

Table des matières

1. ALGÈBRE GÉNÉRALE	1
I. Groupes et sous-groupes	1
1. Groupes	1
2. Produit de groupes	1
3. Sous-groupes	1
4. Génération	2
5. Sous-groupes du groupe $(\mathbb{Z}, +)$	4
II. Morphismes de groupes	5
1. Définition	5
2. Propriétés	5
III. Groupes monogènes et cycliques	6
1. Congruence modulo n	6
2. Morphisme canonique	7
3. Groupes cycliques	7
IV. Anneaux	8
1. Définitions	8
2. Idéaux d'un anneau commutatif	10
3. Idéaux de \mathbb{Z} ; anneaux $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, +, \cdot)$	12
V. Anneaux de polynômes à une indéterminée	14
VI. Algèbres	16
Exercices	17
Travaux dirigés	26
Dévissage du groupe des éléments inversibles de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$	26
Polynômes cyclotomiques	29
Corps des quaternions; théorème des quatre carrés	33
2. RÉDUCTION DES ENDOMORPHISMES	37
I. Sous-espaces vectoriels stables	37
II. Polynômes d'endomorphisme	38
A. Généralités	38
B. Théorème de décomposition des noyaux	40
III. Éléments propres	41
A. Cas d'un endomorphisme	41

B. Cas d'une matrice	43
C. Polynôme caractéristique	44
IV. Réduction en dimension finie	47
A. Diagonalisation	47
B. Trigonalisation	52
Exercices	53
Travaux dirigés	73
Matrices cycliques	73
Sous-algèbres de $\mathcal{L}(E)$ de codimension 1	77
Matrice de Vandermonde	80
Décomposition de Dunford ; applications	82
Suites récurrentes linéaires	85
3. ESPACES VECTORIELS NORMÉS	89
I. Normes et distances	89
A. Définitions	89
B. Exemples fondamentaux	92
C. Applications lipschitziennes	94
II. Suites	95
A. Nature d'une suite	95
B. Comparaison des normes	97
C. Suites extraites. Valeurs d'adhérence	98
III. Topologie dans un espace vectoriel normé	99
A. Voisinages, ouverts, fermés	99
B. Adhérence, intérieur, frontière	102
IV. Limites, continuité	103
A. Limites	103
B. Continuité	106
C. Continuité uniforme	109
V. Applications linéaires, bilinéaires continues	110
VI. Compacité	111
VII. Espace vectoriel normé de dimension finie	114
VIII. Convexité	116
IX. Connexité par arcs	119
Exercices	121
Travaux dirigés	138
Des normes sur $\mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$	138
Valeurs d'adhérence d'une suite ; applications	139

4. SÉRIES ET FAMILLES SOMMABLES 145

I. Séries numériques et vectorielles 145

- A. Séries vectorielles 145
- B. Structure d'espace vectoriel 146
- C. Compléments sur les séries numériques 147

II. Familles sommables de nombres complexes 152

- A. Dénombrabilité 152
- B. Familles sommables de nombres réels positifs 155
- C. Familles sommables de nombres complexes 157
- D. Familles sommables, séries ; le lien 159

Exercices 163

Travaux dirigés 180

- Développement asymptotique du reste d'une série de Riemann 180
- Règle de Raabe-Duhamel 181
- Théorème du point fixe et applications 183
- Groupement par paquets 184
- Espaces ℓ^p 186
- Transformation d'Abel ; premières applications 188

5. SUITES ET SÉRIES DE FONCTIONS 191

I. Divers types de convergence de suites de fonctions 191

II. Continuité et limites uniformes 194

III. Approximations de fonctions 196

IV. Séries de fonctions 201

- A. Divers modes de convergence 201
- B. Propriétés de la somme 203

Exercices 204

Travaux dirigés 212

- Théorèmes de Dini 212
- Un produit infini 215
- Une convergence vers la fonction exponentielle 218

6. FONCTIONS VECTORIELLES 221

I. Dérivation 221

- A. Définitions 221
- B. Opérations 223
- C. Fonctions de classe \mathcal{C}^k 226

