

# Table des matières

---

## *CHAPITRE 1 : ALGEBRE*

<b>I. Calculs algébriques et trigonométriques</b>	12
1. Les primitives du système	12
1.1 Syntaxe des fonctions de base	12
1.2 Calculs dans le corps des complexes	12
1.3 Exemples	13
2. Résolution d'équations, élimination, identification	16
2.1 Syntaxe des fonctions de base	16
2.2 Exemples élémentaires	16
2.3 Résolution d'équations dans le corps des réels	19
<b>II. Polynômes et fractions rationnelles</b>	21
1. Les primitives de base	21
1.1 Primitives structurelles	21
1.2 Primitives fonctionnelles	22
1.3 Cas des fractions rationnelles	22
2. Etude des polynômes	22
2.1 Division euclidienne, pgcd	22
2.2 Racines d'un polynôme	24
2.3 Fonctions symétriques des racines d'un polynôme	27
2.4 Algorithme de Horner	28
2.5 Nombres algébriques	29

3. Etude des fractions rationnelles	31
3.1 Décomposition en éléments simples : cas usuels	31
3.2 Les limites de la primitive Apart	31
3.3 Applications	33

### **III. Structures algébriques infinies** 37

1. Un package de fonctions-tests	37
1.1 Associativité et commutativité	37
1.2 Recherche d'un élément neutre	38
1.3 Etude des éléments symétrisables	38
1.4 Distributivité d'une loi par rapport à une autre	39
2. Structures algébriques usuelles	39
2.1 Structure de groupe	39
2.2 Structure d'anneau	40
2.3 Structure de corps commutatif	40
2.4 Calculs dans un anneau ou un corps	41
3. Les diverses notations des opérateurs	42
3.1 Généralités	42
3.2 Exemple : conjugaison dans $\mathbb{C}$	42
3.3 Notations préfixées et infixées des opérateurs usuels	43
3.4 Remarques	43

### **IV. Structures algébriques finies** 44

1. Sous-ensembles d'un ensemble fini	44
1.1 Première méthode	44
1.2 Définition récursive	45
1.3 Algorithme binaire	46
1.4 Version fonctionnelle	47
2. Relations binaires	47
2.1 Matrice d'une relation binaire	48
2.2 Caractères d'une relation binaire	48
2.3 Relations d'équivalence	50
2.4 Partitions d'un entier naturel	52

3. Permutations d'un ensemble fini	54
3.1 Construction des permutations	55
3.2 Opérations sur les permutations	56
3.3 Permutations remarquables	57
3.4 Orbites associées à une permutation	59
3.5 Décomposition en cycles	60
3.6 Signature d'une permutation, permutations paires ou impaires	60
3.7 Ordre d'un élément du groupe symétrique $S_n$	61
4. Etude des groupes finis	63
4.1 Loi de composition interne	63
4.2 Loi de composition commutative	64
4.3 Loi de composition associative	64
4.4 Recherche d'un élément neutre	64
4.5 Etude des éléments symétrisables	65
4.6 Groupe et groupe abélien	65
4.7 Exemples de groupes finis	69
5. Exemples de calculs dans des corps finis	73
5.1 Corps de décomposition du polynôme $x^2 + 1$ dans $\mathbb{Z} / 7 \mathbb{Z}$	73
5.2 Polynômes irréductibles de degré 2 sur $\mathbb{Z} / p \mathbb{Z}$ , $p$ premier	76
5.3 Nombre de polynômes irréductibles sur le corps $\mathbb{F}_p$	77

## **V. Bases de la programmation fonctionnelle** 79

1. Les attributs des fonctions	79
1.1 La notion d'attribut	79
1.2 Définir ou supprimer des attributs	79
1.3 Les attributs des primitives du système	79
1.4 Définition de fonctions avec des attributs	80
2. Propriétés de la fonction logarithme en calcul formel	84
2.1 Retour à PowerExpand et la fonction Log	84
2.2 Programmer les propriétés de la fonction Log	85

3. Linéarisation en trigonométrie	86
3.1 Propriétés à programmer	86
3.2 Programmation pour la fonction cosinus	87
3.3 Programmation pour les fonctions cosinus et sinus	88
3.4 Application	90
3.5 Conclusion	90
4. Calcul de puissances dans un monoïde associatif	90
4.1 Algorithme élémentaire	91
4.2 Algorithme par division	92
4.3 Algorithme dichotomique	94
4.4 La méthode de Legendre	95
<b>VI. Exercices</b>	<b>98</b>

