

Sommaire

1	EQUATIONS DIFFERENTIELLES	1
1.1	COURS	1
1.1.1	Introduction	1
1.1.1.1	Résumé	1
1.1.1.2	Positionnement mathématique	2
1.1.2	Equations linéaires scalaires d'ordre 1	2
1.1.2.1	Définitions	3
1.1.2.2	Formule de représentation	4
1.1.2.3	Applications théoriques	5
1.1.2.4	Techniques de calcul	6
1.1.2.5	Méthode d'Euler	8
1.1.3	Equations linéaires vectorielles d'ordre 1	10
1.1.3.1	Exemples	10
1.1.3.2	Définitions	13
1.1.3.3	Le théorème de Cauchy-Lipschitz	14
1.1.3.4	Systèmes différentiels homogènes à coefficients constants diagonalisables	16
1.1.4	Equations linéaires scalaires d'ordre 2	20
1.1.4.1	Définitions	21
1.1.4.2	Théorème de Cauchy-Lipschitz	21
1.1.4.3	Résolution dans le cas de coefficients constants	23
1.2	COMPLEMENT — METHODE DE VARIATION DES CONSTANTES	25
1.2.1	Cas des systèmes linéaires d'ordre 1	25
1.2.2	Application : équations différentielles scalaires d'ordre 2	28
1.3	EXERCICES	30
1.3.1	Révisions : réduction des matrices	30
1.3.2	Equations différentielles linéaires scalaires d'ordre 1	34
1.3.2.1	Apprentissage du cours	34
1.3.2.2	Pour aller plus loin	38
1.3.3	Systèmes différentiels	44
1.3.3.1	Apprentissage du cours	44
1.3.3.2	Pour aller plus loin	55

1.3.4	Systèmes d'ordre supérieur ou égal à 2	60
1.3.4.1	Apprentissage du cours	60
1.3.4.2	Pour aller plus loin	63
1.3.5	Equations scalaires d'ordre 2	69
1.3.5.1	Apprentissage du cours	69
1.3.5.2	Pour aller plus loin	75
1.4	PROBLEMES	77
2	SERIES NUMERIQUES	81
2.1	COURS	81
2.1.1	Introduction	81
2.1.1.1	Résumé	81
2.1.1.2	Positionnement mathématique	81
2.1.2	Prérequis	82
2.1.2.1	Convergence d'une suite de nombres complexes	82
2.1.2.2	Egalité et inégalité de Taylor-Lagrange	83
2.1.3	Convergence d'une série	84
2.1.3.1	Définitions	84
2.1.3.2	Exemples de référence	85
2.1.3.3	Propriétés des séries convergentes	88
2.1.4	Séries à termes réels positifs	90
2.1.4.1	Monotonie de la suite des sommes partielles	90
2.1.4.2	Critères de comparaison des séries à termes positifs	91
2.1.4.3	Séries de Riemann	94
2.1.4.4	Règles de Cauchy et de D'Alembert	95
2.1.4.5	Comparaison série-intégrale	97
2.1.5	Séries à termes réels ou complexes	98
2.1.5.1	Suites de Cauchy	98
2.1.5.2	Absolute convergence	100
2.1.5.3	Semi-convergence	101
2.1.6	Opérations sur les termes d'une série	103
2.1.6.1	Associativité restreinte : sommation par paquets	103
2.1.6.2	Permutation des termes : commutativité	105
2.1.6.3	Produit de convolution de deux séries	107
2.1.6.4	Application : exponentielle complexe	108
2.1.7	Tableau récapitulatif sur les séries numériques de référence	110
2.2	COMPLEMENT — THEOREME D'ABEL	111
2.2.1	Transformation d'Abel	111
2.2.2	Critère d'Abel	112
2.3	EXERCICES	114
2.3.1	Révisions sur les suites	114
2.3.1.1	Apprentissage du cours	114
2.3.1.2	Pour aller plus loin	115
2.3.2	Séries de référence	115
2.3.2.1	Apprentissage du cours	115
2.3.2.2	Pour aller plus loin	120

