Salim Haddadi

Mathématiques pour l'informatique

Licence
Master

ellipses

1. Propositions et quantificateurs logiques

La logique étudie les principes et méthodes de raisonnement. C'est pour cette raison qu'elle joue un rôle essentiel en mathématiques et en informatique. La logique est un langage muni d'une syntaxe précise et de règles permettant de déduire la vérité d'une assertion à partir de celle d'une autre. Le rôle essentiel de ce langage rigoureux est d'éviter les ambiguïtés et les paradoxes du langage naturel.

MOTS-CLÉS : proposition primitive ; proposition composée ; connecteur logique ; négation ; conjonction ; disjonction ; valeur de vérité ; table de vérité ; proposition conditionnelle ; implication ; proposition bidirectionnelle ; équivalence logique ; fonction propositionnelle ; prédicat ; quantificateur universel ; quantificateur existentiel.

1.1 Propositions et connecteurs logiques

La proposition est la brique de l'édifice logique.

Définition 1.1 Une proposition est une phrase déclarative ne pouvant être que vraie ou fausse, mais pas les deux à la fois. En théorie, on fait référence à une proposition, sans la préciser, en lui associant simplement un symbole ou identificateur. Ainsi, on parlera des propositions $p, q, r, \cdots$ À toute proposition p, on associe une valeur de vérité, désignée par la lettre V si p est vraie et par F si elle est fausse. Une proposition composée est une proposition formée par d'autres propositions reliées entre elles à l'aide de connecteurs logiques. Une proposition primitive est une proposition qui n'est pas composée.

Exemple 1.1 L'exclamation « vas-y ! » n'est pas une proposition logique puisque l'on ne peut lui attacher une valeur de vérité. La phrase « Louis XIV était un grand roi » n'est pas une proposition car elle est entachée d'ambiguïté. En fait, c'est une opinion, affirmative pour les uns, négative pour d'autres. La phrase « $x = 3$ » n'est pas, non plus, une proposition car on ne sait si elle est vraie ou fausse, aucune valeur n'étant attachée à x. La proposition « $1+1=3$ » est une proposition primitive qui est fausse alors que la proposition « $1+1=2$ » est une proposition primitive qui est vraie. La valeur de vérité associée à la première est F alors que celle qui est associée à la seconde est V. La phrase « le ciel est bleu et la terre est ocre » est une proposition composée car elle est formée de deux primitives « le ciel est bleu » et « la terre est ocre », toutes deux reliées à l'aide de la conjonction et. La phrase « si $1=0$ alors le sel fleurit » est une proposition composée de deux propositions primitives « $1=0$ » et « le sel fleurit », reliées à l'aide de l'adverbe alors. $\square$

Exemple 1.2 Considérons la phrase déclarative « je mens ». Est-ce une proposition logique ? Supposons qu'elle est vraie, c'est-à-dire que je mens. Je dis alors la vérité (en affirmant que je mens). Une contradiction. Supposons maintenant qu'elle est fausse, c'est-à-dire que je ne mens pas. Je mens alors en disant « je mens ». Une contradiction aussi. Ainsi, si on suppose que la phrase est vraie, elle est fausse, et si on suppose qu'elle est fausse, elle est vraie. Ce n'est donc pas une proposition logique. C'est ce que l'on appelle un paradoxe. $\square$

On a trois opérations logiques de base pour former des propositions composées à partir de propositions primitives et des trois connecteurs logiques $\neg, \wedge, \vee$: une opération unaire, la négation, et deux opérations binaires, la conjonction et la disjonction.

Définition 1.2 Soient p et q deux propositions primitives.

(i) La négation de la proposition p est la proposition composée notée $\neg p$ (prononcée non p) et définie ainsi : si p est vraie alors $\neg p$ est fausse ; et si p est fausse alors $\neg p$ est vraie.