II. Intégrale sur un segment 228

III. Dérivation et intégration	231
A. Primitives de fonctions continues	231
B. Accroissements finis	232
C. Formules de Taylor	234
D. Exemple des intégrales de Wallis	235
IV. Suites et séries de fonctions	235
A. Convergence en moyenne	235
B. Dérivation	236
V. Arcs paramétrés	238
Exercices	239
Travaux dirigés	252
Une suite de fonctions périodiques	252
Intégration approchée	255
Majoration d'une fonction dérivée	258
Une racine carrée de fonction	260
Théorème de Borel	263
Fonctions à variation bornée	265
7. INTÉGRATION SUR UN INTERVALLE	271
I. Intégrales généralisées	271
A. Définitions	271
B. Propriétés	271
II. Intégration de relations de comparaison	276
A. Théorème	276
B. Applications	277
III. Intégrales et séries	278
A. Comparaison à une série numérique	278
B. Application à l'étude de séries	279
C. Passage à la limite sous l'intégrale	280
D. Intégrales à paramètre	282
E. Compléments sur la fonction Γ	284
Exercices	285
Travaux dirigés	306
Fonction définie par une intégrale	306
Convolution et régularisation	308
Transformation de Fourier	311
Transformation de Laplace	315
Méthode de Laplace ; application à la formule de Stirling	319
Calcul d'une intégrale	321
Formule des compléments	326
Développements asymptotiques de fonctions définies par une intégrale	328

8. SÉRIES ENTIÈRES	335
I. Rayon de convergence	335
A. Définitions	335
B. Détermination du rayon	336
II. Propriétés de la somme	339
A. Continuité	339
B. Intégration	339
C. Dérivabilité	340
III. Fonctions développables en série entière	341
A. Définitions	341
B. Séries de Taylor	342
C. Développements classiques	342
Exercices	344
Travaux dirigés	363
Théorème de Bernstein	363
Comportement aux bornes de l'intervalle de convergence	365
Inégalités de Cauchy ; applications	368
Une équation fonctionnelle	371
Un théorème de Hardy et Littlewood	376
9. ESPACES PRÉHILBERTIENS RÉELS	381
I. Espaces préhilbertiens réels	381
A. Produit scalaire	381
B. Orthogonalité	386
C. Projection orthogonale	389
II. Espaces euclidiens	392
A. Expressions analytiques	392
B. Isomorphisme canonique	392
C. Isométries vectorielles	393
D. Endomorphismes symétriques	398
E. Projecteurs orthogonaux	401
Exercices	402
Travaux dirigés	412
Matrice et déterminant de Gram	412
Théorème de Courant-Fischer et applications	415
Approximation d'une matrice de rang fixé	417
Conditionnement d'une matrice de Hilbert	422
Norme d'un endomorphisme symétrique	428
Formes positives et produit scalaire sur $\mathbb{R}[X]$	433
10. VARIABLES ALÉATOIRES DISCRÈTES	437

I. Espaces probabilisés	437
II. Propriétés des probabilités	438
III. Probabilités conditionnelles et indépendance	440
IV. Variables aléatoires discrètes	443
V. Couple de variables aléatoires	444
VI. Lois discrètes usuelles	447
VII. Moments d'une variable aléatoire discrète	449
VII. Fonctions génératrices	457
IX. Complément : chaînes de Markov	459
Exercices	462
Travaux dirigés	474
Autour des records	474
Somme aléatoire de variables aléatoires	478
11. ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES	483
I. Généralités	483
II. Équations linéaires scalaires d'ordre 1	483
III. Équations linéaires du premier ordre	486
IV. Équations scalaires d'ordre 2	492
Exercices	495
Travaux dirigés	506
Solutions pseudo-périodiques d'une équation différentielle	506
Équation différentielle de Bessel	511
Lemme de Gronwall ; applications	515
Fonctions oscillantes	519
12. CALCUL DIFFÉRENTIEL	525
I. Généralités	525
II. Opérations sur l'ensemble des applications de classe \mathcal{C}^1	528
III. Algèbre $\mathcal{C}^1(U, \mathbb{K})$	531
IV. Dérivées partielles d'ordre $k \geq 2$	535
Exercices	537
Travaux dirigés	548
Endomorphismes conservant un opérateur différentiel	548
Équation aux dérivées partielles	552
Optimisation, méthode du gradient	556