

# Table des matières

<b>I Algèbre Linéaire</b>	<b>1</b>
<b>1 Nombres complexes - Polynômes</b>	<b>3</b>
1.1 Le corps des nombres complexes . . . . .	3
1.1.a Rappels et compléments . . . . .	3
1.1.b Le corps des complexes . . . . .	4
1.1.c Conjugué . . . . .	6
1.1.d Définition géométrique . . . . .	10
1.1.e Racine $n^{\text{ème}}$ d'un nombre complexe . . . . .	11
1.2 Polynômes . . . . .	19
1.2.a Trigonométrie et polynôme . . . . .	20
1.2.b Zéros d'un polynôme . . . . .	21
1.2.c Factorisation dans $\mathbb{C}$ ou dans $\mathbb{R}$ . . . . .	24
1.3 Compléments sur les angles . . . . .	26
1.4 Pentagone - QCM . . . . .	29
1.5 Nombres complexes et polynôme . . . . .	35
<b>2 Calcul Matriciel - Suites</b>	<b>41</b>
2.1 Matrice à coefficients dans $\mathbb{K}$ . . . . .	41
2.1.a Structure d'espace vectoriel des matrices . . . . .	41
2.1.b Produit de deux matrices . . . . .	41
2.1.c Matrices qui commutent . . . . .	42
2.1.d Puissance $r^{\text{ème}}$ d'une matrice . . . . .	46
2.2 Transposition . . . . .	54
2.2.a Définition . . . . .	54
2.2.b Transposée d'une somme . . . . .	54
2.2.c Transposée d'un produit . . . . .	55
2.2.d Matrices symétriques et anti-symétriques . . . . .	55
2.3 Carré magique . . . . .	64
<b>Systèmes d'équations linéaires</b>	<b>67</b>
3.1 Technique du pivot de Gauss . . . . .	67
3.2 Résolution des systèmes linéaires . . . . .	70
3.3 Matrices inversibles . . . . .	74
3.4 Méthode du simplexe . . . . .	86

<b>4</b>	<b>Espaces vectoriels</b>	<b>97</b>
4.1	Introduction . . . . .	97
4.1.a	Définition et exemples . . . . .	97
4.1.b	Sous espaces vectoriels . . . . .	99
4.1.c	Sous espaces vectoriels supplémentaires . . . . .	102
4.2	Familles de vecteurs. Bases . . . . .	104
4.2.a	Equation fondamentale . . . . .	104
4.2.b	Bases d'un espace vectoriel . . . . .	105
4.2.c	Matrice d'une famille. Rang d'une famille . . . . .	111
4.2.d	Caractérisation des bases . . . . .	115
4.3	Changement de base . . . . .	119
4.3.a	Introduction . . . . .	119
4.3.b	Matrice de changement de base . . . . .	119
4.3.c	Réduite de Gauss - Jordan . . . . .	133
4.4	Polynômes de Grégory . . . . .	139
4.5	Somme directe de sous espaces vectoriels . . . . .	143
<b>5</b>	<b>Applications linéaires</b>	<b>155</b>
5.1	Définitions . . . . .	155
5.1.a	Applications linéaires . . . . .	155
5.1.b	Espace vectoriel des applications linéaires . . . . .	157
5.1.c	Image et noyau . . . . .	157
5.1.d	Injectivité, surjectivité, bijectivité . . . . .	162
5.1.e	Composition d'applications linéaires . . . . .	164
5.1.f	Projecteur et symétrie . . . . .	170
5.1.g	Groupe linéaire . . . . .	173
5.2	Matrice d'une application linéaire . . . . .	174
5.2.a	Définition . . . . .	174
5.2.b	Espace vectoriel des matrices . . . . .	175
5.2.c	Equation de $\text{Im } \varphi$ et de $\text{ker } \varphi$ . . . . .	175
5.2.d	Produit de deux matrices . . . . .	183
5.3	Endomorphismes . . . . .	184
5.3.a	Inverse d'une matrice . . . . .	186
5.3.b	Matrices semblables . . . . .	187
5.3.c	Application à la puissance $n^{\text{ème}}$ d'une matrice . . . . .	191
<b>6</b>	<b>Réduction des matrices</b>	<b>197</b>
6.1	Valeurs et vecteurs propres d'un endomorphisme . . . . .	199
6.1.a	Définitions . . . . .	199
6.1.b	Propriétés . . . . .	203
6.2	Valeurs et vecteurs propres d'une matrice . . . . .	206
6.2.a	Définitions . . . . .	206
6.2.b	Valeurs propres d'une matrice d'ordre 2 ou 3 . . . . .	207

