

# Table des matières

|   |           |
|---|-----------|
| Avant-propos  | i         |
| Table des matières                                  | iii       |
| <b>1 Rappel d'algèbre linéaire</b>                  | <b>1</b>  |
| 1.1 Espace vectoriel                                | 1         |
| 1.2 Applications linéaires                          | 3         |
| 1.3 Matrices  | 4         |
| 1.4 Déterminants                                    | 6         |
| 1.5 Produit scalaire                                | 7         |
| 1.6 Norme vectorielle                               | 8         |
| 1.7 Vecteurs propres et valeurs propres de matrices | 8         |
| 1.8 Utilisation de <i>Matlab</i>                    | 10        |
| <b>2 Précisions numériques</b>                      | <b>13</b> |
| 2.1 Introduction                                    | 13        |
| 2.2 Représentation des nombres en machine           | 13        |
| 2.3 Les entiers                                     | 14        |
| 2.3.1 Représentation externe                        | 14        |
| 2.3.2 Représentation interne des entiers positifs   | 14        |
| 2.4 Les réels                                       | 15        |
| 2.4.1 Représentation externe                        | 15        |
| 2.4.2 Codage interne des réels                      | 15        |
| 2.5 Erreurs dues à la représentation                | 15        |
| 2.5.1 Propriétés de l'arithmétique de l'ordinateur  | 16        |
| 2.5.2 Opération soustraction                        | 17        |
| 2.5.3 Stabilité                                     | 17        |
| 2.6 Notion du meilleur algorithme                   | 18        |
| 2.7 Utilisation de <i>Matlab</i>                    | 18        |
| 2.7.1 Définition des variables                      | 18        |
| 2.7.2 Manipulation des nombres                      | 19        |
| 2.8 Exercices résolus                               | 21        |
| <b>3 Interpolation polynomiale</b>                  | <b>27</b> |
| 3.1 Introduction                                    | 27        |
| 3.2 Problèmes d'interpolation                       | 27        |
| 3.2.1 Interpolation linéaire                        | 27        |
| 3.3 Techniques de l'interpolation polynomiale       | 28        |
| 3.4 Interpolation dans la base de Lagrange          | 28        |
| 3.4.1 Erreur d'interpolation polynomiale            | 30        |

|          |   |           |
|----------|---|-----------|
| 3.4.2    | Méthode de Neville-Aitken                                 | 31        |
| 3.5      | Interpolation dans la base de Newton                      | 32        |
| 3.6      | Interpolation par fonctions spline                        | 33        |
| 3.6.1    | Interpolation d'Hermite                                   | 34        |
| 3.6.2    | L'erreur de l'interpolation par spline                    | 36        |
| 3.7      | Utilisation de <i>Matlab</i>                              | 37        |
| 3.7.1    | Opérations sur les polynômes                              | 37        |
| 3.7.2    | Manipulation des polynômes                                | 38        |
| 3.7.3    | Évaluation d'un polynôme                                  | 39        |
| 3.7.4    | Interpolation linéaire et non linéaire                    | 39        |
| 3.8      | Exercices résolus   | 41        |
| <b>4</b> | <b>Dérivation numérique</b>                               | <b>53</b> |
| 4.1      | Dérivées numériques d'ordre 1 et erreur de troncature     | 53        |
| 4.2      | Dérivées numériques d'ordre supérieur                     | 54        |
| 4.3      | Dérivées numériques et interpolation                      | 55        |
| 4.4      | Etude de l'erreur de dérivation                           | 56        |
| 4.5      | Extrapolation de Richardson                               | 58        |
| 4.6      | Méthode des différences finis                             | 58        |
| 4.6.1    | Exemple de thermique                                      | 58        |
| 4.6.2    | Principe de la méthode                                    | 58        |
| 4.7      | Utilisation de <i>Matlab</i>                              | 60        |
| 4.8      | Exercices résolus   | 60        |
| <b>5</b> | <b>Intégration numérique</b>                              | <b>67</b> |
| 5.1      | Introduction  | 67        |
| 5.2      | La méthode des rectangles                                 | 68        |
| 5.3      | La méthode des trapèzes                                   | 68        |
| 5.4      | La méthode de Simpson                                     | 69        |
| 5.5      | Méthode de Newton-Côtes                                   | 70        |
| 5.6      | Méthode de Gauss-Legendre                                 | 70        |
| 5.6.1    | Position du problème                                      | 70        |
| 5.6.2    | Polynômes de Legendre                                     | 71        |
| 5.6.3    | Choix des $\alpha_i$ et des $x_i$ ( $i = 0, \dots, n$ )   | 71        |
| 5.7      | Utilisation de <i>Matlab</i>                              | 72        |
| 5.7.1    | Fonctions Matlab utilisées pour l'intégration numérique   | 72        |
| 5.7.2    | Méthode du Trapèze  | 73        |
| 5.7.3    | Méthode de Simpson  | 74        |
| 5.8      | Exercices résolus   | 75        |
| <b>6</b> | <b>Résolution d'équations non linéaires</b>               | <b>89</b> |
| 6.1      | Introduction  | 89        |
| 6.2      | Séparation des racines                                    | 89        |
| 6.3      | Approximation d'une racine séparée                        | 90        |
| 6.3.1    | Méthode de dichotomie (ou de bisection)                   | 90        |
| 6.3.2    | Méthode du point fixe (ou des approximations successives) | 90        |
| 6.3.3    | Premier critère de convergence                            | 92        |
| 6.3.4    | Critères d'arrêt des itérations                           | 92        |
| 6.3.5    | Deuxième critère de convergence (critère local)           | 93        |
| 6.3.6    | Méthode de Newton (ou méthode des tangentes)              | 93        |
| 6.3.7    | Méthode des sécantes                                      | 95        |

