

Table des matières

I	Analyse	3
1	Révisions	5
1	Rappels	5
1.1	Quotients	5
1.2	Puissances	6
1.3	Propriétés des inégalités dans \mathbb{R}	6
1.4	Inégalités, carrés et inverses	7
1.5	Valeur absolue	7
1.6	Racines carrées	7
1.7	Partie entière	8
1.8	La fonction trinôme du second degré	8
1.9	Signe d'un produit ; d'une somme	8
1.10	Fonction logarithme népérien	9
1.11	Fonction exponentielle de base e	9
1.12	Fonction exponentielle et fonction puissance	9
2	Calculer avec des quotients	10
3	Calculer avec des puissances	11
4	Calculer avec des valeurs absolues	12
5	Calculer avec des radicaux	13
6	Résoudre des (in)équations avec des radicaux	14
7	Démontrer avec des parties entières	15
8	Résoudre des équations de degré ≤ 2	16
9	Résoudre des inéquations de degré ≤ 2	17
10	Résoudre une équation avec \ln ou \exp	18
11	Résoudre une inéquation avec \ln ou \exp	19
12	Étude de fonctions	20
13	Exercices	21
13.1	Exercices d'entraînement	21
13.2	Exercices de perfectionnement	35
2	Récurrence	39
1	Rappels	39
1.1	Le raisonnement par récurrence	39
1.2	Calcul de sommes	41
1.3	Propriétés des sommes	41
1.4	Transformation des sommes	41
2	Le raisonnement par récurrence faible	42

3	Des récurrences et des sommes	43
4	Le raisonnement par récurrence double	44
5	Le raisonnement par récurrence forte	45
6	Calcul de sommes simples	46
7	Calcul de sommes doubles	47
8	Exercices	48
	8.1 Exercices d'entraînement	48
	8.2 Exercices de perfectionnement	61
3	Suites	65
1	Rappels	65
	1.1 Définitions	65
	1.2 Quelques résultats	65
	1.3 Théorèmes sur les limites	66
	1.4 Suites particulières	66
	1.5 Théorèmes	67
	1.6 Comparaison des suites	67
	1.7 Factorielles	67
2	Montrer qu'une suite est croissante	68
3	Déterminer la limite de (u_n)	69
4	Montrer qu'une suite u converge	70
5	Montrer que u et v sont adjacentes	71
6	Utiliser une suite auxiliaire	72
7	Etudier une suite récurrente linéaire d'ordre 2	73
8	Etudier une suite définie par une équation	74
9	Exercices	75
	9.1 Exercices d'entraînement	75
	9.2 Exercices de perfectionnement	86
4	Dérivabilité	95
1	Rappels	95
	1.1 Limites et continuité en un point	95
	1.2 Relations de comparaison	96
	1.3 Continuité sur un intervalle	97
	1.4 Dérivabilité	97
	1.5 Les nouveaux théorèmes	98
	1.6 Dérivée n -ième	98
	1.7 Convexité	98
	1.8 Asymptotes	98
2	Déterminer des limites	99
3	Déterminer un équivalent de f en x_0	100
4	Montrer qu'une fonction f est continue en x_0	101
5	Montrer que f est dérivable en x_0	102
6	Montrer que l'équation $f(x)=0$ a une solution	103
7	Montrer que f réalise une bijection	104
8	Utiliser l'inégalité des accroissements finis	105
9	Calculer la dérivée n ème	106
10	Détermination des asymptotes "obliques"	107
11	Etudier la position d'une courbe	108

12	Etudier la fonction f	109
13	Montrer que la fonction f est convexe sur I	110
14	Exercices	111
	14.1 Exercices d'entraînement	111
	14.2 Exercices de perfectionnement	132
5	Intégration	137
1	Rappels	137
	1.1 Propriétés	137
2	Calculer une intégrale par une primitive de f	139
3	Faire une intégration par parties	140
4	Utiliser un changement de variable	141
5	Calculer une intégrale de fonction rationnelle	142
6	Prouver des inégalités entre intégrales	143
7	Etudier une suite d'intégrales	144
8	Etudier une fonction définie par une intégrale	145
9	Limite de sommes et intégrales	146
10	Exercices	147
	10.1 Exercices d'entraînement	147
	10.2 Exercices de perfectionnement	157
6	Séries	169
1	Rappels	169
	1.1 Définitions et théorèmes	169
	1.2 Séries à termes de signe variable	169
	1.3 Séries à termes positifs	170
	1.4 Séries particulières	170
2	Calculer la somme de séries convergentes	171
	2.1 Obtenir une somme classique par factorisation	171
	2.2 Des sommes classiques par décomposition en somme	172
3	Etudier la convergence d'une série	173
	3.1 Etude de la convergence de la somme partielle (S_n)	173
	3.2 Spécial séries à termes positifs	174
4	Séries à termes de signe variable	175
5	Exercices	176
	5.1 Exercices d'entraînement	176
	5.2 Exercices de perfectionnement	186
7	Fonction de deux variables	197
1	Rappels	197
	1.1 L'ensemble \mathbb{R}^2	197
	1.2 Graphes	197
	1.3 Limite; Continuité	198
	1.4 Dérivabilité	198
2	Déterminer l'ensemble de définition de f	199
3	Etudier l'existence d'une limite L en (a, b)	200
4	Déterminer les dérivées partielles	201
5	Etudier l'existence d'un extremum	202
6	Exercices	203

6.1	Exercices d'entraînement	203
6.2	Exercices de perfectionnement	215
8	Polynômes	221
1	Rappels	221
1.1	Définitions	221
1.2	Racine d'un polynôme	222
1.3	Dérivation	222
1.4	L'espace vectoriel des polynômes	222
2	Factoriser un polynôme	223
2.1	En utilisant des identités remarquables	223
2.2	Quand on connaît une racine	224
3	Déterminer P vérifiant une propriété \mathcal{P}_1	225
4	Exercices	226
4.1	Exercices d'entraînement	226
4.2	Exercices de perfectionnement	232