6.2.c	Valeurs propres d'une matrice d'ordre $n$ . . . . .	210
6.2.d	Propriétés . . . . .	215
6.3	Réduction d'une matrice ou d'un endomorphisme . . . . .	230
6.3.a	Diagonalisation . . . . .	233
6.3.b	Trigonalisation ou triangulation . . . . .	245
6.3.c	Propriétés de la trace d'une matrice . . . . .	253
6.3.d	Utilisation des hyperplans stables . . . . .	255
6.4	Puissance $n^{\text{ème}}$ d'une matrice . . . . .	263
6.5	Matrices stochastiques . . . . .	273
6.6	Parties stables par un endomorphisme . . . . .	288

**7 Espaces euclidiens 301**

7.1	Définitions . . . . .	301
7.1.a	Produit scalaire . . . . .	301
7.1.b	Base orthonormale . . . . .	304
7.1.c	Orthogonalisation de Gram - Schmidt . . . . .	304
7.2	Plan euclidien orienté . . . . .	313
7.2.a	Déterminant d'ordre 2 . . . . .	313
7.2.b	Base orthonormale . . . . .	313
7.3	Espace usuel euclidien orienté . . . . .	320
7.3.a	Produits scalaire et vectoriel . . . . .	320
7.3.b	Base orthonormale directe . . . . .	321
7.3.c	Matrices symétriques réelles et diagonalisation . . . . .	334
7.3.d	Matrices orthogonales . . . . .	337
7.3.e	Changement de repère affine . . . . .	342
7.4	Le loran . . . . .	358

**II Analyse 365**

**8 Fonctions d'une variable réelle 367**

8.1	Polynômes . . . . .	367
8.1.a	Arithmétique des polynômes . . . . .	367
8.1.b	Zéros d'un polynôme . . . . .	368
8.1.c	Espace vectoriel des polynômes . . . . .	371
8.2	Suites . . . . .	373
8.2.a	Suite itérée . . . . .	373
8.2.b	Suites adjacentes . . . . .	378
8.2.c	Suites linéaires . . . . .	381
8.2.d	Compléments . . . . .	390
8.3	Fonctions . . . . .	392
8.3.a	Limites . . . . .	392
8.3.b	Coniques . . . . .	393
8.3.c	Continuité . . . . .	397

8.3.d	Formule des accroissements finis . . . . .	400
8.3.e	Fonctions trigonométriques et inverses . . . . .	401
8.4	Développements limités . . . . .	404
8.5	Logarithmes et exponentielles . . . . .	406
8.6	Méthodes numériques . . . . .	416
8.7	DI de tangente hyperbolique . . . . .	423
<b>9</b>	<b>Calcul intégral</b>	<b>429</b>
9.1	Intégrale impropre . . . . .	429
9.1.a	Fonction définie presque partout . . . . .	429
9.1.b	Convergence ou divergence d'une intégrale impropre . . . . .	430
9.1.c	Quelques critères de convergence . . . . .	442
9.1.d	Convergence absolue . . . . .	445
9.1.e	Compléments d'oral . . . . .	447
9.2	Valeurs approchées d'une intégrale . . . . .	454
<b>10</b>	<b>Equations différentielles</b>	<b>461</b>
10.1	Compléments . . . . .	461
10.1.a	Equations différentielles linéaires . . . . .	461
10.1.b	Equations différentielles non linéaires . . . . .	471
10.1.c	Boucle respiratoire . . . . .	473
10.2	Noyau et équation différentielle . . . . .	479
10.3	Système différentiel linéaire . . . . .	483
<b>11</b>	<b>Séries numériques</b>	<b>493</b>
11.1	Définitions et propriétés générales . . . . .	493
11.1.a	Série numérique . . . . .	493
11.1.b	Série géométrique . . . . .	495
11.1.c	Propriétés des séries numériques . . . . .	496
11.2	Séries à termes positifs . . . . .	497
11.3	Séries à termes réels . . . . .	504
11.4	Développement limité et série . . . . .	516
11.4.a	Introduction . . . . .	516
11.4.b	Exemples fondamentaux . . . . .	516
<b>12</b>	<b>Fonctions de plusieurs variables</b>	<b>519</b>
12.1	Domaines de $\mathbb{R}^n$ . . . . .	519
12.1.a	Distance dans $\mathbb{R}^n$ . . . . .	519
12.1.b	Boules et pavés de $\mathbb{R}^n$ . . . . .	520
12.1.c	Domaine simple de $\mathbb{R}^n$ . . . . .	521
12.1.d	Changement de variable dans un domaine . . . . .	524
12.2	Fonctions de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^p$ . . . . .	525
12.3	Continuité . . . . .	526
12.4	Dérivées partielles . . . . .	528