(ii) La conjonction des propositions p et q est la proposition composée notée $p \wedge q$ (prononcée p et q) et définie ainsi : si p et q sont vraies alors $p \wedge q$ est vraie ; sinon $p \wedge q$ est fausse.

(iii) La disjonction des propositions p et q est la proposition composée notée $p \vee q$ (prononcée p ou q) et définie ainsi : si p et q sont fausses alors $p \vee q$ est fausse ; sinon $p \vee q$ est vraie.

Exemple 1.3 Soit p la proposition primitive « $1=0$ » et q la proposition primitive « $1=1$ ». La proposition $\neg p$ est donc la proposition « $1 \neq 0$ » qui est vraie alors que p est fausse. La proposition $p \wedge q$ est la proposition « $1=0$ et $1=1$ » qui est fausse car les deux propositions primitives p et q ne sont pas toutes deux vraies. La proposition $p \vee q$ est la proposition « $1=0$ ou $1=1$ » qui est vraie car les deux propositions primitives p et q ne sont pas toutes deux fausses. $\square$

La valeur de vérité d'une proposition composée dépend donc exclusivement des valeurs de vérité des propositions primitives qui la composent. Ainsi, si la valeur de vérité de chaque proposition primitive est connue, alors on est en mesure de connaître la valeur de vérité de la proposition composée. Un moyen simple pour calculer la valeur de vérité d'une proposition composée est d'établir sa table de vérité. Voici les tables de vérité des trois propositions composées $\neg p$, $p \wedge q$ et $p \vee q$, conformément à la définition 1.2.

p	$\neg p$
V	F
F	V

p	q	$p \wedge q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	F

p	q	$p \vee q$
V	V	V
V	F	V
F	V	V
F	F	F

Il n'est pas facile de calculer la table de vérité d'une proposition composée lorsqu'elle met en jeu un grand nombre de propositions primitives. En effet, une seule proposition primitive demande deux lignes pour ses deux valeurs de vérité possibles, comme dans le cas de la négation. Quand la proposition composée met en jeu deux propositions primitives alors quatre lignes sont nécessaires. Lorsque la proposition composée met en jeu n propositions primitives alors la table de vérité totalise 2^n lignes.

Exemple 1.4 La disjonction $p \vee q$ de deux propositions primitives p et q peut avoir un sens inclusif ou un sens exclusif. Soient les propositions primitives $p =$ « j'aime la musique » et $q =$ « j'aime la peinture ». dans ce cas, la proposition $p \vee q =$ « j'aime la musique » ou « j'aime la peinture » signifie que, ou bien j'aime la musique, ou bien j'aime la peinture, ou bien j'aime les deux. Considérons maintenant les deux propositions primitives $p =$ « aujourd'hui à 8 heures, il fait chaud » et $q =$ « aujourd'hui à 8 heures, il fait frais ». Dans ce cas, la disjonction $p \vee q$ signifie que, aujourd'hui à 8 heures, soit il fait chaud, soit il fait frais, mais évidemment pas les deux à la fois. □

Lorsqu'une proposition composée met en jeu un nombre important de propositions primitives reliées entre elles à l'aide de connecteurs logiques, on peut être amené à faire des erreurs dans l'établissement de sa valeur de vérité. Pour dissiper tout malentendu, on utilise des parenthèses destinées à préciser l'ordre des opérations. Comme pour les opérations usuelles, il y a un ordre de priorité qui régit les trois opérations logiques définies : d'abord la négation puis la conjonction et enfin la disjonction (observer l'analogie avec le moins unaire, la multiplication et l'addition). Ainsi, en l'absence de parenthèses, la proposition composée $\neg p \vee q \wedge p$ est identique à $(\neg p) \vee (q \wedge p)$.