II Algèbre 235

9	Systèmes	237
1	Rappels	237
1.1	Les opérations élémentaires sur les systèmes	237
1.2	Système de n équations à n inconnues	238
1.3	Plus d'équations que d'inconnues : $n > p$	238
1.4	Plus d'inconnues que d'équations : $n < p$	238
2	Autant d'équations que d'inconnues	239
3	Plus d'équations que d'inconnues	240
4	Plus d'inconnues que d'équations	241
5	Résoudre un système paramétrique	242
6	Exercices	243
6.1	Exercices d'entraînement	243
6.2	Exercices de perfectionnement	250

10	Matrices	253
1	Rappels	253
1.1	Définitions	253
1.2	Matrices carrées	254
1.3	Systèmes et matrices	254
2	Calculer avec des matrices explicitées	255
3	Résoudre une équation dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.	256
4	Calculer avec des matrices non explicitées	257
5	Calculer A^p pour $p \in \mathbb{N}$ et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$	258
5.1	Quelques cas particuliers	258
5.2	Conjecture puis récurrence	259
5.3	Utilisation de la formule du binôme	260
5.4	Utilisation de suites	261
5.5	Utilisation d'une matrice diagonale	262
6	Résoudre un système en utilisant une matrice	263

7	Déterminer l'inverse d'une matrice A inversible	264
7.1	Cas où on dispose d'une relation du type $P(A) = 0$	264
7.2	Calcul de l'inverse par résolution d'un système	265
7.3	Calcul de l'inverse par la méthode du pivot	266
8	Exercices	267
8.1	Entraînement	267
8.2	Perfectionnement	282
11	Espaces vectoriels	291
1	Rappels	291
1.1	Définitions	291
2	Montrer que u est combinaison linéaire de u_1, \dots, u_n	294
3	Montrer que F est un espace vectoriel	295
4	La famille $\mathcal{F} = (e_1, e_2, \dots, e_n)$ est-elle libre ou liée ?	296
5	La famille $\mathcal{F} = (e_1, e_2, \dots, e_n)$ engendre-t-elle E ?	297
6	$\mathcal{F} = (e_1, e_2, \dots, e_p)$ est-elle une base de E ?	298
7	Déterminer une base de F	299
8	Exercices	300
8.1	Exercices d'entraînement	300
8.2	Perfectionnement	307
12	Applications linéaires	313
1	Rappels	313
1.1	Applications linéaires	313
1.2	Noyau et image	314
1.3	Image d'une famille de vecteurs	314
1.4	En dimension finie	314
1.5	Matrice d'une application linéaire	314
1.6	Matrice d'un endomorphisme	315
2	Montrer qu'une application est linéaire	316
3	Déterminer $\text{Ker}(f)$ et $\text{Im}(f)$	317
3.1	E n'est pas de dimension finie	317
3.2	E est de dimension finie	318
4	Déterminer le rang d'une application linéaire	319
5	Montrer que f est isomorphisme de E dans F	320
5.1	Cas où la dimension n'est pas finie	320
5.2	En dimension finie avec $\dim(E) = \dim(F) = n$	321
6	Démontrer que A est inclus dans B	322
7	Prouver une implication, une équivalence	323
8	Exercices	324
8.1	Exercices d'entraînement	324
8.2	Perfectionnement	337

III Probabilités 345

13 Dénombrement 347

1	Rappels	347
1.1	Ensembles	347

1.2	Applications	348
1.3	Calcul	348
2	Calculer une somme contenant des combinaisons	349
3	Résoudre un exercice de dénombrement	350
4	Déterminer le nombre d'applications	351
5	Exercices	352
5.1	Exercices d'entraînement	352
5.2	Exercices de perfectionnement	360
14	Probabilités	365
1	Rappels	365
1.1	Le langage des probabilités	365
1.2	Propriétés importantes	366
1.3	Probabilité conditionnelle	367
2	Calculer une probabilité par le dénombrement	368
3	Calculer une probabilité grâce aux axiomes	369
4	Utiliser les probabilités conditionnelles	370
5	Utiliser le théorème des probabilités totales	371
6	Exercices	372
6.1	Exercices d'entraînement	372
6.2	Exercices de perfectionnement	386
15	Variable aléatoire	391
1	Rappels	391
1.1	Définitions	391
1.2	Loi de probabilité d'une v.a.	391
1.3	Espérance d'une v.a.	392
1.4	Moment d'ordre r	392
1.5	Variance d'une v.a. discrète X	393
1.6	Lois classiques	393
2	Déterminer la loi d'une v.a. finie	394
3	Utiliser le théorème des probabilités totales	395
4	Calculer $P(X=k)$, $E(X)$ ou $V(X)$: cas fini	396
5	Calculer $P(X=k)$, $E(X)$ ou $V(X)$: cas infini	397
6	Étudier une variable classique	398
7	Exercices	399
7.1	Exercices d'entraînement	399
7.2	Exercices de perfectionnement	413
16	Couples de variables aléatoires	419
1	Rappels	419
1.1	Définitions : les variables sont supposées discrètes	419
1.2	Indépendance de deux v.a.	419
1.3	Fonction de deux v.a.	420
1.4	Covariance	420
2	Représenter la loi conjointe dans un tableau	421
3	Donner la loi conjointe puis les lois de X et Y	422
4	Déterminer les lois de X et de Y	423
5	Déterminer la loi de $X+Y$, XY ,	424

6	Exercices	425
6.1	Exercices d'entraînement	425
6.2	Exercices de perfectionnement	437