

Table des matières

1	Notions de topologie dans \mathbb{R}^n	1
1.1	Limite d'une application	2
1.2	Ouverts et voisinages	6
1.3	Fermés et compacts	10
1.4	Dérivées partielles	14
1.5	Exercices	18
2	Calcul intégral	25
2.1	Rappels sur l'intégrale simple	25
2.1.1	Intégrale sur un intervalle compact	25
2.1.2	Le théorème fondamental de l'analyse	26
2.1.3	Intégrale d'une fonction à valeurs vectorielles	27
2.1.4	Fonctions intégrables	28
2.1.5	Intégrale des fonctions continues par morceaux	28
2.1.6	Intégrale sur un ouvert de \mathbb{R}	29
2.1.7	Intégrale impropre	30
2.2	Intégrales dépendant d'un paramètre	32
2.2.1	Continuité	32
2.2.2	Dérivation sous le signe d'intégration	33
2.2.3	Intégrations successives : le théorème de Fubini	36
2.3	L'intégrale double	36
2.3.1	Définitions	36
2.3.2	Propriétés de l'intégrale double	37
2.3.3	Calcul des intégrales doubles	39
2.3.4	L'intégrale des physiciens	43
2.3.5	Intégrales triples	45
2.4	Intégrales impropres avec paramètre	46
2.4.1	Les théorèmes	46
2.4.2	La fonction Gamma	50
2.5	Exercices	51

3	Équations et systèmes différentiels	59
3.1	Équations classiques d'ordre 1	60
3.1.1	Équation à variables séparées	60
3.1.2	Équation linéaire homogène	61
3.1.3	Équation homogène	61
3.1.4	Équation linéaire non homogène	62
3.1.5	Équation de Bernoulli	63
3.1.6	Solutions paramétriques	64
3.2	Théorème d'existence et d'unicité	65
3.3	Systèmes linéaires du premier ordre	68
3.3.1	Existence et unicité des solutions	69
3.3.2	Exemples de résolution de systèmes homogènes	70
3.3.3	Résolution du système avec second membre	72
3.4	Équations du second ordre	74
3.4.1	Généralités	74
3.4.2	Cas de réduction au premier ordre	75
3.4.3	Existence et unicité dans le cas linéaire	76
3.4.4	Résolution de l'équation linéaire homogène	77
3.4.5	Équation homogène à coefficients constants	78
3.4.6	Équation linéaire avec second membre	79
3.5	Exercices	81
4	Réduction des endomorphismes	87
4.1	Rappels	87
4.1.1	Somme directe de sous-espaces vectoriels	87
4.1.2	Orientation d'un espace vectoriel réel	91
4.2	Endomorphismes diagonalisables	92
4.3	Valeurs propres et vecteurs propres	95
4.4	Réduction des matrices réelles	102
4.5	Triangularisation	104
4.6	Systèmes différentiels à coefficients constants	107
4.7	Exercices	109
5	Espaces Euclidiens	115
5.1	Produit scalaire. Norme. Orthogonalité	115
5.1.1	Formes bilinéaires et produits scalaires	115
5.1.2	La norme euclidienne	118
5.1.3	Orthogonalité	120
5.1.4	Changement de base orthonormée	127
5.1.5	Produit vectoriel	128
5.2	Endomorphismes symétriques. Coniques et quadriques	130

5.2.1	Endomorphismes symétriques	130
5.2.2	Polynômes du second degré	131
5.2.3	Réduction des polynômes du second degré	133
5.2.4	Classification des coniques	135
5.2.5	Classification des quadriques	135
5.2.6	Un peu plus sur les quadriques	136
5.2.7	Exemples de quadriques	140
5.3	Transformations orthogonales. Rotations	144
5.3.1	Transformations orthogonales	144
5.3.2	Rotations et retournements	147
5.3.3	Transformations orthogonales en dimension 2	147
5.3.4	Les transformations orthogonales en dimension 3	149
5.3.5	Détermination pratique de l'angle de rotation	150
5.4	Les espaces euclidiens complexes	151
5.4.1	Généralités	151
5.4.2	Changement de base orthonormée	153
5.4.3	Endomorphismes hermitiens	154
5.4.4	Transformations unitaires	154
5.5	Exercices	156
6	Séries de fonctions	165
6.1	Séries numériques	165
6.1.1	Généralités	165
6.1.2	Séries à termes positifs	169
6.1.3	Séries absolument convergentes	171
6.1.4	Séries et les intégrales impropres	175
6.1.5	Séries alternées	177
6.1.6	En guise de conclusion	180
6.2	Séries de fonctions	181
6.2.1	Convergence simple et convergence normale	181
6.2.2	Exemples	184
6.3	Séries entières	188
6.3.1	Le rayon de convergence	188
6.3.2	Opérations sur les séries entières	191
6.3.3	Développement d'une fonction en série entière	193
6.3.4	Séries entières et équations différentielles	200
6.4	Séries de Fourier	201
6.4.1	Introduction	201
6.4.2	Coefficients de Fourier	204
6.4.3	Inégalités de Bessel-Parseval	209
6.4.4	Convergence des séries de Fourier	210
6.4.5	Égalité de Bessel-Parseval	215

6.5	Exercices	218
7	Calcul différentiel	231
7.1	Fonctions différentiables	231
7.1.1	Développements limités	231
7.1.2	Fonctions de classe C^1	234
7.1.3	Le théorème de composition	235
7.1.4	Vecteurs tangents	237
7.1.5	Théorème des accroissements finis	240
7.1.6	La différentielle	241
7.2	Formule de Taylor et extrema	242
7.2.1	Fonctions de classe C^2	242
7.2.2	La formule de Taylor à l'ordre 2	244
7.2.3	Extrema locaux d'une fonction de classe C^2	245
7.3	Fonctions à valeurs vectorielles	250
7.3.1	Différentielle et jacobienne d'une application	250
7.3.2	Difféomorphismes	252
7.3.3	Théorèmes des fonctions implicites	255
7.3.4	Extrema liés	263
7.4	Exercices	268
8	Solutions des exercices	279
8.1	Exercices du chapitre 1	279
8.2	Exercices du chapitre 2	284
8.3	Exercices du chapitre 3	291
8.4	Exercices du chapitre 4	296
8.5	Exercices du chapitre 5	303
8.6	Exercices du chapitre 6	311
8.7	Exercices du chapitre 7	324