2.3.3	Premières propriétés des séries	121
2.3.4	Séries à termes positifs : théorèmes de comparaison	122
2.3.4.1	Apprentissage du cours	122
2.3.4.2	Pour aller plus loin	125
2.3.5	Séries à termes positifs : Riemann, géométriques, intégrales	128
2.3.5.1	Apprentissage du cours	128
2.3.5.2	Pour aller plus loin	134
2.3.6	Des séries aux suites	136
2.3.7	Semi-convergence	137
2.3.7.1	Apprentissage du cours	137
2.3.7.2	Pour aller plus loin	138
2.3.8	Opérations sur les termes d'une série	139
2.3.9	Synthèse	140
2.3.10	Avec Maple	144
2.3.11	Autour du théorème d'Abel	145
2.4	PROBLEMES	146
2.4.1	Calcul de π	146
2.4.2	Séries doubles	148
2.5	Q.C.M.	149
3	SUITES ET SERIES D'APPLICATIONS	153
3.1	COURS	153
3.1.1	Introduction	153
3.1.1.1	Résumé	153
3.1.1.2	Positionnement mathématique	154
3.1.2	Suites d'applications	154
3.1.2.1	Définition de la convergence simple	154
3.1.2.2	Exemples	155
3.1.2.3	Définition de la convergence uniforme	157
3.1.2.4	Exemples	159
3.1.2.5	Propriétés algébriques	160
3.1.2.6	Propriétés de la limite uniforme d'une suite d'applications	162
3.1.3	Séries d'applications	167
3.1.3.1	Définition de la convergence simple	167
3.1.3.2	Définition de la convergence uniforme	170
3.1.3.3	Convergence uniforme des séries alternées	171
3.1.3.4	Convergence normale d'une série d'applications	172
3.1.3.5	Propriétés de la somme d'une série d'applications	174
3.1.3.6	Critère de Cauchy	177
3.2	COMPLEMENT — THEOREME D'ABEL UNIFORME	180
3.3	EXERCICES	182
3.3.1	Suites de fonctions et convergence simple	182
3.3.1.1	Apprentissage du cours	182
3.3.1.2	Pour aller plus loin	186
3.3.2	Suites de fonctions et convergence uniforme	188

3.3.2.1	Apprentissage du cours	188
3.3.2.2	Pour aller plus loin	192
3.3.2.3	Approfondissement	196
3.3.3	Séries de fonctions	198
3.3.3.1	Apprentissage du cours	198
3.3.3.2	Pour aller plus loin	201
3.4	PROBLEMES	202
3.4.1	Fonction zêta de Riemann	202
3.4.2	Théorème de Weierstrass	205
3.5	Q.C.M.	209
4	SERIES ENTIERES	213
4.1	COURS	213
4.1.1	Introduction	213
4.1.1.1	Résumé	213
4.1.1.2	Positionnement mathématique	213
4.1.2	Définition d'une série entière	214
4.1.3	Domaine de convergence simple	214
4.1.3.1	Détermination pratique du domaine de convergence simple	215
4.1.3.2	Définition générale du rayon de convergence	215
4.1.4	Opérations sur les séries entières	218
4.1.4.1	Structure d'algèbre	218
4.1.4.2	Substitution d'un monôme	221
4.1.5	Propriétés de la somme d'une série entière	222
4.1.5.1	Convergence uniforme et continuité	222
4.1.5.2	Dérivation et intégration formelles	223
4.1.5.3	Primitives de la somme d'une série entière	224
4.1.5.4	Dérivées de la somme d'une série entière	225
4.1.5.5	Expression des coefficients d'une série entière en fonction de sa somme	226
4.1.6	Développement en série entière	227
4.1.6.1	Conditions de développabilité en série entière	227
4.1.6.2	Développements en série entière de référence	230
4.1.6.3	Avec Maple	235
4.1.7	Retour sur l'exponentielle complexe	236
4.2	COMPLEMENT — THEOREMES D'ABEL-DIRICHLET ET TAUBER	237
4.2.0.1	Théorème d'Abel-Dirichlet	237
4.2.0.2	Théorème de Tauber	239
4.3	EXERCICES	242
4.3.1	Convergence simple et rayon de convergence	242
4.3.1.1	Apprentissage du cours	242
4.3.1.2	Pour aller plus loin	243
4.3.1.3	Approfondissement	244
4.3.2	Opérations sur les séries entières	245
4.3.2.1	Apprentissage du cours	245

