Céline Laurent-Reig

ECG2

Mathématiques appliquées

Logigrammes et cartes mentales pour assimiler le programme

ellipses

Algèbre

Carte 1.
Sous-espace vectoriel, application linéaire

NOTATIONS :
E, E' $\mathbb{R}$-espaces vectoriels
F partie de E
$u_1, u_2, \dots, u_p$ p vecteurs de E
$\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_p$ p scalaires réels
O_E vecteur nul de E
$f: E \to E'$ application définie sur E et à valeur dans E'
p entier naturel non nul

NOTIONS DU COURS :
Sous-espace vectoriel
F est un sous-espace vectoriel de E lorsque $0_E \in F$ et F est stable par l'addition et la multiplication par un réel.

Combinaison linéaire
Le vecteur $\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \dots + \lambda_p u_p$ de E est une combinaison linéaire de $u_1, u_2, \dots, u_p$.

Sous-espace vectoriel engendré
$\mathrm{Vect}(u_1, u_2, \dots, u_p)$ est le sous-espace vectoriel de E qui regroupe toutes les combinaisons linéaires possibles de $u_1, u_2, \dots, u_p$.

Application linéaire
f est une application linéaire lorsque pour tous u, v vecteurs de E et pour tout λ scalaire, $f(u+v) = f(u) + f(v)$ et $f(\lambda u) = \lambda f(u)$.

Endomorphisme, isomorphisme
f est un endomorphisme de E lorsque f est linéaire et $E = E'$.
f est un isomorphisme de E dans E' lorsque f est linéaire et f est bijective de E dans E'.

Priorité : comprendre les combinaisons linéaires

Les éléments de E sont des vecteurs multipliables par des scalaires et additionnables entre eux.

On peut créer des vecteurs de E de la forme $\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \cdots + \lambda_p u_p$.

$\mathrm{Vect}(u_1, u_2, \dots, u_p)$ *est le sous-espace vectoriel de E regroupant toutes les combinaisons linéaires de $u_1, u_2, \dots, u_p$.*

Je dois montrer qu'une partie F de E définie par une caractéristique $\mathcal{P}$ est un sous-espace vectoriel de E.

Je montre que F est un sous-espace vectoriel engendré par $u_1, u_2, \dots, u_p$ c'est-à-dire $F = \mathrm{Vect}(u_1, u_2, \dots, u_p)$.

ou

- J'établis que $F \subset E$ et que $0_E \in F$.
- Je prends deux vecteurs u et v dans F et un scalaire λ.
- Je calcule leur combinaison linéaire $u + \lambda v$ et je montre qu'elle vérifie la même caractéristique $\mathcal{P}$ que u et v, c'est-à-dire que $u + \lambda v \in F$.

Je dois montrer qu'une application f définie sur E et à valeurs dans E' est linéaire.

- Je prends deux vecteurs u et v dans E et un scalaire λ.
- Je calcule l'image de leur combinaison linéaire par f, c'est-à-dire $f(u + \lambda v)$.
- Je montre que cette image est égale à la combinaison linéaire des images, c'est-à-dire à $f(u) + \lambda f(v)$.

En option
f endomorphisme : f linéaire et $E = E'$
f isomorphisme : f linéaire et bijective

EXERCICES D'APPLICATION

Exercice 1

Montrer que F est un sous-espace vectoriel de E dans chacun des cas suivants.

a- F est le sous-ensemble des applications dérivables sur $\mathbb{R}$ dans E espace vectoriel des applications définies sur $\mathbb{R}$.

b- $F = \{P \in \mathbb{R}[X], P(0) = 0\}$ dans $E = \mathbb{R}[X]$ espace vectoriel des polynômes.

c- F est le sous-ensemble des suites convergentes dans E espace vectoriel des suites réelles.

Corrigé exercice 1

a- F est inclus dans E et l'application constante nulle est dérivable sur $\mathbb{R}$ donc le vecteur nul de E appartient bien à F.

Soit f et g deux applications de F et λ un réel. En particulier f et g sont dérivables sur $\mathbb{R}$. Ainsi $f + \lambda g$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ par produit et somme, c'est-à-dire $f + \lambda g$ appartient aussi à F.

Donc F est un sous-espace vectoriel de E.

b- F est inclus dans E et le polynôme constant nul associe l'image 0 à 0 donc le vecteur nul de E appartient bien à F.

