes	705
12. Déterminant de Vandermonde	706
13. Une famille de matrices avec paramètre	709
14. Calcul du déterminant d'un endomorphisme	709
15. Utilisation du déterminant d'un endomorphisme	711

24. Produit scalaire – Espaces euclidiens : PCSI



 L'essentiel du cours	713
 Exercices corrigés	
1. Généralités sur norme et produit scalaire	721
2. Étude d'un produit scalaire sur $\mathbb{R}_2[X]$	723
3. Sous-espaces orthogonaux–Orthogonal d'un sous-espace vectoriel	726
4. Construction de bases orthonormées	728
5. Travail sur un produit scalaire dans $C([a, b])$	732
6. Un produit scalaire sur $\mathbb{R}[X]$	737
7. Travail sur le produit scalaire canonique dans \mathbb{R}^3	739
8. À propos des équations linéaires	741
9. Caractérisation des projections orthogonales	742
10. Projections orthogonales de \mathbb{R}^2	743
11. Projections orthogonales de \mathbb{R}^3	745
12. Étude d'une transformation de \mathbb{R}^3	749
13. Lignes de niveau de $\overrightarrow{AM} \cdot \vec{n}$	751
14. Distance à un hyperplan affine dans \mathbb{R}^2 et \mathbb{R}^3	752
15. Une isométrie vectorielle	755
16. Isométries vectorielles de \mathbb{R}^2	757
17. Réflexions de \mathbb{R}^3	762

25. Dénombrement



 L'essentiel du cours	764
 Exercices corrigés	
1. Avec ou sans ordre ? Avec ou sans répétition ?	766

2.	Système d'Immatriculation des Véhicules	768
3.	Tirages dans une urne et dénombrement	769
4.	Tirages de cartes et dénombrement	772
5.	Des permutations au service des étudiants!	774
6.	Exemples d'obtention par le dénombrement de formules avec des coefficients binomiaux	777
7.	Exemples de dénombrements par bijection	780
8.	Exemples de dénombrement d'une partie d'un produit cartésien	783
9.	Dénombrement par récurrence	784



26. Probabilités sur un univers fini

	L'essentiel du cours	786
	Exercices corrigés	
1.	Dénombrement et propriétés d'une probabilité	791
2.	Formules des probabilités composées, des probabilités totales, de Bayes	796
3.	Encore plus de probabilités totales	800
4.	Indépendance et conditionnement	808



27. Variables aléatoires

	L'essentiel du cours	814
	Exercices corrigés	
1.	Variables aléatoires et événements	819
2.	Détermination de loi de probabilités	819
3.	Autour de la loi uniforme	827
4.	Autour de la loi de Bernoulli	832
5.	Autour de la loi binomiale	834
6.	Quelques modélisations	840

28. Couples de variables aléatoires

	L'essentiel du cours	846
	Exercices corrigés	
1.	Lois conjointes et marginales	850
2.	Avec les lois conditionnelles	859
3.	Autour de l'indépendance	865
4.	Suites finies de variables aléatoires	872

29. Logique–Raisonnements

	L'essentiel du cours	879
	Exercices corrigés	
1.	Quantificateurs – Négation	882
2.	Implication – Contraposée – Réciproque	885
3.	Condition nécessaire et suffisante	888
4.	Quelques modes de raisonnement : en arithmétique	890
5.	Quelques modes de raisonnement : sur les réels	892

6.	Quelques modes de raisonnement : sur les suites	895
7.	Quelques modes de raisonnement : sur les équations	897
8.	Quelques modes de raisonnement : en algèbre	901
9.	Une équation fonctionnelle	903
10.	Lecture de propriétés de cours	904

<u>Index des notations</u>	906
----------------------------	-----

<u>Index</u>	908
--------------	-----

Matériel protégé par le droit d'auteur