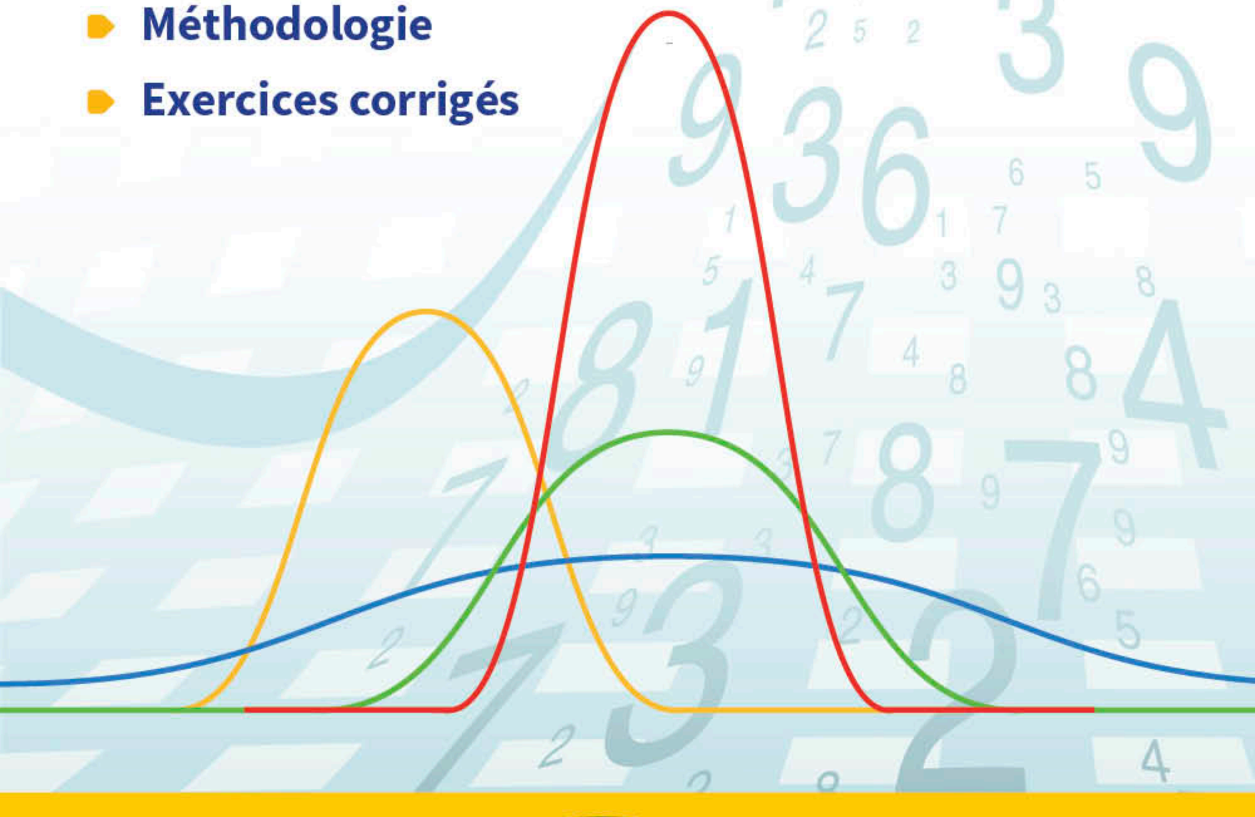
François RADACAL

MATHÉMATIQUES FINANCIÈRES

- Rappels de cours
- Méthodologie
- Exercices corrigés



ellipses

Chapitre 2

Étude d'une fonction réelle

1. Fonctions standards

Définition

On appelle fonction réelle ou numérique toute application définie par

$$f : D_f \to \mathrm{R}$$
$$x \longmapsto f(x)$$

Où D_f représente le domaine de définition de la fonction f. D_f est l'ensemble des valeurs pour lesquelles la fonction existe.

Exemples

Les fonctions suivantes sont des fonctions réelles et on note D_f leur ensemble de définition.