4.3.2.2	Pour aller plus loin	246
4.3.3	Convergence uniforme et propriétés de la somme	247
4.3.3.1	Apprentissage du cours	247
4.3.3.2	Pour aller plus loin	249
4.3.4	Développement en série entière	251
4.3.4.1	Apprentissage du cours	251
4.3.4.2	Pour aller plus loin	256
4.3.4.3	Pour aller beaucoup plus loin	260
4.3.5	Exponentielle complexe	263
4.3.5.1	Apprentissage du cours	263
4.3.5.2	Pour aller plus loin	263
4.3.5.3	Approfondissement	264
4.4	PROBLEMES	266
5	ESPACES VECTORIELS NORMES	269
5.1	COURS 1 ^{re} PARTIE — NORMES, COMPLETEUDE	269
5.1.1	Introduction	269
5.1.1.1	Résumé	269
5.1.1.2	Positionnement mathématique	269
5.1.2	Normes et distances sur un espace vectoriel	271
5.1.2.1	Espace vectoriel normé	271
5.1.2.2	Distance associée à une norme	274
5.1.3	Suites et séries convergentes dans un espace vectoriel normé	275
5.1.3.1	Notations	275
5.1.3.2	Définitions	275
5.1.3.3	Propriétés	278
5.1.4	Complétude d'un espace vectoriel normé	279
5.1.5	Théorème du point fixe	282
5.1.5.1	Définitions	282
5.1.5.2	Théorème	283
5.1.5.3	Majoration de l'erreur	284
5.1.5.4	Contraction sur une partie fermée stable de E	285
5.1.6	Normes équivalentes	287
5.2	COURS 2 ^e PARTIE — CONTINUITÉ, NORMES SUBORDONNÉES	290
5.2.1	Introduction	290
5.2.2	Continuité	291
5.2.2.1	Définitions	291
5.2.2.2	Exemples de référence	294
5.2.2.3	Opérations et continuité	295
5.2.2.4	Sous-ensembles fermés et continuité	298
5.2.3	Normes induites	301
5.2.3.1	Norme induite d'une application linéaire	301
5.2.3.2	Norme induite d'une matrice	303
5.3	COMPLEMENT 1 — COMPACTITE	306
5.3.1	Introduction	306
5.3.2	Définition et propriétés de la compacité	306

5.3.3	Compacts de $(\mathbb{R}^n, \ \cdot\ _\infty)$	308
5.3.4	Equivalence des normes en dimension finie	310
5.4	COMPLEMENT 2 — THEOREME DE CAUCHY-LIPSCHITZ	312
5.4.1	Complétude d'un espace fonctionnel	312
5.4.2	Démonstration du théorème 71 dans le cas d'un segment	313
5.4.2.1	Equation intégrale	314
5.4.2.2	Itérations de Picard	314
5.4.2.3	Conclusion	315
5.4.3	Démonstration du théorème 71 dans le cas d'un intervalle quelconque	316
5.4.3.1	Existence	316
5.4.3.2	Unicité	316
5.5	EXERCICES	317
5.5.1	Espaces vectoriels normés et suites convergentes	317
5.5.1.1	Apprentissage du cours	317
5.5.1.2	Pour aller plus loin	321
5.5.2	Théorème du point fixe	325
5.5.2.1	Apprentissage du cours	325
5.5.2.2	Pour aller plus loin	330
5.5.3	Equivalence de normes	334
5.5.3.1	Apprentissage du cours	334
5.5.3.2	Pour aller plus loin	335
5.5.4	Continuité	337
5.5.4.1	Apprentissage du cours	337
5.5.4.2	Pour aller plus loin	340
5.5.4.3	Pour aller beaucoup plus loin	341
5.5.5	Fermés, fermés bornés	342
5.5.5.1	Apprentissage du cours	342
5.5.5.2	Pour en savoir plus	343
5.5.6	Normes subordonnées	345
5.5.6.1	Apprentissage du cours	345
5.5.6.2	Pour aller plus loin	348
5.6	PROBLEMES	354
6	FORMES BILINEAIRES SYMETRIQUES	367
6.1	COURS	367
6.1.1	Introduction	367
6.1.1.1	Résumé	367
6.1.1.2	Positionnement mathématique	367
6.1.2	Formes bilinéaires symétriques et formes quadratiques	368
6.1.2.1	Formes bilinéaires symétriques	368
6.1.2.2	Forme quadratique associée à une forme bilinéaire symétrique	369
6.1.2.3	Ecriture polynomiale et écriture matricielle d'une forme bilinéaire symétrique en dimension finie	371