Soit P et Q deux polynômes de F et λ un réel. En particulier $P(0) = 0$ et $Q(0) = 0$. On obtient $(P + \lambda Q)(0) = P(0) + \lambda Q(0) = 0$. Donc $P + \lambda Q \in F$.

Donc F est un sous-espace vectoriel de E.

c- F est inclus dans E et la suite constante nulle converge vers 0 donc le vecteur nul de E appartient bien à F.

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites de F et λ un réel. En particulier $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers un réel l et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers un réel m. D'où par limite d'un produit et d'une somme, $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n + \lambda v_n = l + \lambda m$ et $(u_n + \lambda v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est encore une suite convergente de F.

Donc F est un sous-espace vectoriel de E.

Exercice 2

Montrer que les sous-ensembles suivants sont des sous-espaces vectoriels de E en les écrivant sous la forme d'un sous-espace vectoriel engendré.

a- $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, -x + 2y + 3z = 0\}$ avec $E = \mathbb{R}^3$.

b- $= \{(a + b + c, a - b + 3c, 4a + 8c) \in \mathbb{R}^3, a, b, c \text{ réels}\}$ avec $E = \mathbb{R}^3$.

c- E est le $\mathbb{R}$-ev des suites réelles et F est le sous-ensemble des suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telles que pour tout $n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = -u_{n+1} + 6u_n$.

d- $E = \mathbb{R}_2[X]$ et $F = \left\{P \in \mathbb{R}_2[X] , \int_0^1 P(t)\mathrm{d}t = 0\right\}$.

Corrigé exercice 2

a- $(x, y, z) \in F \Leftrightarrow -x + 2y + 3z = 0 \Leftrightarrow x = 2y + 3z \Leftrightarrow (x, y, z) = (2y + 3z, y, z)$

$\Leftrightarrow (x, y, z) = y(2,1,0) + z(3,0,1)$

Donc $F = \text{Vect}\big((2,1,0),(3,0,1)\big)$.
En particulier F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.

b- $(a+b+c, a-b+3c, 4a+8c) \in G$
$\Leftrightarrow (a+b+c, a-b+3c, 4a+8c) = a(1,1,4) + b(1,-1,0) + c(1,3,8)$
Donc $G = \text{Vect}\big((1,1,4),(1,-1,0),(1,3,8)\big)$ et G est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.

c- Une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de F est une suite récurrente linéaire du second ordre d'équation caractéristique $x^2 + x - 6 = 0$: cette équation admet deux racines distinctes 2 et -3. Donc il existe α et β réels tels que : $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = \alpha 2^n + \beta(-3)^n$. En particulier $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ appartient à $\text{Vect}((2^n)_{n\in\mathbb{N}}, ((-3)^n)_{n\in\mathbb{N}})$.
Réciproquement soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ appartenant à $\text{Vect}((2^n)_{n\in\mathbb{N}}, ((-3)^n)_{n\in\mathbb{N}})$: ainsi il existe α et β réels tels que : $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = \alpha 2^n + \beta(-3)^n$. On vérifie alors :

$$\begin{aligned}\forall n \in \mathbb{N}, \qquad -u_{n+1} + 6u_n &= -2\alpha 2^n + 3\beta(-3)^n + 6\alpha 2^n + 6\beta(-3)^n \\ &= 4\alpha 2^n + 9\beta(-3)^n \\ &= \alpha 2^{n+2} + \beta(-3)^{n+2} \\ &= u_{n+2}\end{aligned}$$

D'où $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ appartient à F.
Donc $F = \text{Vect}((2^n)_{n\in\mathbb{N}}, ((-3)^n)_{n\in\mathbb{N}})$ est un sous-espace vectoriel de E.