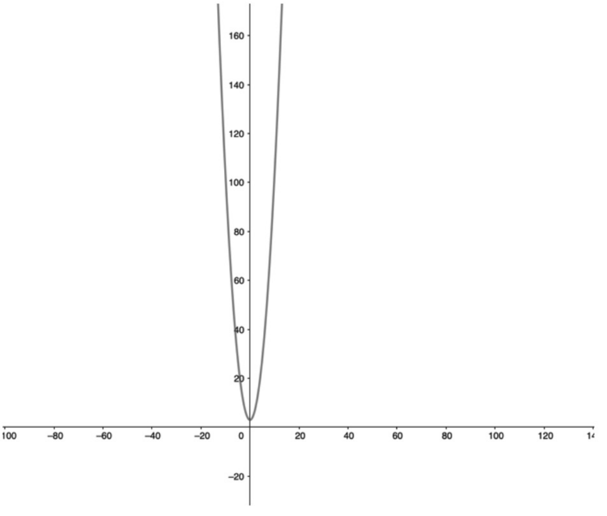
- $f(x) = \ln(x)$ avec $D_f = \mathrm{R}^{+*}$
- $g(x) = e^x$ avec $D_g = \mathrm{R}$

EXERCICE 1 **Déterminer si ces fonctions sont réelles et si c'est le cas, déterminer leur domaine de définition.**

a. $f(x) = x^2 + 3$
b. $g(x) = 3x + 109$

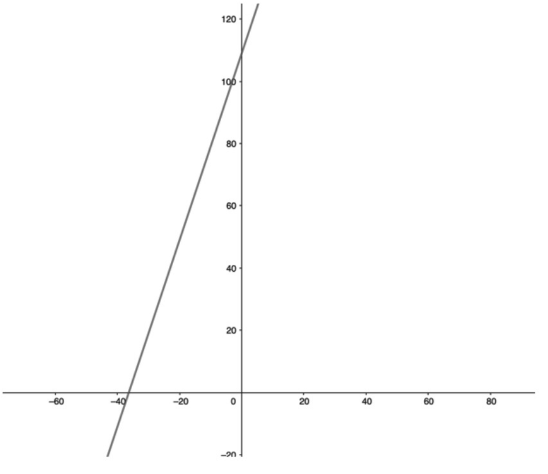
Corrigé

a. La fonction f est une fonction réelle et $D_f = R$.



Courbe représentative de la fonction f

b. La fonction g est une fonction réelle et $D_g = R$.



Courbe représentative de la fonction g

Définition

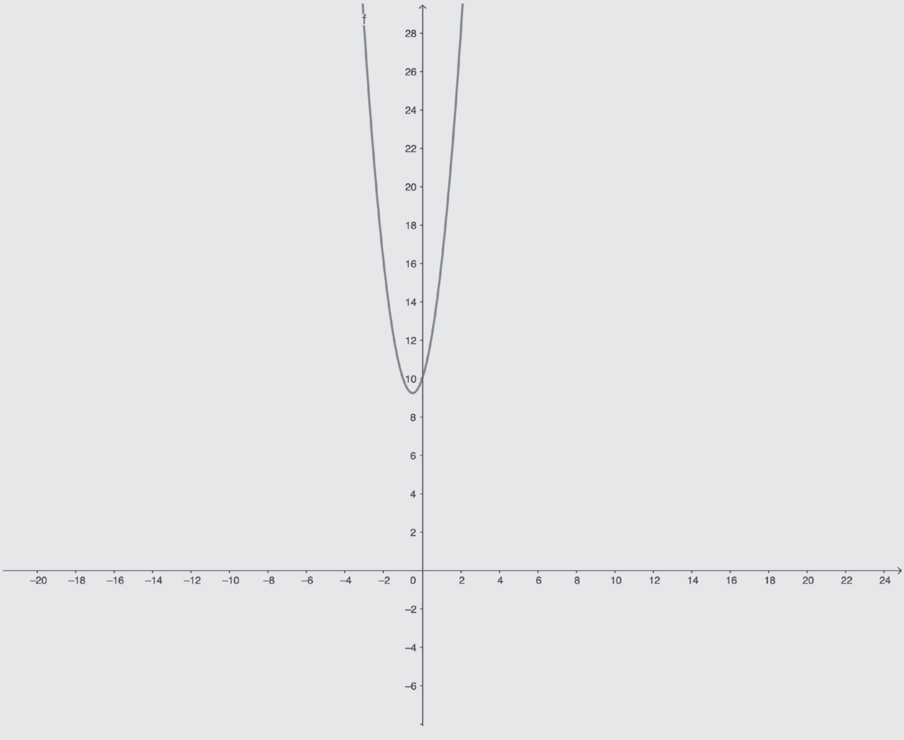
Soit E une partie de D_f, on appelle image de E le sous-ensemble de R, noté $f(E)$, défini par

$$f(E) = \{f(x)/x \in E\}.$$

On appelle graphe de f le sous-ensemble G de R^2 défini par : $G = \{(x, y) \in D_f \times R / y = f(x)\}$