12.4.a	Définitions . . . . .	529
12.4.b	Interversion . . . . .	531
12.4.c	Fonctions composées . . . . .	533
12.4.d	Fonctions homogènes . . . . .	537
12.5	Différentiation . . . . .	539
12.5.a	Accroissement total . . . . .	539
12.5.b	Formule de Taylor . . . . .	539
12.5.c	Différentielles . . . . .	540
12.5.d	Forme différentielle de degré 1 . . . . .	541
12.5.e	Changement de variable dans une différentielle . . . . .	544
12.6	Analyse vectorielle . . . . .	546
12.6.a	Champ scalaire et champ vectoriel . . . . .	546
12.6.b	Gradient . . . . .	549
12.6.c	Rotationnel . . . . .	549
12.6.d	Divergence . . . . .	550
12.6.e	Circulation d'un champ vectoriel . . . . .	551
<b>13</b>	<b>Calcul d'aires et de volumes</b>	<b>553</b>
13.1	Intégrales doubles . . . . .	553
13.1.a	Définition d'une intégrale double . . . . .	553
13.1.b	Propriétés . . . . .	557
13.2	Calcul d'aires et de volumes . . . . .	558
13.2.a	Aire d'une surface plane . . . . .	558
13.2.b	Changement de variable dans une intégrale double . . . . .	561
13.2.c	Formule de Green - Riemann . . . . .	564
13.2.d	Intégrale double impropre . . . . .	566
13.3	Intégrales triples . . . . .	568

**III Probabilités 571**

**14 Variables aléatoires discrètes finies 573**

14.1	Fonction de transfert . . . . .	573
14.2	Ensemble - Analyse combinatoire . . . . .	573
14.3	Introduction aux probabilités . . . . .	575
14.4	Loi binomiale . . . . .	592
14.5	Couple de variables aléatoires . . . . .	594
14.6	Loi hypergéométrique . . . . .	601
14.7	Fonction génératrice . . . . .	602
14.7.a	Définition . . . . .	602
14.7.b	Propriétés . . . . .	603
14.7.c	Fonction génératrice des lois usuelles . . . . .	605
14.7.d	Cas particulier . . . . .	607
14.8	Problème de révision <span style="float: right;">610</span>	

<b>15 Variables aléatoires discrètes dénombrables</b>	<b>623</b>
15.1 Introduction . . . . .	623
15.2 Loi géométrique . . . . .	625
15.2.a Définitions . . . . .	625
15.2.b Moments . . . . .	626
15.2.c Fonction génératrice . . . . .	627
15.3 Loi de Pascal et loi binomiale négative . . . . .	633
15.3.a Loi de Pascal . . . . .	633
15.3.b Loi binomiale négative . . . . .	637
15.4 Loi de Poisson . . . . .	646
15.4.a Processus de Poisson. . . . .	646
15.4.b Définition et représentation . . . . .	646
15.4.c Moments. . . . .	648
15.4.d Valeurs modales . . . . .	648
15.4.e Somme de deux lois de Poisson . . . . .	648
15.4.f Fonction génératrice de Poisson . . . . .	653
15.5 Résumé des v.a.d . . . . .	654
<b>16 Densités de probabilités</b>	<b>655</b>
16.1 Généralités . . . . .	655
16.1.a Variable aléatoire absolument continues . . . . .	655
16.1.b Représentation . . . . .	659
16.1.c Moments . . . . .	660
16.2 Loi uniforme . . . . .	662
16.2.a Définition . . . . .	662
16.2.b Représentation de la loi uniforme . . . . .	663
16.2.c Moments . . . . .	663
16.3 Loi exponentielle . . . . .	664
16.3.a Définition . . . . .	666
16.3.b Représentation de la loi exponentielle . . . . .	666
16.3.c Moments . . . . .	667
16.4 Loi normale . . . . .	668
16.4.a Calcul de l'intégrale de Laplace - Gauss . . . . .	669
16.4.b Définitions et propriétés . . . . .	674
16.4.c Représentation de la loi normale . . . . .	675
16.4.d Loi normale centrée réduite . . . . .	675
16.4.e Calculs pratiques . . . . .	677
16.5 Changement de variable aléatoire . . . . .	679
16.6 Compléments . . . . .	687
16.6.a Loi log - normale . . . . .	687
16.6.b Loi du $t$ de Student - Fisher . . . . .	689
16.6.c Informatique . . . . .	692
16.7 Résumé des v.a.c . . . . .	694