d- Soit $P \in F$: ceci signifie que $P = aX^2 + bX + c$ avec a, b, c réels et $\int_0^1 P(t)\mathrm{d}t = 0$.
On calcule $\int_0^1 P(t)\mathrm{d}t = \int_0^1 at^2 + bt + c\mathrm{d}t = \frac{a}{3} + \frac{b}{2} + c$.
Ainsi $c = -\frac{a}{3} - \frac{b}{2}$ et $P = a\left(X^2 - \frac{1}{3}\right) + b\left(X - \frac{1}{2}\right) \in \text{Vect}\left(X^2 - \frac{1}{3}, X - \frac{1}{2}\right)$.
Réciproquement soit P appartenant à $\text{Vect}\left(X^2 - \frac{1}{3}, X - \frac{1}{2}\right)$: ainsi il existe a et b réels tels que : $P = a\left(X^2 - \frac{1}{3}\right) + b\left(X - \frac{1}{2}\right)$. On vérifie alors :

$$\begin{aligned}\int_0^1 P(t)\mathrm{d}t &= \int_0^1 a\left(t^2 - \frac{1}{3}\right) + b\left(t - \frac{1}{2}\right)\mathrm{d}t \\ &= \left[a\left(\frac{t^3}{3} - \frac{t}{3}\right) + b\left(\frac{t^2}{2} - \frac{t}{2}\right)\right] = 0\end{aligned}$$

D'où P appartient à F.
Donc $F = \text{Vect}\left(X^2 - \frac{1}{3}, X - \frac{1}{2}\right)$ est un sous-espace vectoriel de E

Exercice 3

Montrer que les applications suivantes sont linéaires.

a- $$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R}^2 \\ (x,y,z) & \mapsto & \left(2x - y + \frac{z}{3}, x + y + z\right) \end{array}$$

b- $$g : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^\mathbb{N} & \to & \mathbb{R}^\mathbb{N} \\ (u_n)_{n\in\mathbb{N}} & \mapsto & (u_{2n})_{n\in\mathbb{N}} \end{array}$$

c- $$h : \begin{array}{ccc} \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R}) & \to & \mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{R}) \\ M & \mapsto & {}^tM \end{array}$$ avec n, p entiers naturels non nuls et ${}^tM$ matrice transposée de M

d- $\varphi : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_n[X] & \to & \mathbb{R}^{n+1} \\ P & \mapsto & (P(a_0), P(a_1), \dots, P(a_n)) \end{array}$ avec n entier naturel non nul et $a_0, a_1, \dots, a_n$ $n+1$ réels distincts.

Corrigé exercice 3

a- Soit $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, $(x', y', z') \in \mathbb{R}^3$ et λ un réel.
On a $(x, y, z) + \lambda(x', y', z') = (x + \lambda x', y + \lambda y', z + \lambda z')$ et :
$f\big((x, y, z) + \lambda(x', y', z')\big) = f(x + \lambda x', y + \lambda y', z + \lambda z')$
$= \left(2(x + \lambda x') - (y + \lambda y') + \dfrac{z + \lambda z'}{3}, (x + \lambda x') + (y + \lambda y') + (z + \lambda z')\right)$
$= \left(2x - y + \dfrac{z}{3} + 2\lambda x' - \lambda y' + \dfrac{\lambda z'}{3}, x + y + z + \lambda x' + \lambda y' + \lambda z'\right)$
$= \left(2x - y + \dfrac{z}{3}, x + y + z\right) + \lambda\left(2x' - y' + \dfrac{z'}{3}, x' + y' + z'\right)$
$= f\big((x, y, z)\big) + \lambda f\big((x', y', z')\big)$
Donc f est linéaire.

b- Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, $(v_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ et λ un réel. On vérifie :
$g((u_n)_{n\in\mathbb{N}} + \lambda(v_n)_{n\in\mathbb{N}}) = g((u_n + \lambda v_n)_{n\in\mathbb{N}})$
$= (u_{2n} + \lambda v_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$
$= (u_{2n})_{n\in\mathbb{N}} + \lambda(v_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$
$= g((u_n)_{n\in\mathbb{N}}) + \lambda g((v_n)_{n\in\mathbb{N}})$
Donc g est linéaire.

c- Soit $M \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$, $M' \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ et λ un réel.
$h(M + \lambda M') = {}^t(\lambda M + \lambda M')$
$= {}^tM + \lambda {}^tM'$
$= h(M) + \lambda h(M')$
Donc h est linéaire.

d- Soit $P \in \mathbb{R}_n[X]$, $Q \in \mathbb{R}_n[X]$ et λ un réel.
$\varphi(P + \lambda Q) = \big((P + \lambda Q)(a_0), (P + \lambda Q)(a_1), \dots, (P + \lambda Q)(a_n)\big)$
$= \big(P(a_0) + \lambda Q(a_0), P(a_1) + \lambda Q(a_1), \dots, P(a_n) + \lambda Q(a_n)\big)$
$=\big(P(a_0), P(a_1), \dots, P(a_n)\big) + \lambda\big(Q(a_0), Q(a_1), \dots, Q(a_n)\big)$
$= \varphi(P) + \lambda\varphi(Q)$
Donc φ est linéaire.