Exemple

Soit $f(x) = 2x^2 + 3x + 10$ définie sur $D_f = R$, le graphe de la fonction f est le suivant :



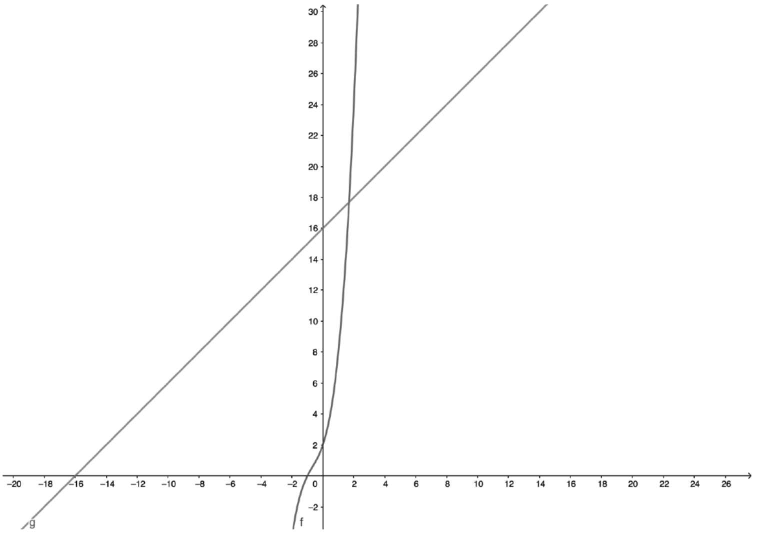
Courbe représentative de la fonction f

EXERCICE 2 **Déterminer le domaine de définition des deux fonctions réelles suivantes et tracer leur graphe sur leur domaine de définition.**

a. $f(x) = x^3 + 2x^2 + 3x + 2$
b. $g(x) = x + 16$

Corrigé

a. $D_f = \mathrm{R}$
b. $D_g = \mathrm{R}$



Courbes représentatives des fonctions f et g

Définition

On appelle f^{-1} la fonction réciproque de la fonction f.

Exemple : Si $f(x) = ln(x) \Rightarrow f^{-1}(x) = e^x$ ($ln1 = 0$ et $e^0 = 1$)

