MATHÉMATIQUES POUR L'ÉCONOMIE
ANALYSE

Cours, exercices corrigés
et applications économiques

Licence

Franck Bien
Nejla Nouaili
Denis Pasquignon

ellipses

CHAPITRE 1

RAISONNEMENT

1.1. La notion de proposition

1.1.1. Définition. —

> ***Définition 1.1.* — Proposition**
> Une proposition mathématique est un énoncé qui est soit vrai soit faux.

Remarque Il est impossible qu'un énoncé mathématique soit à la fois vrai et faux.

Exemple 1.2. — La proposition « tout triangle rectangle possède un angle droit » est une proposition vraie puisqu'il s'agit de la définition d'un triangle rectangle.

Par contre la proposition « tout nombre entier naturel est pair » est une proposition fausse, puisqu'il existe des entiers naturels impairs, par exemple 1.

Notation On note une proposition par une majuscule P.

Il est possible qu'une proposition dépende d'un paramètre réel ou entier. Par exemple, pour tout réel x, on note $P(x)$ la proposition

$$x^2 + x + 1 \geqslant 0.$$

Ainsi, $P(2)$ est la proposition $4 + 2 + 1 \geqslant 0$ soit $7 \geqslant 0$ ce qui est vrai.

De même, considérons la propriété $P(n)$, où n est un entier naturel : n est un nombre pair.

Ainsi $P(3)$ est la proposition « 3 est un nombre pair » ce qui est faux.

1.1.2. Les quantificateurs. — Soit $P(x)$ une proposition qui dépend d'un paramètre x, pour exprimer que la proposition $P(x)$ est vraie pour toutes les valeurs du paramètre ou seulement qu'il existe des valeurs de x pour lesquelles $P(x)$ est vraie, on utilise des notations appelées quantificateurs. L'écriture mathématique va être grandement simplifiée par l'utilisation de deux quantificateurs :

Définition 1.3. — **Quantificateurs**

$\forall$ est le symbole **quelque soit** appelé quantificateur universel.
$\exists$ est le symbole **il existe** appelé quantificateur existentiel.

Exemple 1.4. — La proposition « pour tout réel x, on a $x^2 + x + 1 \geqslant 0$ » se note

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad x^2 + x + 1 \geqslant 0.$$

Exemple 1.5. — La proposition « il existe un entier naturel n tel que n n'est pas pair » s'écrit

$$\exists n \in \mathbb{N}, \quad n \text{ n'est pas pair.}$$

Exemple 1.6. — On considère la proposition suivante

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad x^2 + 1 > 0.$$

Cette proposition exprime que pour tout réel x, $x^2 + 1$ est strictement positif.

Exemple 1.7. — On considère la proposition suivante

$$\exists x \in [2, 4], \quad x > 3.$$

Cette proposition exprime qu'il existe un réel x compris entre 2 et 4 tel que x soit strictement supérieur à 3.

Remarque On peut aussi créer des propositions avec plusieurs quantificateurs. L'ordre dans lequel ils interviennent est très important. Considérons les deux propositions suivantes

$$P_1 \ : \ \forall x \in \mathbb{R}, \quad \exists n \in \mathbb{N}, \quad x \leqslant n, \ \text{et} \ P_2 \ : \ \exists n \in \mathbb{N}, \quad \forall x \in \mathbb{R} \ \ x \leqslant n.$$

La première proposition P_1 exprime que pour tout réel x, il existe un entier n tel que x est inférieur ou égal à n. Tandis que P_2 exprime qu'il existe un entier naturel n tel que pour tout réel x, x est inférieur ou égal à n.

Ces deux propriétés n'ont pas la même signification, puisque dans la première proposition, n peut dépendre de x, alors que dans la deuxième proposition, le n ne dépend pas de x.

1.2. Démontrer une proposition

Etant donné une proposition P, comment démontrer que P est vraie ou fausse. Pour cela, nous présentons plusieurs techniques.