|           |  |            |
|-----------|--|------------|
| 6.3.8     | Méthode de Regula falsi . . . . .  | 95         |
| 6.4       | Ordre d'un processus itératif . . . . .                                      | 95         |
| 6.5       | Utilisation de <i>Matlab</i> . . . . .                                       | 96         |
| 6.5.1     | Recherche des racines polynomiales . . . . .                                 | 96         |
| 6.6       | Exercices résolus . . . . .  | 97         |
| <b>7</b>  | <b>Norme matricielle et conditionnement</b>                                  | <b>109</b> |
| 7.1       | Introduction . . . . .   | 109        |
| 7.2       | Norme matricielle . . . . .  | 109        |
| 7.3       | Conditionnement d'une matrice . . . . .                                      | 112        |
| 7.3.1     | Approximation de $K(A)$ . . . . .  | 114        |
| 7.4       | Préconditionnement . . . . .   | 114        |
| 7.5       | Utilisation de <i>Matlab</i> . . . . .                                       | 115        |
| 7.5.1     | Matrices et Vecteurs . . . . .   | 115        |
| 7.5.2     | conditionnement d'une matrice . . . . .                                      | 116        |
| 7.6       | Exercices résolus . . . . .  | 117        |
| <b>8</b>  | <b>Méthodes directes</b>   | <b>121</b> |
| 8.1       | Introduction . . . . .   | 121        |
| 8.2       | Méthode des déterminants ou méthode de Cramer . . . . .                      | 121        |
| 8.2.1     | Inversion d'une matrice par la méthode de Cramer . . . . .                   | 121        |
| 8.3       | Système à matrice triangulaire supérieure . . . . .                          | 122        |
| 8.4       | Méthode de Gauss . . . . .   | 122        |
| 8.4.1     | Résolutions en parallèle . . . . .   | 125        |
| 8.5       | Méthode de Gauss-Jordan . . . . .  | 125        |
| 8.5.1     | Principe de la méthode . . . . .   | 125        |
| 8.5.2     | Calcul de la matrice inverse par l'algorithme de Gauss-Jordan . . . . .      | 127        |
| 8.6       | Décomposition LU . . . . .   | 127        |
| 8.7       | Méthode de Cholesky . . . . .  | 129        |
| 8.8       | Utilisation de <i>Matlab</i> . . . . .                                       | 130        |
| 8.8.1     | Opérations sur les matrices . . . . .  | 130        |
| 8.8.2     | Systèmes d'équations linéaires . . . . .                                     | 132        |
| 8.9       | Exercices résolus . . . . .  | 134        |
| <b>9</b>  | <b>Méthodes itératives</b>   | <b>141</b> |
| 9.1       | Introduction . . . . .   | 141        |
| 9.2       | Les techniques itératives classiques . . . . .                               | 142        |
| 9.2.1     | La méthode de Jacobi . . . . .   | 142        |
| 9.2.2     | La méthode de Gauss-Seidel . . . . .   | 144        |
| 9.2.3     | Méthode de relaxation . . . . .  | 145        |
| 9.2.4     | Les méthodes de Jacobi, Gauss-Seidel et relaxation, par blocs . . . . .      | 146        |
| 9.3       | Convergence des méthodes itératives . . . . .                                | 146        |
| 9.4       | Utilisation de <i>Matlab</i> . . . . .                                       | 148        |
| 9.5       | Exercices résolus . . . . .  | 148        |
| <b>10</b> | <b>Méthodes numériques de calcul des valeurs propres et vecteurs propres</b> | <b>155</b> |
| 10.1      | Introduction . . . . .   | 155        |
| 10.2      | Calcul direct du $\det(A - \lambda I)$ . . . . .                             | 155        |
| 10.3      | Méthode de Krylov . . . . .  | 156        |
| 10.4      | Méthode de Leverrier . . . . .   | 157        |
| 10.5      | Méthode de Jacobi . . . . .  | 157        |