Exemple 1.5 Les propositions composées $P = (\neg p \wedge q) \vee p$ et $Q = \neg p \wedge (q \vee p)$ n'ont pas la même valeur de vérité. Pour le voir, il suffit de construire la table de vérité de chacune des deux propositions et de comparer la dernière colonne de chacune des deux tables.

p	q	$\neg p$	$\neg p \wedge q$	$(\neg p \wedge q) \vee p$
V	V	F	F	V
V	F	F	F	V
F	V	V	V	V
F	F	V	F	F

p	q	$\neg p$	$q \vee p$	$\neg p \wedge (q \vee p)$
V	V	F	V	F
V	F	F	V	F
F	V	V	V	V
F	F	V	F	F

□

Définition 1.3 Une tautologie (resp. contradiction) est une proposition composée qui est vraie (resp. fausse) quelles que soient les valeurs de vérité des propositions primitives qui la composent.

Exemple 1.6 La proposition $\neg p \vee p$ est une tautologie et la proposition $\neg p \wedge p$ est une contradiction. On peut vérifier cela à l'aide des tables de vérité.

p	$\neg p$	$\neg p \vee p$
V	F	V
F	V	V

p	$\neg p$	$\neg p \wedge p$
V	F	F
F	V	F

□

1.2 Propositions conditionnelles

Définition 1.4 Soient p et q deux propositions primitives. La proposition conditionnelle (ou implication) notée $p \rightarrow q$ est la proposition qui est fausse seulement lorsque p est vraie et q est fausse. La proposition primitive p est, dans ce cas, appelée hypothèse (ou prémisse ou antécédent) et la proposition primitive q est appelée conclusion. La table de vérité de la proposition conditionnelle $p \rightarrow q$ est la suivante.

p	q	$p \rightarrow q$
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

On peut lire la proposition conditionnelle $p \rightarrow q$ de plusieurs façons : p implique q, si p alors q, q si p, q est nécessaire pour p, p est suffisante pour q, p seulement si q.

Exemple 1.7 Soient les deux propositions primitives, $p =$ « il fait beau » et $q =$ « je vais à la plage ». La proposition conditionnelle $p \rightarrow q$ est la proposition : si « il fait beau » alors « je vais à la plage » ou bien : « il fait beau » implique « je vais à la plage ». L'implication $p \rightarrow q$ est fausse seulement lorsque le temps et beau et je ne vais pas à la plage. Dans tous les autres cas, elle est vraie. Observons que l'implication reste vraie lorsque je vais à la plage par mauvais temps. □

L'implication est la moins prioritaire. Autrement dit, l'ordre de précédence des opérations de base est : $\neg, \wedge, \vee, \rightarrow$. Par conséquent, la proposition $p \wedge q \vee \neg r \rightarrow p \vee r$ n'est pas ambiguë et doit être lue : $((p \wedge q) \vee (\neg r)) \rightarrow (p \vee r)$.

Définition 1.5 La réciproque de la proposition conditionnelle $p \rightarrow q$ est la proposition $q \rightarrow p$. La contraposée de la proposition conditionnelle $p \rightarrow q$ est la proposition $\neg q \rightarrow \neg p$.

Exemple 1.8 Considérons les deux propositions de l'exemple précédent. La réciproque de la proposition $p \rightarrow q$ est la proposition : si « je vais à la plage » alors « il fait beau ». La contraposée de $p \rightarrow q$ est la proposition : si « je ne vais à la plage » alors « il ne fait pas beau ». □

Définition 1.6 Soient p et q deux propositions primitives. La proposition biconditionnelle notée $p \leftrightarrow q$ (qui se lit p si et seulement si q) est la proposition qui est vraie lorsque p et q ont même valeur de vérité et qui est fausse sinon. La proposition composée $p \leftrightarrow q$ a pour table de vérité :

p	q	$p \leftrightarrow q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	V

Exemple 1.9 Prenons $p =$ « 2 est impair » et $q =$ « 3 est pair ». La proposition $p \leftrightarrow q =$ « 2 est impair si et seulement si 3 est pair » est vraie car chacune des deux propositions p et q est fausse. Prenons maintenant $p =$ « 2 est impair » et $q =$ « 3 est impair ». La proposition $p \leftrightarrow q =$ « 2 est impair si et seulement si 3 est impair » est fausse car p et q n'ont pas même valeur de vérité. □

1.3 Équivalence logique

Définition 1.7 Deux propositions composées P et Q sont logiquement équivalentes, et on écrit $P \equiv Q$, si elles ont même table de vérité.