1.2.1. Par déductions successives. — Cette méthode utilise la notion d'implication

Définition 1.8. — **Implication**
La proposition notée $P \Rightarrow Q$ qui se lit P implique Q est vraie lorsque l'on a :

$$\text{si } P \text{ est vraie, alors } Q \text{ est vraie.}$$

Ainsi, pour démontrer que Q est vraie, on utilise une proposition P dont on sait qu'elle est vraie car il s'agit d'une définition, d'une propriété du cours ou d'une hypothèse de l'exercice. Puis, on prouve que $P \Rightarrow Q$ est vraie. On en conclut donc que Q est vraie.

Il est possible que l'implication ne puisse se prouver en une seule étape, on aura une suite finie d'implication

$$P_1 \text{ est vraie et } P_1 \Rightarrow P_2 \Rightarrow P_3 \Rightarrow \cdots \Rightarrow P_n \Rightarrow Q \text{ donc } Q \text{ est vraie.}$$

On a donc prouvé que Q est vraie par une suite finie de déductions successives.

Exemple 1.9. — Nous allons prouver que la proposition P suivante est vraie :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \frac{x}{x^2+1} > 0 \Longrightarrow x > 0.$$

Puisque la proposition P commence par un quantificateur universel, nous prenons un réel x quelconque. Puis, on suppose que

$$\frac{x}{x^2+1} > 0 \text{ est vraie.}$$

Comme x^2+1 est strictement positif car c'est la somme d'un carré et du réel 1 donc est supérieur ou égal à 1, on peut multiplier les membres de l'inégalité par x^2+1 sans changer le sens de l'inégalité. On en déduit que

$$(x^2+1) \times \frac{x}{x^2+1} > (x^2+1) \times 0 \text{ est vraie.}$$

d'où, en simplifiant

$$x > 0.$$

Vocabulaire Si P implique Q est vraie, on dit qu'une condition **nécessaire** pour que P soit vraie est que Q soit vraie ou aussi une condition **suffisante** pour que Q soit vraie est que P soit vraie.

On peut prolonger la notion d'implication par celle d'équivalence :

Définition 1.10. — **Equivalence**

La proposition notée $P \Longleftrightarrow Q$ qui se lit P est équivalent à Q est vraie lorsque

$$P \Rightarrow Q \text{ est vraie et } Q \Rightarrow P \text{ est vraie.}$$

On dit que P et Q sont équivalentes.
On appelle réciproque de $P \Rightarrow Q$ la proposition $Q \Rightarrow P$.

Vocabulaire L'expression ≪ si et seulement si ≫ exprime une équivalence.

Remarque Il est important de ne pas confondre implication et équivalence. En effet, la proposition

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad x = 2 \Longrightarrow x^2 = 4,$$

est vraie mais la réciproque

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad x^2 = 4 \Longrightarrow x = 2,$$

est fausse. Il suffit de choisir $x = -2$, le carré de -2 vaut 4 et -2 est différent de 2.

Exemple 1.11. — Il s'agit de déterminer tous les réels x vérifiant $x-1=\sqrt{1-x}$.

On commence par considérer un réel x tel que $x-1=\sqrt{1-x}$. Pour que cette égalité ait un sens, les deux membres de cette équation doivent exister. Plus précisément, pour tout réel x, on peut calculer $1-x$ mais la racine carrée de $1-x$ suppose que $1-x$ soit positif donc $x \leqslant 1$. On considère donc un réel x inférieur ou égal à 1 vérifiant $x-1=\sqrt{1-x}$. On transforme cette équation par une suite de déductions. On commence par élever au carré, on obtient $(x-1)^2=1-x$. Puis, on développe l'identité remarquable d'où, $x^2-2x+1=1-x$. On passe tous les termes à gauche, on a donc $x^2-x=0$. Enfin, on factorise par x et on obtient $x(x-1)=0$. On en conclut que $x=0$ ou $x=1$.

