

Table des matières

CHAPITRE 1 : ALGEBRE

| | |
|--|----|
| I. Calculs algébriques et trigonométriques | 12 |
| 1. Les primitives du système | 12 |
| 1.1 Syntaxe des fonctions de base | 12 |
| 1.2 Calculs dans le corps des complexes | 12 |
| 1.3 Exemples | 13 |
| 2. Résolution d'équations, élimination, identification | 16 |
| 2.1 Syntaxe des fonctions de base | 16 |
| 2.2 Exemples élémentaires | 16 |
| 2.3 Résolution d'équations dans le corps des réels | 19 |
| | |
| II. Polynômes et fractions rationnelles | 21 |
| 1. Les primitives de base | 21 |
| 1.1 Primitives structurelles | 21 |
| 1.2 Primitives fonctionnelles | 22 |
| 1.3 Cas des fractions rationnelles | 22 |
| 2. Etude des polynômes | 22 |
| 2.1 Division euclidienne, pgcd | 22 |
| 2.2 Racines d'un polynôme | 24 |
| 2.3 Fonctions symétriques des racines d'un polynôme | 27 |
| 2.4 Algorithme de Horner | 28 |
| 2.5 Nombres algébriques | 29 |

| | |
|--|----|
| 3. Etude des fractions rationnelles | 31 |
| 3.1 Décomposition en éléments simples : cas usuels | 31 |
| 3.2 Les limites de la primitive Apart | 31 |
| 3.3 Applications | 33 |

III. Structures algébriques infinies 37

| | |
|---|----|
| 1. Un package de fonctions-tests | 37 |
| 1.1 Associativité et commutativité | 37 |
| 1.2 Recherche d'un élément neutre | 38 |
| 1.3 Etude des éléments symétrisables | 38 |
| 1.4 Distributivité d'une loi par rapport à une autre | 39 |
| 2. Structures algébriques usuelles | 39 |
| 2.1 Structure de groupe | 39 |
| 2.2 Structure d'anneau | 40 |
| 2.3 Structure de corps commutatif | 40 |
| 2.4 Calculs dans un anneau ou un corps | 41 |
| 3. Les diverses notations des opérateurs | 42 |
| 3.1 Généralités | 42 |
| 3.2 Exemple : conjugaison dans \mathbb{C} | 42 |
| 3.3 Notations préfixées et infixées des opérateurs usuels | 43 |
| 3.4 Remarques | 43 |

IV. Structures algébriques finies 44

| | |
|---------------------------------------|----|
| 1. Sous-ensembles d'un ensemble fini | 44 |
| 1.1 Première méthode | 44 |
| 1.2 Définition récursive | 45 |
| 1.3 Algorithme binaire | 46 |
| 1.4 Version fonctionnelle | 47 |
| 2. Relations binaires | 47 |
| 2.1 Matrice d'une relation binaire | 48 |
| 2.2 Caractères d'une relation binaire | 48 |
| 2.3 Relations d'équivalence | 50 |
| 2.4 Partitions d'un entier naturel | 52 |

| | |
|--|----|
| 3. Permutations d'un ensemble fini | 54 |
| 3.1 Construction des permutations | 55 |
| 3.2 Opérations sur les permutations | 56 |
| 3.3 Permutations remarquables | 57 |
| 3.4 Orbites associées à une permutation | 59 |
| 3.5 Décomposition en cycles | 60 |
| 3.6 Signature d'une permutation, permutations paires ou impaires | 60 |
| 3.7 Ordre d'un élément du groupe symétrique S_n | 61 |
| 4. Etude des groupes finis | 63 |
| 4.1 Loi de composition interne | 63 |
| 4.2 Loi de composition commutative | 64 |
| 4.3 Loi de composition associative | 64 |
| 4.4 Recherche d'un élément neutre | 64 |
| 4.5 Etude des éléments symétrisables | 65 |
| 4.6 Groupe et groupe abélien | 65 |
| 4.7 Exemples de groupes finis | 69 |
| 5. Exemples de calculs dans des corps finis | 73 |
| 5.1 Corps de décomposition du polynôme $x^2 + 1$ dans $\mathbb{Z} / 7 \mathbb{Z}$ | 73 |
| 5.2 Polynômes irréductibles de degré 2 sur $\mathbb{Z} / p \mathbb{Z}$, p premier | 76 |
| 5.3 Nombre de polynômes irréductibles sur le corps \mathbb{F}_p | 77 |