## ***CHAPITRE 2 : ALGEBRE LINEAIRE***

<b>I. Etude des matrices</b>	<b>148</b>
1. Les fonctions du système	148
1.1 Le type matrice	148
1.2 Constructions et écriture de matrices	148
1.3 Opérations sur les matrices	149
2. Noyau et rang d'une matrice	150
2.1 La primitive NullSpace	150
2.2 Première définition du rang d'une matrice	150
2.3 Exemples	151
3. Image et rang d'une matrice	152
3.1 La primitive Eliminate	152
3.2 La primitive RowReduce	153
3.3 Autre définition du rang	153
4. Applications	153
4.1 CNS pour que $\text{Ker } f$ et $\text{Im } f$ soient supplémentaires	153
4.2 Indice d'une application linéaire	155

5. Opérations sur les matrices	157
5.1 Exemple fondamental	157
5.2 Exemples de calculs de puissances	160
5.3 Application à la résolution d'un système différentiel linéaire	161

## II. Introduction aux déterminants 163

1. Formes $n$ -linéaires alternées	163
1.1 Déterminants d'ordre 2	163
1.2 Cas des déterminants d'ordre 3	164
1.3 Formes $n$ -linéaires alternées	165
1.4 Produit vectoriel	167
2. Déterminants et inversion de matrices	168
2.1 Matrices de taille déterminée	168
2.2 Matrices de taille variable	169

## III. Réduction des matrices 172

1. Les fonctions du système	172
2. Diagonalisation d'une matrice carrée	172
2.1 Exemple	172
2.2 Ecriture d'une fonction-test	173
2.3 Applications	174
3. Trigonalisation d'une matrice carrée	177
3.1 La primitive JordanDecomposition	177
3.2 Trigonaliser une matrice non diagonalisable	177
4. Applications de la réduction des matrices	179
4.1 Commutant d'une matrice	179
4.2 Racines carrées d'une matrice diagonalisable	180
4.3 Suites récurrentes linéaires	181
5. Sous-espaces caractéristiques	183
5.1 Théorie des sous-espaces caractéristiques	183
5.2 Application à la réduction des matrices	183
5.3 Etude des sous-espaces caractéristiques avec Mathematica	184

6. Etude de matrices blocs	187
6.1 Définition de matrices blocs	187
6.2 Exemples	187
6.3 Applications	188
<b>IV. Algorithmes</b>	<b>193</b>
1. Polynôme caractéristique	193
1.1 Algorithme de Souriau	193
1.2 Calcul du polynôme caractéristique	195
1.3 Inversion d'une matrice carrée	196
1.4 Théorème de Cayley-Hamilton	196
2. Polynôme minimal d'une matrice carrée	197
2.1 Notion de polynôme minimal	197
2.2 Application au calcul de puissances matricielles	199
2.3 Autre méthode de calcul du polynôme minimal	200
<b>V. Exercices</b>	<b>203</b>

## ***CHAPITRE 3 : ALGEBRE BILINEAIRE***

<b>I. Formes bilinéaires symétriques</b>	<b>252</b>
1. Forme bilinéaire symétrique et forme quadratique	252
1.1 Forme quadratique associée à une forme bilinéaire symétrique	252
1.2 Forme polaire d'une forme quadratique	252
1.3 Fonction-test sur les formes quadratiques	253
2. Matrice d'une forme quadratique	253
2.1 Généralités	253
2.2 Construction de la matrice d'une forme quadratique	254
2.3 Application	256

3. Réduction d'une forme quadratique	257
3.1 Réduction d'une forme quadratique par la méthode de Gauss	257
3.2 Réduction d'une forme quadratique dans le groupe orthogonal	263
3.3 Application à une étude d'extrema	266