Exercice 4

Montrer que les applications suivantes sont des endomorphismes de $\mathbb{R}_n[X]$ l'espace vectoriel des polynômes de degré au plus n avec n entier naturel non nul.

a- $f : P \mapsto P'$

b- $\varphi : P \mapsto X^2P' - nXP$

Corrigé exercice 4

a- Soit $P \in \mathbb{R}_n[X]$, $Q \in \mathbb{R}_n[X]$ et λ un réel.
On a $P + \lambda Q$ dérivable comme produit et somme et
$f(P + \lambda Q) = (P + \lambda Q)'$
$= P' + \lambda Q'$
$= f(P) + \lambda f(Q)$
Donc f est linéaire.
De plus pour tout $P \in \mathbb{R}_n[X]$, on obtient P' polynôme de degré au plus $n - 1$: en particulier $f(P) \in \mathbb{R}_n[X]$.
D'où f est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.

b- Soit $P \in \mathbb{R}_n[X]$, $Q \in \mathbb{R}_n[X]$ et λ un réel.
On a $P + \lambda Q$ dérivable comme produit et somme et
$\varphi(P + \lambda Q) = X^2(P + \lambda Q)' - nX(P + \lambda Q)$
$= X^2P' + \lambda X^2Q' - nXP - n\lambda XQ$
$= X^2P' - nXP + \lambda(X^2Q' - nXQ)$
$= \varphi(P) + \lambda\varphi(Q)$
Donc φ est linéaire.
Ensuite soit $P \in \mathbb{R}_n[X]$. Alors $X^2P' - nXP$ est encore un polynôme avec

$$\deg(X^2P' - nXP) \leq \max(\deg(X^2P'), \deg(-nXP))$$

Or $\deg(X^2P') = 2 + \deg(P') \leq 1 + \deg(P)$ et $\deg(-nXP) = 1 + \deg(P)$.
1$^{\text{er}}$ cas : $\deg(P) < n$. Dans ce cas, on obtient directement $\deg(X^2P' - nXP) \leq n$.
2$^{\text{e}}$ cas : $\deg(P) = n$. On note a_n le coefficient dominant de P.
Ainsi X^2P' est de degré $n + 1$ et de coefficient dominant na_n et $-nXP$ est de degré $n + 1$ et de coefficient dominant $-na_n$. Leur coefficient dominant étant opposé, on obtient $\deg(X^2P' - nXP) \leq n$.
Dans tous les cas, $\varphi(P) \in \mathbb{R}_n[X]$.
Au final φ est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.

Carte 2.
Famille libre, génératrice, base

NOTATIONS :
E $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie non nulle, F sous-espace vectoriel de E
$u_1, u_2, \ldots, u_p$ p vecteurs de E
$\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_p$ p scalaires réels
$(e_1, e_2, \ldots, e_n)$ base de E
n, p entiers naturels non nuls

NOTIONS DU COURS :
Combinaison linéaire
Le vecteur $\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \ \ldots + \lambda_p u_p$ de E est une combinaison linéaire de $u_1, u_2, \ldots, u_p$.

Sous-espace vectoriel engendré
$\mathrm{Vect}(u_1, u_2, \ldots, u_p)$ est le sous-espace vectoriel de E qui regroupe toutes les combinaisons linéaires possibles de $u_1, u_2, \ldots, u_p$.

Identification des coefficients, racines, degré d'un polynôme (voir carte polynômes)

Base
$(u_1, u_2, \ldots, u_p)$ est une base de F lorsque, pour tout $u \in F$, il existe p uniques scalaires $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_p$ tels que $u = \lambda_1 u_1 + \ \lambda_2 u_2 + \ \ldots + \ \lambda_p u_p$.
Dans ce cas $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_p$ sont appelés les coordonnées de u dans la base $(u_1, u_2, \ldots, u_p)$.

Dimension
F est dit de dimension finie lorsque il admet une base constituée d'un nombre fini de vecteurs. Dans ce cas, tous les bases ont le même nombre de vecteurs. Ce cardinal commun est appelé dimension de F et est noté $\dim F$.