A ce stade, on a prouvé que si un réel x inférieur ou égal à 1 vérifie $x-1=\sqrt{1-x}$, alors $x=0$ ou $x=1$. En d'autres termes, s'il existe des solutions, ce ne peut être que 0 ou 1 mais c'est une implication, rien ne prouve que ce sont des solutions. Nous avons seulement

$$\forall x \in]-\infty,1], \;\; x-1=\sqrt{1-x} \Longrightarrow x=0 \text{ ou } x=1.$$

La réciproque est indispensable, il s'agit juste de vérifier si 0 ou 1 sont des solutions. Pour $x=0$, $x-1=-1$ et $\sqrt{1-x}=1$, il n'y a pas égalité donc 0 n'est pas une solution de notre problème. Tandis que pour $x=1$, $x-1=0$ et $\sqrt{1-x}=0$, il y a donc égalité, donc 1 est une solution. On en conclut que 1 est la seule solution. Par conséquent, on peut écrire une équivalence

$$\forall x \in]-\infty,1], \;\; x-1=\sqrt{1-x} \Longleftrightarrow x=1.$$

1.2.2. Par contre-exemple. — Cette méthode utilise la notion de négation d'une proposition P. On utilise un contre-exemple pour infirmer une propriété présentée comme générale.

Définition 1.12. — **Négation**
La négation de P, notée non$P$, est vraie si P est fausse et fausse si P est vraie.

Exemple 1.13. — Soit P la proposition

$$\forall (x,y) \in (\mathbb{R}^+)^2, \;\; \sqrt{x+y}=\sqrt{x}+\sqrt{y}.$$

La négation de P est

$$\exists (x,y) \in (\mathbb{R}^+)^2, \;\; \sqrt{x+y}\neq\sqrt{x}+\sqrt{y}.$$

Pour démontrer que non$P$ est vraie, il suffit d' un exemple : pour $x=16$ et $y=9$, $\sqrt{x}+\sqrt{y}=4+3=7$ et $\sqrt{x+y}=\sqrt{25}$=5. Or, $5\neq 7$. On vient de prouver qu'il existe deux réels ne vérifiant pas l'égalité, donc la négation est vraie ce qui entraine que la proposition P est fausse.

1.2.3. Par contraposée. —

Définition 1.14. — Contraposée
Pour montrer que la proposition $P \Rightarrow Q$ est vraie, il est équivalent de montrer que $(Non\ Q) \Rightarrow (Non\ P)$ est vraie.

Exemple 1.15. — Prenons la proposition P : « Je suis pressé » et Q : « je prends le bus ».

Si $P \Rightarrow Q$ est vraie, cela signifie que si je suis pressé, alors je prends le bus.

La contraposée est « si je ne prends pas le bus alors je ne suis pas pressé ».

Ces deux propositions ont la même signification. Si $P \Rightarrow Q$ est vraie, alors si je ne prends pas le bus, cela signifie que je ne suis pas pressé sinon j'aurais pris le bus. Ainsi, la proposition « Si je ne suis pas pressé alors je ne prends pas le bus » est vraie. Ainsi, on a $(Non\ Q) \Rightarrow (Non\ P)$. De même, si la contraposée est vraie, alors si je suis pressé, je prends le bus sinon je ne prends pas le bus ce qui implique que je ne suis pas pressé donc $P \Rightarrow Q$ est vraie.

L'intérêt de la contraposée est qu'il est parfois plus facile de prouver la contraposée que l'implication du départ.

Exemple 1.16. — Considérons la proposition P

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \ n^2 + 1 \text{ est pair} \Rightarrow n \text{ est impair.}$$

La contraposée est

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \ n \text{ est pair} \Rightarrow n^2 + 1 \text{ est impair.}$$

Démontrons que la contraposée est vraie . Soit n un entier naturel, si n est pair, alors par définition d'un nombre pair, il existe un entier naturel k tel que $n = 2k$. On en déduit que $n^2 + 1 = (2k)^2 + 1 = 4k^2 + 1 = 2(2k^2) + 1$ ce qui prouve que $n^2 + 1$ est impair.

Ainsi, en raisonnant par contraposée, on a prouvé que P est vraie.

1.2.4. Par l'absurde. — Le principe de ce raisonnement est le suivant : une proposition ne peut pas être vraie et fausse.

On utilise ce résultat pour montrer qu'une proposition P est vraie. On suppose que P est fausse, donc non$P$ est vraie, puis par déductions successives à partir de la négation de P, on obtient une proposition Q qui est vraie, alors que l'on sait, par ailleurs, que Q est fausse.