Autrement dit, deux propositions composées P et Q sont logiquement équivalentes si elles ont des valeurs de vérité identiques pour toutes les paires possibles de valeurs de vérité des propositions primitives qui les composent. Pour une tautologie P on écrit $P \equiv V$ et pour une contradiction Q on écrit $Q \equiv F$.

Exemple 1.10 Les deux propositions composées suivantes $\neg(p \wedge q)$ et $\neg p \vee \neg q$ sont logiquement équivalentes. Pour le vérifier construisons leurs tables de vérité et vérifions effectivement que les deux dernières colonnes sont identiques.

p	q	$p \wedge q$	$\neg(p \wedge q)$
V	V	V	F
V	F	F	V
F	V	F	V
F	F	F	V

p	q	$\neg p$	$\neg q$	$\neg p \vee \neg q$
V	V	F	F	F
V	F	F	V	V
F	V	V	F	V
F	F	V	V	V

□

Exemple 1.11 Soient les propositions primitives $p =$ « Paul veut vendre sa voiture » et $q =$ « Paul veut acquérir une moto ». La proposition $p \wedge q$ signifie que Paul veut vendre sa voiture et acquérir une moto. En revanche, la proposition $\neg(p \wedge q)$ signifie, conformément à ce qu'on vient de voir dans l'exemple 1.10, que Paul ne veut ni vendre sa voiture, ni acquérir une moto. □

Exemple 1.12 Pour vérifier que les deux propositions composées suivantes $p \to q$ et $\neg q \to \neg p$ sont logiquement équivalentes, construisons leurs tables de vérité.

p	q	$p \to q$
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

p	q	$\neg p$	$\neg q$	$\neg q \to \neg p$
V	V	F	F	V
V	F	F	V	F
F	V	V	F	V
F	F	V	V	V

□

Les deux théorèmes suivants expriment les lois de la logique.

Théorème 1.1
Soient p, q, r des propositions primitives, v une tautologie et f une contradiction.

$\neg\neg p \equiv p$		Double négation
$p \vee p \equiv p$	$p \wedge p \equiv p$	Idempotence
$p \vee f \equiv p$	$p \wedge v \equiv p$	Identité
$p \vee v \equiv v$	$p \wedge f \equiv f$	Domination
$p \vee q \equiv q \vee p$	$p \wedge q \equiv q \wedge p$	Commutativité
$(p \vee q) \vee r \equiv p \vee (q \vee r)$	$(p \wedge q) \wedge r \equiv p \wedge (q \wedge r)$	Associativité
$p \vee (q \wedge r) \equiv (p \vee q) \wedge (p \vee r)$	$p \wedge (q \vee r) \equiv (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$	Distributivité
$p \vee \neg p \equiv v$	$p \wedge \neg p \equiv f$	Inverse
$\neg(p \vee q) \equiv \neg p \wedge \neg q$	$\neg(p \wedge q) \equiv \neg p \vee \neg q$	De Morgan

Preuve. Il suffit de comparer les tables de vérité. On a prouvé la dernière équivalence dans l'exemple 1.10. ■

Théorème 1.2
Soient p, q, r des propositions primitives, v une tautologie et f une contradiction.