V. Bases de la programmation fonctionnelle 79

| | |
|--|----|
| 1. Les attributs des fonctions | 79 |
| 1.1 La notion d'attribut | 79 |
| 1.2 Définir ou supprimer des attributs | 79 |
| 1.3 Les attributs des primitives du système | 79 |
| 1.4 Définition de fonctions avec des attributs | 80 |
| 2. Propriétés de la fonction logarithme en calcul formel | 84 |
| 2.1 Retour à PowerExpand et la fonction Log | 84 |
| 2.2 Programmer les propriétés de la fonction Log | 85 |

| | |
|---|-----------|
| 3. Linéarisation en trigonométrie | 86 |
| 3.1 Propriétés à programmer | 86 |
| 3.2 Programmation pour la fonction cosinus | 87 |
| 3.3 Programmation pour les fonctions cosinus et sinus | 88 |
| 3.4 Application | 90 |
| 3.5 Conclusion | 90 |
| 4. Calcul de puissances dans un monoïde associatif | 90 |
| 4.1 Algorithme élémentaire | 91 |
| 4.2 Algorithme par division | 92 |
| 4.3 Algorithme dichotomique | 94 |
| 4.4 La méthode de Legendre | 95 |
| VI. Exercices | 98 |

CHAPITRE 2 : ALGÈBRE LINÉAIRE

| | |
|---|------------|
| I. Etude des matrices | 148 |
| 1. Les fonctions du système | 148 |
| 1.1 Le type matrice | 148 |
| 1.2 Constructions et écriture de matrices | 148 |
| 1.3 Opérations sur les matrices | 149 |
| 2. Noyau et rang d'une matrice | 150 |
| 2.1 La primitive NullSpace | 150 |
| 2.2 Première définition du rang d'une matrice | 150 |
| 2.3 Exemples | 151 |
| 3. Image et rang d'une matrice | 152 |
| 3.1 La primitive Eliminate | 152 |
| 3.2 La primitive RowReduce | 153 |
| 3.3 Autre définition du rang | 153 |
| 4. Applications | 153 |
| 4.1 CNS pour que $\text{Ker } f$ et $\text{Im } f$ soient supplémentaires | 153 |
| 4.2 Indice d'une application linéaire | 155 |

| | |
|--|-----|
| 5. Opérations sur les matrices | 157 |
| 5.1 Exemple fondamental | 157 |
| 5.2 Exemples de calculs de puissances | 160 |
| 5.3 Application à la résolution d'un système différentiel linéaire | 161 |

II. Introduction aux déterminants 163

| | |
|--|-----|
| 1. Formes n -linéaires alternées | 163 |
| 1.1 Déterminants d'ordre 2 | 163 |
| 1.2 Cas des déterminants d'ordre 3 | 164 |
| 1.3 Formes n -linéaires alternées | 165 |
| 1.4 Produit vectoriel | 167 |
| 2. Déterminants et inversion de matrices | 168 |
| 2.1 Matrices de taille déterminée | 168 |
| 2.2 Matrices de taille variable | 169 |

III. Réduction des matrices 172

| | |
|--|-----|
| 1. Les fonctions du système | 172 |
| 2. Diagonalisation d'une matrice carrée | 172 |
| 2.1 Exemple | 172 |
| 2.2 Ecriture d'une fonction-test | 173 |
| 2.3 Applications | 174 |
| 3. Trigonalisation d'une matrice carrée | 177 |
| 3.1 La primitive JordanDecomposition | 177 |
| 3.2 Trigonaliser une matrice non diagonalisable | 177 |
| 4. Applications de la réduction des matrices | 179 |
| 4.1 Commutant d'une matrice | 179 |
| 4.2 Racines carrées d'une matrice diagonalisable | 180 |
| 4.3 Suites récurrentes linéaires | 181 |
| 5. Sous-espaces caractéristiques | 183 |
| 5.1 Théorie des sous-espaces caractéristiques | 183 |
| 5.2 Application à la réduction des matrices | 183 |
| 5.3 Etude des sous-espaces caractéristiques avec Mathematica | 184 |