6.1.2.4	Ecriture polynomiale et matrice d'une forme quadratique en dimension finie	374
6.1.2.5	Formes quadratiques positives, définies positives	376
6.1.2.6	Inégalités de Cauchy-Schwarz et de Minkowski	377
6.1.3	Espaces préhilbertiens	379
6.1.3.1	Produits scalaires	379
6.1.3.2	Orthogonalité et théorème de Pythagore	382
6.1.3.3	Projection sur une droite vectorielle	386
6.1.3.4	Procédé d'orthogonalisation de Gram-Schmidt	389
6.1.3.5	Projection sur un sous-espace de dimension finie	391
6.1.3.6	Distance à un sous-espace de dimension finie	392
6.1.4	Espaces euclidiens	394
6.1.4.1	Bases orthonormées	394
6.1.4.2	Matrices orthogonales	396
6.1.4.3	Réduction d'un endomorphisme symétrique	397
6.1.4.4	Application de la réduction : classification des formes quadratiques sur \mathbb{R}^n par leur signature	405
6.2	COMPLEMENT — ALGORITHME DU GRADIENT CONJUGUE	408
6.2.1	Motivation et principe	408
6.2.2	Fonctionnelle φ	408
6.2.3	Algorithme du gradient conjugué	409
6.2.4	Convergence de l'algorithme	411
6.3	CLASSIFICATION DES CONIQUES ET DES QUADRIQUES	414
6.3.1	Positionnement mathématique	414
6.3.2	Coniques	414
6.3.3	Quadriques	419
6.4	EXERCICES	426
6.4.1	Formes bilinéaires, formes quadratiques	426
6.4.1.1	Apprentissage du cours	426
6.4.1.2	Pour aller plus loin	428
6.4.2	Produits scalaires	430
6.4.2.1	Apprentissage du cours	430
6.4.2.2	Pour aller plus loin	441
6.4.3	Classification des formes quadratiques	449
6.4.3.1	Apprentissage du cours	449
6.4.3.2	Pour aller plus loin	451
6.4.4	Applications géométriques	456
6.4.4.1	Apprentissage du cours	456
6.4.4.2	Pour aller plus loin	457
6.5	PROBLEMES	459
7	SERIES DE FOURIER	467
7.1	COURS	467
7.1.1	Introduction	467
7.1.1.1	Résumé	467
7.1.1.2	Positionnement mathématique	468

7.1.2	Espaces $\mathcal{C}_T(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ et $\mathcal{CM}_T(\mathbb{R}, \mathbb{C})$	468
7.1.2.1	Applications continues par morceaux	468
7.1.2.2	Orthogonalité dans l'espace $\mathcal{C}_T(\mathbb{R}, \mathbb{C})$	469
7.1.2.3	Applications de classe \mathcal{C}^1 par morceaux	470
7.1.2.4	Polynômes trigonométriques	471
7.1.2.5	Normes sur $\mathcal{C}_T(\mathbb{R}, \mathbb{C})$, semi-normes sur $\mathcal{CM}_T(\mathbb{R}, \mathbb{C})$	474
7.1.2.6	Suites et séries indexées par \mathbb{Z}	475
7.1.3	Séries de Fourier et séries trigonométriques	476
7.1.3.1	Coefficients de Fourier	476
7.1.3.2	Inégalité de Bessel	479
7.1.3.3	Propriétés des coefficients de Fourier	481
7.1.3.4	Séries trigonométriques	484
7.1.4	Théorèmes de convergence	486
7.1.4.1	Théorème de Parseval	486
7.1.4.2	Théorème de Dirichlet	488
7.1.4.3	Théorème de convergence normale	490
7.2	COMPLEMENT 1 — APPROXIMATION DE FONCTIONS	491
7.2.1	Théorème de Dirichlet	491
7.2.1.1	Applications en escalier	491
7.2.1.2	Théorème de Dirichlet	494
7.2.2	Théorème de Féjer et théorème de Weierstrass trigonométrique	496
7.2.3	Théorème de Parseval	500
7.3	COMPLEMENT 2 — EQUATION DE LA CHALEUR	501
7.3.1	Position du problème	501
7.3.2	Mise en équation	501
7.3.3	Résolution de l'équation de la chaleur	502
7.3.4	Autre méthode de résolution	504
7.4	EXERCICES	507
7.4.1	Coefficients de Fourier	507
7.4.1.1	Apprentissage du cours	507
7.4.2	Séries trigonométriques	508
7.4.2.1	Apprentissage du cours	508
7.4.2.2	Pour aller plus loin	509
7.4.3	Développements en série de Fourier	509
7.4.3.1	Apprentissage du cours	509
7.4.3.2	Pour aller plus loin	513
7.4.3.3	Approfondissement	518
7.5	PROBLEMES	524
8	CALCUL DIFFERENTIEL	537
8.1	COURS	537
8.1.1	Introduction	537
8.1.1.1	Résumé	537
8.1.1.2	Positionnement mathématique	537
8.1.2	Applications différentiables	537
8.1.2.1	Ouverts	537