## **II. Matrices définies positives** 268

1. Signature d'une forme quadratique	268
1.1 Loi d'inertie de Sylvester	268
1.2 La signature avec la réduction de Gauss	268
1.3 La signature avec les vecteurs propres	270
1.4 Les pièges du calcul formel	270
2. Matrice définie positive	274
2.1 Une fonction-test	274
2.2 Algorithme	274
2.3 Utilisation des mineurs principaux	277
2.4 Matrices hermitiennes définies positives	278
3. Racine carrée d'une matrice définie positive	278
3.1 Existence et unicité de la racine carrée	278
3.2 Programmation	279
3.3 Les limites de Mathematica	279
3.4 Algorithme itératif de Héron	280
4. Factorisation de Cholesky	281
4.1 Description de l'algorithme	281
4.2 Programmation par règles	281
4.3 Programmation procédurale	282
5. Décomposition de Cartan	283
5.1 Méthode	283
5.2 Le programme	283
5.3 Exemples	283
6. Compléments sur le polymorphisme des opérateurs	284
6.1 Mathematica langage typé et non typé	284
6.2 Exemple : une fonction racine carrée polymorphe	285

<b>III. Endomorphismes remarquables</b>	<b>287</b>
1. Projecteurs orthogonaux	287
1.1 Caractérisation	287
1.2 Définition d'un projecteur orthogonal en calcul formel	287
1.3 Projecteur orthogonal sur une droite vectorielle	287
1.4 Projection orthogonale sur un sous-espace de dimension finie	288
1.5 Orthogonalisation d'une famille libre de vecteurs	291
2. Rotations vectorielles	293
2.1 Caractérisation	293
2.2 Définition en calcul formel	293
2.3 Axe et angle en dimension 3	293
2.4 Matrice d'une rotation d'axe et d'angle donnés	294
2.5 Exercice	295
3. Isométries vectorielles négatives	296
3.1 Caractérisation	296
3.2 Définition en calcul formel	296
3.3 Exemple	296
4. Symétries vectorielles orthogonales	297
4.1 Caractérisation	297
4.2 Définition en calcul formel	297
4.3 Cas particulier des réflexions	297
4.4 Lien avec les projecteurs orthogonaux	298
<b>IV. Exercices</b>	<b>299</b>

## ***CHAPITRE 4 : ANNEXES***

<b>I. Fichiers de commandes</b>	<b>328</b>
---------------------------------	------------



1. Fichier de commandes d'algèbre linéaire	328
1.1 Règles d'écriture d'un package	328
1.2 Contenu du package	328
1.3 Ecriture du package d'algèbre linéaire	329
1.4 Appel et utilisation du package	330
2. Fichier de commandes d'algèbre bilinéaire	330
2.1 Composition du fichier	330
2.2 Ecriture du package	331
2.3 Utilisation du package	332
2.4 Remarque importante	332

## **II. Thèmes d'étude** 333

1. Les polynômes en calcul formel	333
1.1 Suites de Sturm	333
1.2 Résultant de deux polynômes	338
2. Matrices à coefficients dans un anneau euclidien	342
2.1 Objectifs	342
2.2 Propriétés préliminaires	342
2.3 Définition des facteurs invariants	343
2.4 Définition des invariants fondamentaux	345
2.5 Les invariants de similitude	345
2.6 Etude avec Mathematica	346
3. Polynômes irréductibles sur un corps fini	353
3.1 Enoncé du problème	353
3.2 Corrigé	356

## **III. Compléments d'algèbre** 364

1. Structure d'algèbre	364
2. Réduction des endomorphismes en dimension finie	364
2.1 Endomorphismes diagonalisables	364
2.2 Endomorphismes trigonalisables	365
2.3 Théorème de Cayley-Hamilton	365
2.4 Sous-espaces caractéristiques	366

3. Bases orthogonales pour une forme quadratique	366
4. Signature d'une forme quadratique	366
5. Projection orthogonale sur un sous-espace de dimension finie	366
5.1 Projection orthogonale et distance à un sous-espace	366
5.2 Cas particuliers	367
6. Endomorphismes orthogonaux	367
6.1 Caractérisation des endomorphismes orthogonaux	367
6.2 Groupe orthogonal	367
7. Réduction des endomorphismes symétriques	368
7.1 Caractérisation d'un endomorphisme symétrique	368
7.2 Réduction d'un endomorphisme symétrique	368
7.3 Application aux matrices symétriques réelles	368

<b>Bibliographie</b>	369
----------------------	-----

<b>Index</b>	371
--------------	-----