<b>17 Couples de variables aléatoires continues</b>	<b>695</b>
17.1 Introduction . . . . .	695
17.2 Densité de probabilité dans $\mathbb{R}^n$ . . . . .	695
17.2.a Fonction de répartition . . . . .	695
17.2.b Fonction densité . . . . .	695
17.3 Couple de variables aléatoires à densité . . . . .	697
17.3.a Densité d'un couple . . . . .	697
17.3.b Moments . . . . .	697
17.3.c Lois de probabilités marginales . . . . .	698
17.3.d Variables aléatoires indépendantes . . . . .	700
17.3.e Fonction de répartition . . . . .	705
17.3.f Produit de convolution . . . . .	710
17.3.g Somme de variables aléatoires normales . . . . .	713
<b>18 Théorèmes limites</b>	<b>721</b>
18.1 Convergence en probabilité . . . . .	721
18.1.a Inégalités de Markov et de Bienaymé - Tchebichev . . . . .	721
18.1.b Loi faible des grands nombres . . . . .	722
18.2 Convergence en loi . . . . .	732
18.2.a Définitions . . . . .	732
18.2.b Propriété caractéristique . . . . .	733
18.3 Théorème de la limite centrale . . . . .	733
18.3.a Correction de continuité . . . . .	733
18.3.b Théorèmes limites . . . . .	734
18.4 Exemples de convergence en loi . . . . .	736
18.4.a Convergence en loi de $\mathcal{H}(N, n, p)$ vers $\mathcal{B}(n, p)$ . . . . .	736
18.4.b Convergence en loi de $\mathcal{B}(n, p)$ vers $\mathcal{P}(\lambda)$ . . . . .	737
18.4.c Convergence en loi de $\mathcal{B}(n, p)$ vers $\mathcal{N}(\mu, \sigma)$ . . . . .	738
18.4.d Convergence en loi de $\mathcal{P}(\lambda)$ vers $\mathcal{N}(\mu, \sigma)$ . . . . .	739
18.4.e Exercice complémentaires . . . . .	741
18.5 Résumé des convergence . . . . .	750
<b>19 Statistique descriptive à deux variables</b>	<b>751</b>
19.1 Etude et propriétés . . . . .	751
19.1.a Définition . . . . .	751
19.1.b Représentation graphique . . . . .	753
19.1.c Paramètres d'une v.s.d . . . . .	753
19.1.d Droites de régression . . . . .	754
19.2 Informatique . . . . .	756
<b>20 Estimation</b>	<b>761</b>
20.1 Distributions d'échantillonnages . . . . .	761
20.1.a Distribution d'échantillonnage des moyennes . . . . .	761

20.1.b	Distribution d'échantillonnage des fréquences . . . . .	763
20.1.c	Distribution d'échantillonnage des variances . . . . .	764
20.2	Estimation ponctuelle . . . . .	765
20.2.a	Estimation sans biais . . . . .	765
20.2.b	Théorèmes fondamentaux de l'estimation ponctuelle . . . . .	765
20.3	Estimation par intervalle de confiance . . . . .	767
20.3.a	Estimation de la moyenne . . . . .	767
20.3.b	Estimation d'une fréquence par intervalle de confiance . . . . .	770
20.4	Comparaison de deux échantillons . . . . .	771
20.4.a	Principe pour deux moyennes . . . . .	771
20.4.b	Cas où les échantillons sont indépendants . . . . .	772
20.4.c	Cas où les échantillons sont dépendants . . . . .	774
20.4.d	Table de la loi du $t$ de Student - Fisher . . . . .	776