8.1.2.2	Applications différentiables	539
8.1.2.3	Exemples de référence	543
8.1.2.4	Opérations sur les applications et différentiabilité	545
8.1.2.5	Matrice jacobienne	548
8.1.2.6	Dérivée selon un vecteur	549
8.1.2.7	Dérivées partielles en a relativement à une base \mathcal{E}	550
8.1.2.8	Matrice jacobienne et dérivées partielles	552
8.1.2.9	Dérivation en chaîne	554
8.1.3	Théorème des accroissements finis	555
8.1.3.1	Parties convexes	556
8.1.3.2	Cas où f est à valeurs scalaires	556
8.1.3.3	Cas où f est à valeurs vectorielles	557
8.1.4	Dérivées d'ordre supérieur et applications de classe \mathcal{C}^k	559
8.1.4.1	Différentielle seconde	559
8.1.4.2	Applications de classes \mathcal{C}^1 et \mathcal{C}^2	561
8.1.4.3	Applications de classe \mathcal{C}^k et dérivées partielles	564
8.1.4.4	Dérivées partielles d'ordre 2 et théorème de Schwarz	567
8.1.5	Théorème d'inversion globale	572
8.1.5.1	Difféomorphismes et théorème d'inversion globale	572
8.1.5.2	Changements de variable classiques	573
8.1.6	Opérateurs différentiels	576
8.1.6.1	Définitions	576
8.1.6.2	Propriétés	578
8.1.7	Formules de Taylor	579
8.1.7.1	Polynôme de Taylor	579
8.1.7.2	Formule de Taylor-Lagrange	580
8.1.7.3	Formule de Taylor-Young	581
8.1.8	Extrema d'une application numérique	582
8.1.8.1	Extrema absolus et extrema locaux	583
8.1.8.2	Extrema locaux et différentielle	585
8.1.8.3	Extrema locaux et différentielle seconde	586
8.1.8.4	Extrema liés	589
8.2	COMPLEMENT — INVERSION LOCALE, FONCTIONS IMPLICITES	590
8.2.1	Endomorphismes inversibles	590
8.2.2	Théorème d'inversion locale	592
8.2.3	Théorème des fonctions implicites	594
8.2.4	Théorème des multiplicateurs de Lagrange	597
8.3	EXERCICES	601
8.3.1	Ouverts	601
8.3.2	Différentielles et matrices jacobiennes	602
8.3.2.1	Apprentissage du cours	602
8.3.3	Dérivées directionnelles et dérivées partielles	605
8.3.3.1	Apprentissage du cours	605
8.3.3.2	Pour aller plus loin	606
8.3.4	Matrices jacobiennes et fonctions composées	609
8.3.4.1	Apprentissage du cours	609