C'est la contradiction, c'est-à-dire : on a construit une proposition Q qui est vraie ainsi que sa négation. Par conséquent, si P est fausse, alors on obtient une contradiction donc P est vraie.

Exemple 1.17. — On considère la proposition P

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \ x(x-1) + 9x - (x+5)(x+3) \neq 0.$$

La négation est

$$\exists x \in \mathbb{R},\ \ x(x-1) + 9x - (x+5)(x+3) = 0.$$

Si la négation est vraie, il existe un réel x tel que $x(x-1)+9x-(x+5)(x+3)=0$.

Or, en développant cette expression, on obtient $-15=0$.

La proposition Q est $-15=0$.

Nous avons prouvé que si la négation de P est vraie, alors Q est vraie et, par ailleurs, cette proposition Q est fausse donc il n'existe pas de réels x tel que $x(x-1)+9x-(x+5)(x+3)=0$, ce qui exprime que $nonP$ est fausse soit P est vraie.

1.2.5. Par récurrence. — On se sert du raisonnement par récurrence pour montrer qu'une famille de propositions $P(n)$, indexée par des entiers naturels $n \in \mathbb{N}$, est vraie pour tout entier n. Ce raisonnement consiste en deux étapes

Définition 1.18. — **raisonnement par récurrence**

1. Initialisation : on prouve que $P(0)$ est vraie,
2. Hérédité : Soit n un entier naturel, on prouve que $P(n) \Rightarrow P(n+1)$ est vraie. Ce qui signifie que si la proposition $P(n)$, appelée hypothèse de récurrence, est vraie alors elle se propage pour l'entier $n+1$, c'est-à-dire $P(n+1)$ est vraie.

Si (1) et (2) sont vraies, alors le raisonnement par récurrence affirme que $P(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Remarque Ce qui différencie le raisonnement par récurrence d'un raisonnement déductif est que dans un raisonnement déductif, le nombre d'implications est fini alors que la récurrence contient une infinité d'implications.

Attention Ce type de raisonnement ne peut pas s'appliquer à une proposition $P(x)$ où x est un réel quelconque.

Exemple 1.19. — On veut montrer que la somme S_n des n premiers entiers naturels non nuls est égale à $n(n+1)/2$. Notons $P(n)$ cette proposition

$$P(n) \ : \ S_n = 1+2+\cdots+n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

1. Initialisation : Il est clair que $P(1)$ est vraie, puisque $S_1 = 1 = 1(1+1)/2$.
2. Hérédité : Soit n un entier naturel non nul, supposons que $P(n)$ soit vraie, on appelle $P(n)$ hypothèse de récurrence, et montrons que $P(n+1)$ l'est aussi. Comme $S_{n+1} = S_n + (n+1)$, on a, par hypothèse de récurrence,

$$\begin{aligned} S_{n+1} &= S_n + (n+1) \\ &= \frac{n(n+1)}{2} + (n+1) \\ &= \frac{n(n+1)+2(n+1)}{2} \\ &= \frac{(n+1)((n+1)+1)}{2}. \end{aligned}$$

Donc $P(n+1)$ est vraie.

D'après le raisonnement par récurrence, on en déduit que $P(n)$ est vraie pour tout n, c'est-à-dire que $S_n = \frac{n(n+1)}{2}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

Exemple 1.20. — Dans cet exemple, nous montrons que l'hérédité ne suffit pas, c'est-à-dire que l'on peut avoir $P(n)$ implique $P(n+1)$ vraie pour tout entier n et pourtant $P(n)$ est fausse. On considère la propriété $P(n)$ définie pour tout entier naturel n par $P(n)\ :\ n = n+1$.

Soit un entier naturel n, on suppose que $P(n)$ est vraie. On a par hypothèse de récurrence

$$n = n+1,$$

on ajoute 1 donc

$$n+1 = n+1+1 = n+2.$$

donc $P(n+1)$ est vraie. L'hérédité est donc vérifiée. Par contre, $P(0)$ est fausse car 0 n'est pas égal à 1. Il est clair que, pour tout entier n, $P(n)$ est fausse.