| | |
|--|------------|
| 6. Etude de matrices blocs | 187 |
| 6.1 Définition de matrices blocs | 187 |
| 6.2 Exemples | 187 |
| 6.3 Applications | 188 |
| IV. Algorithmes | 193 |
| 1. Polynôme caractéristique | 193 |
| 1.1 Algorithme de Souriau | 193 |
| 1.2 Calcul du polynôme caractéristique | 195 |
| 1.3 Inversion d'une matrice carrée | 196 |
| 1.4 Théorème de Cayley-Hamilton | 196 |
| 2. Polynôme minimal d'une matrice carrée | 197 |
| 2.1 Notion de polynôme minimal | 197 |
| 2.2 Application au calcul de puissances matricielles | 199 |
| 2.3 Autre méthode de calcul du polynôme minimal | 200 |
| V. Exercices | 203 |

CHAPITRE 3 : ALGEBRE BILINEAIRE

| | |
|--|------------|
| I. Formes bilinéaires symétriques | 252 |
| 1. Forme bilinéaire symétrique et forme quadratique | 252 |
| 1.1 Forme quadratique associée à une forme bilinéaire symétrique | 252 |
| 1.2 Forme polaire d'une forme quadratique | 252 |
| 1.3 Fonction-test sur les formes quadratiques | 253 |
| 2. Matrice d'une forme quadratique | 253 |
| 2.1 Généralités | 253 |
| 2.2 Construction de la matrice d'une forme quadratique | 254 |
| 2.3 Application | 256 |

| | |
|---|-----|
| 3. Réduction d'une forme quadratique | 257 |
| 3.1 Réduction d'une forme quadratique par la méthode de Gauss | 257 |
| 3.2 Réduction d'une forme quadratique dans le groupe orthogonal | 263 |
| 3.3 Application à une étude d'extrema | 266 |

II. Matrices définies positives 268

| | |
|---|-----|
| 1. Signature d'une forme quadratique | 268 |
| 1.1 Loi d'inertie de Sylvester | 268 |
| 1.2 La signature avec la réduction de Gauss | 268 |
| 1.3 La signature avec les vecteurs propres | 270 |
| 1.4 Les pièges du calcul formel | 270 |
| 2. Matrice définie positive | 274 |
| 2.1 Une fonction-test | 274 |
| 2.2 Algorithme | 274 |
| 2.3 Utilisation des mineurs principaux | 277 |
| 2.4 Matrices hermitiennes définies positives | 278 |
| 3. Racine carrée d'une matrice définie positive | 278 |
| 3.1 Existence et unicité de la racine carrée | 278 |
| 3.2 Programmation | 279 |
| 3.3 Les limites de Mathematica | 279 |
| 3.4 Algorithme itératif de Héron | 280 |
| 4. Factorisation de Cholesky | 281 |
| 4.1 Description de l'algorithme | 281 |
| 4.2 Programmation par règles | 281 |
| 4.3 Programmation procédurale | 282 |
| 5. Décomposition de Cartan | 283 |
| 5.1 Méthode | 283 |
| 5.2 Le programme | 283 |
| 5.3 Exemples | 283 |
| 6. Compléments sur le polymorphisme des opérateurs | 284 |
| 6.1 Mathematica langage typé et non typé | 284 |
| 6.2 Exemple : une fonction racine carrée polymorphe | 285 |