8.3.4.2	Pour aller plus loin	610
8.3.5	Théorème des accroissements finis	611
8.3.6	Applications de classe C^1	614
8.3.6.1	Apprentissage du cours	614
8.3.6.2	Pour aller plus loin	617
8.3.7	Applications de classe C^2	618
8.3.7.1	Apprentissage du cours	618
8.3.7.2	Pour aller plus loin	621
8.3.7.3	Pour en savoir plus	625
8.3.8	Difféomorphismes	626
8.3.8.1	Apprentissage du cours	626
8.3.9	Opérateurs différentiels	630
8.3.9.1	Apprentissage du cours	630
8.3.9.2	Pour aller plus loin	632
8.3.10	Formules de Taylor et extrema	633
8.3.10.1	Apprentissage du cours	633
8.3.10.2	Pour aller plus loin	639
8.3.11	Théorème d'inversion locale et théorème des fonctions implicites	640
8.3.11.1	Apprentissage du cours	640
8.3.11.2	Pour aller plus loin	647
8.4	PROBLEMES	650
9	GEOMETRIE DIFFERENTIELLE	653
9.1	COURS	653
9.1.1	Introduction	653
9.1.1.1	Résumé	653
9.1.1.2	Positionnement mathématique	654
9.1.2	Paramétrisation d'une courbe	654
9.1.2.1	Définitions et exemples	655
9.1.2.2	Tracés avec Maple	658
9.1.2.3	Courbe paramétrée	658
9.1.2.4	Point régulier et tangente	660
9.1.2.5	Paramétrisation cartésienne d'une courbe	662
9.1.2.6	Courbe simple régulière	664
9.1.3	Paramétrisation d'une surface	668
9.1.3.1	Définitions	668
9.1.3.2	Exemples fondamentaux	669
9.1.3.3	Courbes tracées sur une surface	670
9.1.3.4	Changement de paramétrage	673
9.1.3.5	Point régulier d'une surface paramétrée	674
9.1.3.6	Plan tangent à une nappe paramétrée	675
9.1.3.7	Paramétrisation cartésienne d'une surface	675
9.1.3.8	Surface simple régulière	678
9.1.3.9	Position locale d'une surface par rapport à son plan tangent	683

9.1.4	Equations implicites de courbes et de surfaces	686
9.1.4.1	Courbes en dimension 2	686
9.1.4.2	Courbes en dimension 3	692
9.1.4.3	Surfaces	695
9.1.5	Surfaces de révolution et surfaces réglées	699
9.1.5.1	Surfaces de révolution	699
9.1.5.2	Surfaces réglées	701
9.1.5.3	Surfaces réglées cylindriques, coniques	704
9.1.5.4	Récapitulatif sur les surfaces	706
9.1.6	Longueur et paramétrage par l'abscisse curviligne	707
9.1.6.1	Longueur d'une courbe	707
9.1.6.2	Abscisse curviligne	712
9.1.7	Récapitulatif sur les tracés avec Maple	714
9.1.7.1	Tracés de courbes	714
9.1.7.2	Tracés de surfaces	715
9.2	EXERCICES	717
9.2.1	Courbes paramétrées	717
9.2.1.1	Apprentissage du cours	717
9.2.1.2	Pour en savoir plus	719
9.2.2	Surfaces paramétrées	722
9.2.2.1	Apprentissage du cours	722
9.2.2.2	Pour aller plus loin	724
9.2.3	Surfaces de révolution, cônes et cylindres	727
9.2.3.1	Apprentissage du cours	727
9.2.3.2	Pour aller plus loin	732
9.2.4	Courbes et surfaces implicites	735
9.2.4.1	Apprentissage du cours	735
9.2.4.2	Pour aller plus loin	737
9.3	PROBLEMES	746
10	INTEGRATION	753
10.1	INTRODUCTION	753
10.2	INTEGRALE DOUBLE D'UNE FONCTION CONTINUE	754
10.2.1	Intégrale sur un pavé	754
10.2.2	Intégrale sur un domaine défini par une courbe fermée	756
10.2.3	Intégrale double et changement de variable	758
10.3	FORMULE DU CALCUL INTEGRAL	761
10.3.1	Formule de Green-Riemann	766
10.3.2	Interprétation géométrique de l'intégrale double	766
10.4	INTEGRALE DE SURFACE	767
10.4.1	Intreprétation géométrique de l'intégrale de surface	772
10.4.2	Théorème de Stokes	776
10.5	ANNEXE	781