1.3. Exercices

Exercice 1.1. — Prouver que la proposition suivante est vraie

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \ x^2 + x + 1 \geqslant 0.$$

Exercice 1.2. — Montrer que

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \ (x + 4 \geqslant 8 \Rightarrow x > 0) \text{ est vraie.}$$

Exercice 1.3. — Montrer que

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \ (x > 0 \Rightarrow x^3 > 8) \text{ est fausse.}$$

Exercice 1.4. — Montrer que

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \ (x^2 \leqslant 4 \Leftrightarrow -2 \leqslant x \leqslant 2 \Leftrightarrow x \in [-2; 2]) \text{ est vraie.}$$

Exercice 1.5. — Montrer que

$$\exists x \in [2, 4],\ \ x > 3 \text{ est vraie.}$$

Exercice 1.6. — Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$, quelle est la négation de « la fonction f est croissante sur $\mathbb{R}$ » ?

Exercice 1.7. — Quelle est la négation de « tout nombre entier est pair » ?

Exercice 1.8. — Quelle est la contraposée de la proposition : « si je suis pressé, alors je prends le bus ».

Exercice 1.9. — Montrer que

$$\forall x \in \mathbb{R}^+,\ \exists y \in \mathbb{R},\ \ x = y^2 \text{ est vraie}$$

Exercice 1.10. — On note, pour tout entier naturel n, la proposition, notée $\mathcal{P}(n)$: $n! \geqslant 2^n$. On rappelle que $n!$, appelé la factorielle de n, est le produit des n premiers entiers naturels non nuls avec la convention que $0! = 1$.

1. La proposition $\mathcal{P}(0)$ est-elle vraie ?
2. Les propositions $\mathcal{P}(1)$, $\mathcal{P}(2)$, $\mathcal{P}(3)$ sont-elles vraies ?
3. Montrer, à l'aide d'un raisonnement par récurrence, que $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout entier n supérieur ou égal à 4.
4. La proposition $n \geqslant 4$ est -elle une condition nécessaire pour que $\mathcal{P}(n)$ soit vraie ? Est ce une condition suffisante ?

Exercice 1.11. — On considère, pour tout entier n, la proposition, notée $\mathcal{P}(n)$: « $n^2 + 1$ est le carré d'un entier ».

1. Les propositions $\mathcal{P}(0)$, $\mathcal{P}(1)$, $\mathcal{P}(2)$, $\mathcal{P}(3)$ sont-elles vraies ?
2. Démontrer, par l'absurde, que si n est un entier non nul, alors $\mathcal{P}(n)$ est fausse.

Exercice 1.12. — On considère la propriété

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad P(n) \ : \ 3 \text{ divise } 4^n + 1.$$

1. Montrer que pour tout entier naturel, $P(n) \Longrightarrow P(n+1)$ est vraie.
2. Conclure.

1.4. Correction des exercices

Correction de 1.1

Si nous voulons prouver que cette proposition est vraie pour tout réel x, alors il faut considérer un réel x quelconque et prouver que $x^2 + x + 1 \geqslant 0$ est vraie. Sinon, il suffit de donner un exemple de réel x, tel que $x^2 + x + 1 \geqslant 0$ est fausse c'est-à-dire tel que la négation soit vraie soit $x^2 + x + 1 < 0$. Il s'agit de deux démonstrations avec des méthodes très différentes : dans la première on est dans un cas général et dans le deuxième, un exemple suffit.

Prouvons que la proposition est vraie. Soit x un réel quelconque, nous utilisons la décomposition canonique soit

$$x^2 + x + 1 = (x + \frac{1}{2})^2 - \frac{1}{4} + 1 = (x + \frac{1}{2})^2 + \frac{3}{4},$$

ainsi, l'expression $x^2 + x + 1$ est la somme de deux termes positifs donc est positif :

$$x^2 + x + 1 \geqslant 0.$$

Comme ce résultat a été prouvé pour tout réel x, on peut donc affirmer que pour tout réel x, $x^2 + x + 1 \geqslant 0$.