| | |
|--|------------|
| III. Endomorphismes remarquables | 287 |
| 1. Projecteurs orthogonaux | 287 |
| 1.1 Caractérisation | 287 |
| 1.2 Définition d'un projecteur orthogonal en calcul formel | 287 |
| 1.3 Projecteur orthogonal sur une droite vectorielle | 287 |
| 1.4 Projection orthogonale sur un sous-espace de dimension finie | 288 |
| 1.5 Orthogonalisation d'une famille libre de vecteurs | 291 |
| 2. Rotations vectorielles | 293 |
| 2.1 Caractérisation | 293 |
| 2.2 Définition en calcul formel | 293 |
| 2.3 Axe et angle en dimension 3 | 293 |
| 2.4 Matrice d'une rotation d'axe et d'angle donnés | 294 |
| 2.5 Exercice | 295 |
| 3. Isométries vectorielles négatives | 296 |
| 3.1 Caractérisation | 296 |
| 3.2 Définition en calcul formel | 296 |
| 3.3 Exemple | 296 |
| 4. Symétries vectorielles orthogonales | 297 |
| 4.1 Caractérisation | 297 |
| 4.2 Définition en calcul formel | 297 |
| 4.3 Cas particulier des réflexions | 297 |
| 4.4 Lien avec les projecteurs orthogonaux | 298 |
| IV. Exercices | 299 |

CHAPITRE 4 : ANNEXES

| | |
|---------------------------------|------------|
| I. Fichiers de commandes | 328 |
|---------------------------------|------------|

| | |
|--|-----|
| 1. Fichier de commandes d'algèbre linéaire | 328 |
| 1.1 Règles d'écriture d'un package | 328 |
| 1.2 Contenu du package | 328 |
| 1.3 Ecriture du package d'algèbre linéaire | 329 |
| 1.4 Appel et utilisation du package | 330 |
| 2. Fichier de commandes d'algèbre bilinéaire | 330 |
| 2.1 Composition du fichier | 330 |
| 2.2 Ecriture du package | 331 |
| 2.3 Utilisation du package | 332 |
| 2.4 Remarque importante | 332 |

II. Thèmes d'étude 333

| | |
|---|-----|
| 1. Les polynômes en calcul formel | 333 |
| 1.1 Suites de Sturm | 333 |
| 1.2 Résultant de deux polynômes | 338 |
| 2. Matrices à coefficients dans un anneau euclidien | 342 |
| 2.1 Objectifs | 342 |
| 2.2 Propriétés préliminaires | 342 |
| 2.3 Définition des facteurs invariants | 343 |
| 2.4 Définition des invariants fondamentaux | 345 |
| 2.5 Les invariants de similitude | 345 |
| 2.6 Etude avec Mathematica | 346 |
| 3. Polynômes irréductibles sur un corps fini | 353 |
| 3.1 Enoncé du problème | 353 |
| 3.2 Corrigé | 356 |

III. Compléments d'algèbre 364

| | |
|--|-----|
| 1. Structure d'algèbre | 364 |
| 2. Réduction des endomorphismes en dimension finie | 364 |
| 2.1 Endomorphismes diagonalisables | 364 |
| 2.2 Endomorphismes trigonalisables | 365 |
| 2.3 Théorème de Cayley-Hamilton | 365 |
| 2.4 Sous-espaces caractéristiques | 366 |

| | |
|---|-----|
| 3. Bases orthogonales pour une forme quadratique | 366 |
| 4. Signature d'une forme quadratique | 366 |
| 5. Projection orthogonale sur un sous-espace de dimension finie | 366 |
| 5.1 Projection orthogonale et distance à un sous-espace | 366 |
| 5.2 Cas particuliers | 367 |
| 6. Endomorphismes orthogonaux | 367 |
| 6.1 Caractérisation des endomorphismes orthogonaux | 367 |
| 6.2 Groupe orthogonal | 367 |
| 7. Réduction des endomorphismes symétriques | 368 |
| 7.1 Caractérisation d'un endomorphisme symétrique | 368 |
| 7.2 Réduction d'un endomorphisme symétrique | 368 |
| 7.3 Application aux matrices symétriques réelles | 368 |

| | |
|----------------------|-----|
| Bibliographie | 369 |
|----------------------|-----|

| | |
|--------------|-----|
| Index | 371 |
|--------------|-----|