$p \to q \equiv \neg q \to \neg p$	Contraposée
$p \to q \equiv \neg p \vee q$	L'implication comme disjonction
$p \to q \equiv \neg(p \wedge \neg q)$	L'implication comme conjonction
$p \to (q \wedge r) \equiv (p \to q) \wedge (p \to r)$	Division d'une conjonction
$p \to q \equiv (p \wedge \neg q) \to f$	Reductio ad absurdum
$(p \wedge q) \to r \equiv p \to (q \to r)$	Exportation
$p \leftrightarrow q \equiv (p \to q) \wedge (q \to p)$	

Preuve. On a prouvé la première équivalence dans l'exemple 1.12. ■

1.4 Fonctions propositionnelles et quantificateurs

Un entier n divise un autre entier m (on écrit $n|m$) s'il existe un entier k tel que $m = k \times n$. Dans ce cas, on dit que n est un diviseur de m. Un entier $n \geq 2$ est dit premier s'il n'a de diviseurs que 1 et n.

Le langage mathématique est truffé d'assertions du genre « $2^n - 1$ est premier » ou encore « $x^3 \geq 5$ ». Chacune des deux assertions est formée de deux parties : une variable et une propriété que vérifie la variable. Dans la première assertion, la variable est n et la propriété est « $2^n - 1$ est premier ». Dans la seconde assertion, la variable est x et la propriété que doit satisfaire x est « $x^3 \geq 5$ ».

En mathématiques, on représente une telle assertion par l'expression $P(n)$ ou $P(x)$. Dans la première assertion, $P(n)$ correspond à « $2^n - 1$ est premier ». Dans la seconde assertion, $P(x)$ correspond à « $x^3 \geq 5$ ». On ne peut attribuer aucune valeur de vérité à $P(n)$ tant qu'aucune valeur n'est attribuée à la variable n. On parle de fonction propositionnelle $P(n)$ (ou prédicat) qui ne devient une proposition que lorsqu'une valeur est attribuée à n. Ainsi, par exemple, lorsque $n = 3$, $P(3)$ est la proposition « 7 est premier » qui est vraie, alors que $P(4)$ est la proposition « 15 est premier » qui est fausse.

Une fonction propositionnelle peut mettre en jeu plusieurs variables : $P(n_1, \cdots, n_k)$. Par exemple, la fonction propositionnelle $P(n_1, n_2)$ mettant en jeu deux variables n_1 et n_2 et définie par « $n_1|n_2$ ». On voit que $P(2,6)$ est une proposition vraie alors que $P(2,3)$ est une proposition fausse.

En mathématiques, il est rare de se dispenser de la notion d'ensemble, que l'on va aborder avec moult détails au chapitre 3. Pour le moment, contentons-nous de l'idée qu'on s'en fait.

Définition 1.8 Soit X un ensemble, appelé univers du discours, et soit $P(x)$ une fonction propositionnelle définie sur X telle que $P(x)$ est vraie ou fausse pour $x \in X$. L'ensemble X est appelé domaine de $P(x)$ et l'ensemble $V_P = \{x \in X | P(x) \text{ vraie}\}$ (ou simplement $V_P = \{x \in X | P(x)\}$) est appelé ensemble de vérité de $P(x)$.

Exemple 1.13 Prenons $X = \mathbb{N}$ et $P(x)$ la fonction propositionnelle « $x + 1 \geq 2$ ». On voit que $P(x)$ est vraie pour tout $x \in \mathbb{N}$. Par conséquent, son ensemble de vérité est $V_P = \mathbb{N}$. Prenons maintenant $P(x)$ la fonction propositionnelle « $x + 1 \leq 1$ ». Dans ce cas $V_P = \emptyset$. □

Définition 1.9 Soit $P(x)$ une fonction propositionnelle définie sur X. La quantification universelle de $P(x)$ est la proposition « $P(x)$ vraie pour tout $x \in X$ » ou encore « $\forall x \in X, P(x)$ ». Le symbole $\forall$ est appelé quantificateur universel.