|                              |   |            |
|------------------------------|---|------------|
| 10.6                         | Méthode de la puissance itérée . . . . .                                | 159        |
| 10.7                         | Méthode de la puissance inverse . . . . .                               | 159        |
| 10.8                         | Méthode de Givens-Householder . . . . .                                 | 160        |
| 10.9                         | Utilisation de <i>Matlab</i> . . . . .                                  | 161        |
| 10.10                        | Exercices résolus . . . . .   | 162        |
| <b>11</b>                    | <b>Approximation au sens des moindres carrés</b>                        | <b>177</b> |
| 11.1                         | Introduction . . . . .  | 177        |
| 11.2                         | Formulation analytique . . . . .  | 177        |
| 11.3                         | Formulation algébrique . . . . .  | 179        |
| 11.4                         | Résolution numérique par factorisation QR . . . . .                     | 181        |
| 11.5                         | Applications . . . . .  | 182        |
| 11.6                         | Utilisation de <i>Matlab</i> . . . . .                                  | 183        |
| 11.7                         | Exercices . . . . .   | 183        |
| <b>12</b>                    | <b>Résolution numérique des équations différentielles</b>               | <b>191</b> |
| 12.1                         | Introduction . . . . .  | 191        |
| 12.2                         | Problème de Cauchy . . . . .  | 192        |
| 12.3                         | Résolution numérique . . . . .  | 192        |
| 12.3.1                       | Méthode d'Euler . . . . .   | 193        |
| 12.3.2                       | Méthode de Runge-Kutta à pas unique . . . . .                           | 193        |
| 12.3.3                       | Méthodes d'Adams à pas multiple . . . . .                               | 195        |
| 12.3.4                       | Méthode de Prédicteur-Correcteur . . . . .                              | 198        |
| 12.4                         | Utilisation de <i>Matlab</i> . . . . .                                  | 199        |
| 12.5                         | Exercices résolus . . . . .   | 201        |
| <b>13</b>                    | <b>Introduction à l'optimisation</b>                                    | <b>207</b> |
| 13.1                         | Introduction . . . . .  | 207        |
| 13.2                         | Rappels sur les fonctions de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$ . . . . . | 207        |
| 13.3                         | Optimisation sans contraintes . . . . .                                 | 209        |
| 13.4                         | Méthode de la section d'or . . . . .                                    | 211        |
| 13.5                         | Méthodes de la descente . . . . .                                       | 212        |
| 13.6                         | Utilisation de <i>Matlab</i> . . . . .                                  | 214        |
| 13.7                         | Exercices résolus . . . . .   | 215        |
| <b>Introduction à Matlab</b> |   | <b>219</b> |
| A                            | Introduction . . . . .  | 219        |
| B                            | Démarrage de <i>Matlab</i> . . . . .                                    | 220        |
| C                            | Fonctions mathématiques . . . . .                                       | 221        |
| D                            | Opérateurs et programmation sous <i>Matlab</i> . . . . .                | 221        |
| E                            | Écriture d'un script <i>Matlab</i> . . . . .                            | 223        |
| F                            | Génération de graphique avec <i>Matlab</i> . . . . .                    | 223        |
| <b>Index</b>                 |   | <b>225</b> |
| <b>Bibliographie</b>         |   | <b>227</b> |