11	PROBABILITES	785
11.1	COURS	785
11.1.1	Introduction	785
11.1.1.1	Résumé	785
11.1.1.2	Positionnement mathématique	785
11.1.2	Espaces probabilisés	786
11.1.2.1	Introduction	786
11.1.2.2	Algèbres et tribus	787
11.1.2.3	Mesures et probabilités	788
11.1.3	Variables aléatoires	790
11.1.3.1	Variables aléatoires	790
11.1.3.2	Fonction de répartition d'une variable aléatoire	794
11.1.3.3	Probabilité conditionnelle et indépendance	796
11.1.3.4	Moyenne et variance empiriques	800
11.1.3.5	Lois à densité	802
11.1.4	Lois discrètes finies classiques	804
11.1.4.1	Loi de Dirac	805
11.1.4.2	Loi de Bernoulli	805
11.1.4.3	Loi uniforme	806
11.1.4.4	Loi binomiale	807
11.1.4.5	Loi hypergéométrique	810
11.1.5	Lois discrètes infinies classiques	812
11.1.5.1	Loi de Poisson	812
11.1.5.2	Loi géométrique	814
11.1.6	Lois à densité classiques	816
11.1.6.1	Loi uniforme	816
11.1.6.2	Loi exponentielle	816
11.1.6.3	Loi Gamma	819
11.1.6.4	Loi normale	822
11.1.6.5	Loi de Cauchy	826
11.1.6.6	Loi du chi 2	826
11.1.7	Convergence en loi	828
11.1.7.1	Convergence en loi	828
11.1.7.2	Approximation de la loi binomiale par la loi de Poisson	829
11.1.7.3	Approximation de la loi hypergéométrique par la loi binomiale	830
11.1.7.4	Théorème Central Limit	831
11.1.7.5	Approximation de la loi binomiale et de la loi de Poisson par la loi normale	831
11.1.8	Loi forte des grands nombres	833
11.1.8.1	Loi forte des grands nombres	833
11.1.8.2	Application : méthode de Monte Carlo pour le calcul d'intégrales	835
11.1.9	Tests statistiques	837
11.1.9.1	Estimation de la moyenne d'une loi normale	837

11.1.9.2	Test du χ^2 de Pearson	838
11.1.9.3	Test du χ^2 de l'indépendance	842
11.2	COMPLEMENT 1 — THEOREME CENTRAL LIMIT	844
11.2.1	Théorème de Paul Levy	844
11.2.2	Théorème Central Limit	844
11.3	COMPLEMENT 2 — LOI DU ZERO-UN DE KOLMOGOROV	846
11.3.1	Tribu asymptotique	846
11.3.2	Loi du zéro-un de Kolmogorov	847
11.3.3	Lemme de Borel-Cantelli	848
11.4	EXERCICES	851
11.4.1	Espaces probabilisés	851
11.4.1.1	Apprentissage du cours	851
11.4.1.2	Pour aller plus loin	853
11.4.2	Variables aléatoires	854
11.4.2.1	Apprentissage du cours	854
11.4.2.2	Pour aller plus loin	856
11.4.3	Lois discrètes classiques	858
11.4.3.1	Apprentissage du cours	858
11.4.3.2	Pour aller plus loin	859
11.4.4	Lois à densité classiques	863
11.4.4.1	Apprentissage du cours	863
11.4.4.2	Pour aller plus loin	864
11.4.5	Convergence en loi	868
11.4.5.1	Apprentissage du cours	868
11.4.5.2	Pour aller plus loin	869
11.4.6	Loi forte des grands nombres	871
11.4.6.1	Apprentissage du cours	871
11.4.7	Estimation et tests statistiques	872
11.4.7.1	Apprentissage du cours	872
11.5	PROBLEMES	876
11.5.1	Processus de Poisson	876
11.5.2	L'aiguille de Buffon	878
A	BIOGRAPHIE DES MATHEMATIENS CITES	881
B	FORMULAIRE	893
B.1	FONCTIONS CIRCULAIRES	893
B.2	FONCTIONS HYPERBOLIQUES	894
B.3	FONCTIONS HYPERBOLIQUES RECIPROQUES	895
B.4	DEVELOPPEMENTS EN SERIE	895
B.5	PRIMITIVES	896
C	TABLES DES LOIS DE PROBABILITE CLASSIQUES	897
C.1	TABLEAUX RECAPITULATIFS	897
C.1.1	Lois discrètes finies classiques	897
C.1.2	Lois discrètes infinies classiques	898

C.1.3 Lois à densité classiques	898
C.2 LOI NORMALE	899
C.3 LOI DU chi 2	900
Bibliographie	903
Index	905