Exemple 1.14 Lorsque $P(x)$ est la fonction propositionnelle « $x + 1 \geq 2$ », la valeur de vérité de la proposition « $\forall x \in \mathbb{N}, x + 1 \geq 2$ » est V. Lorsque $P(x)$ est la fonction propositionnelle « $x^2 \geq 2$ », la valeur de vérité de la proposition « $\forall x \in \mathbb{N}, x^2 \geq 2$ » est F car la proposition $P(1)$ est fausse. □

Définition 1.10 Soit $P(x)$ une fonction propositionnelle définie sur X. La quantification existentielle de $P(x)$ est la proposition « il existe x tel que $P(x)$ vraie » ou encore « $\exists x \in X, P(x)$ ». Le symbole $\exists$ est appelé quantificateur existentiel.

Exemple 1.15 Lorsque $P(x)$ est la fonction propositionnelle « $x+1 \geq 2^{100}$ », la valeur de vérité de la proposition « $\exists x \in \mathbb{N}, x+1 \geq 2^{100}$ » est V puisque $P(2^{100})$ est vraie. Soit $P(x)$ la fonction propositionnelle « $x^2 < 0$ », alors la valeur de vérité de la proposition « $\exists x \in \mathbb{N}, x^2 < 0$ » est F car $\forall x \in \mathbb{N}, x^2 \geq 0$. □

On peut voir que lorsque l'ensemble $X = \{x_1, \cdots, x_k\}$, la proposition $\forall x \in X, P(x)$ est vraie si et seulement si $P(x_1) \wedge \cdots \wedge P(x_k)$ est vraie, et la proposition $\exists x \in X, P(x)$ est vraie si et seulement si $P(x_1) \vee \cdots \vee P(x_k)$ est vraie.

Récapitulons :

(i) La quantification universelle $\forall x \in X, P(x)$ est vraie lorsque $P(x)$ est vraie pour tout $x \in X$, et elle est fausse lorsqu'il existe $x \in X$ tel que $P(x)$ est fausse.

(ii) La quantification existentielle $\exists x \in X, P(x)$ est vraie s'il existe $x \in X$ tel que $P(x)$ est vraie, et elle est fausse lorsque $P(x)$ est fausse pour tout $x \in X$.

Une fonction propositionnelle peut mettre en jeu plusieurs variables avec un quantificateur associé à certaines variables. Par exemple :

$$\forall x \in X, \exists z \in X, P(x,y,z) \tag{1.1}$$

Définition 1.11 Dans une fonction propositionnelle, une variable est dite liée s'il lui est associé un quantificateur ou bien s'il lui est attribué une valeur.

Ainsi, les variables x et z en (1.1) sont liées. Si une valeur était attribuée à y alors toutes les variables seraient liées et l'assertion en (1.1) serait une proposition. Par exemple, lorsque $P(x,y,z)$ est la fonction propositionnelle « $x+y+z \leq 1$ », en posant $y = 1$ on aurait la proposition $\forall x \in X, \exists z \in X, x+z \leq 0$.

Lorsque l'on a affaire à un seul quantificateur, l'ordre des variables est insignifiant : $\forall x \in X, \forall y \in X, P(x,y)$ et $\forall y \in X, \forall x \in X, P(x,y)$ sont logiquement équivalentes et il en va de même de $\exists x \in X, \exists y \in X, P(x,y)$ et $\exists y \in X, \exists x \in X, P(x,y)$. Cependant, il faut faire attention à l'ordre des quantificateurs dans le cas où tous deux apparaissent car les quantifications qui en résultent ne sont pas logiquement équivalentes. Ainsi, par exemple, si on prend pour fonction propositionnelle la fonction $P(x,y)$ définie par $xy = 1$ pour $x, y \in \mathbb{R}^*$, les quantifications $\forall x \in \mathbb{R}^*, \exists y \in \mathbb{R}^*, xy = 1$ et $\exists y \in \mathbb{R}^*, \forall x \in \mathbb{R}^*, xy = 1$ n'ont pas même valeur de vérité. En effet, la première est vraie car pour tout $x \in \mathbb{R}^*$ on trouve $y = 1/x$ et $xy = 1$. Mais la seconde est fausse car elle signifie que pour un $y \in \mathbb{R}^*$ donné alors $xy = 1$ pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, ce qui est absurde.