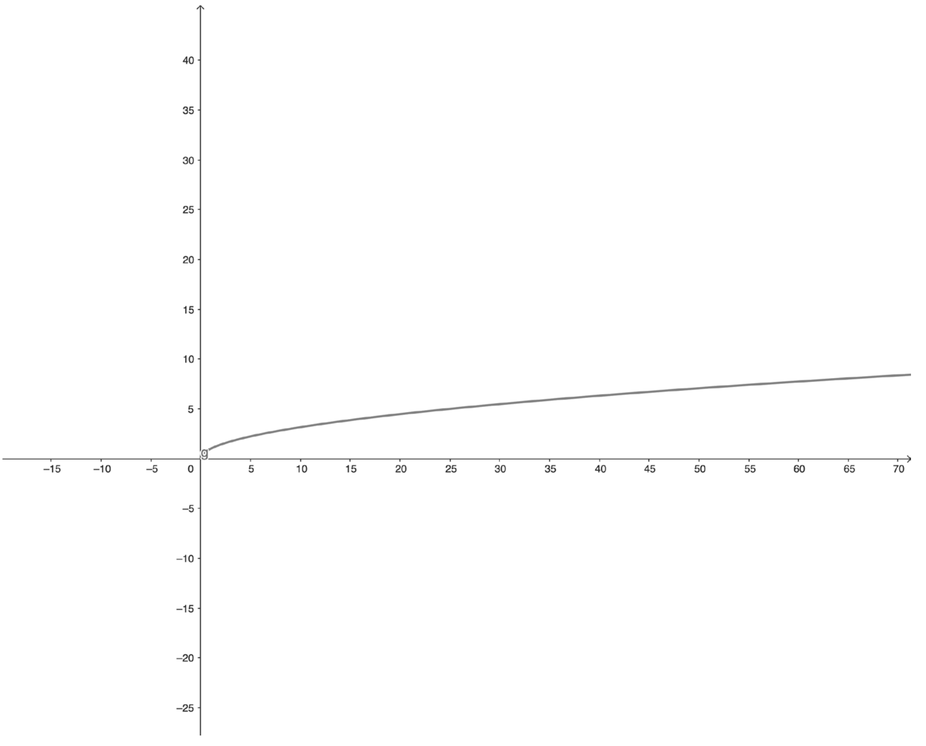
1.1. Fonction racine carrée

Définition

On appelle fonction racine carrée toute application définie par

$$f : D_f \rightarrow \mathrm{R}^+$$
$$x \longmapsto \sqrt{x}$$

Voici la **courbe représentative** de la fonction racine carrée :



1.2. Fonction logarithme népérien

Histoire du logarithme

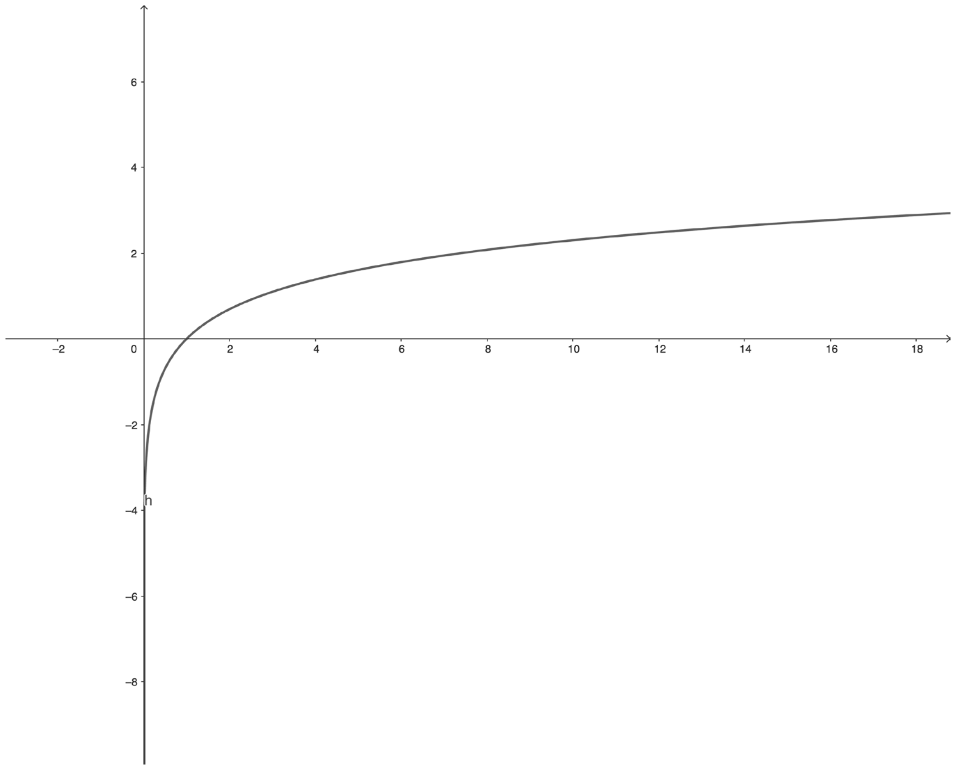
Le « logarithme népérien », ou plus communément appelé « logarithme », a été inventé par un mathématicien écossais du nom de John Napier (ou Neper en latin) en 1614. À l'origine, le logarithme a été inventé afin de faciliter les calculs astronomiques et trigonométriques. Son usage le plus connu est le calcul de l'aire sous l'hyperbole.

Définition

On appelle fonction logarithme népérien toute application définie par

$$f : D_f \to \mathrm{R}^{+*}$$
$$x \longmapsto \ln(x)$$

Voici la **courbe représentative** de la fonction logarithme népérien :



Propriétés

Les propriétés principales du logarithme à retenir sont les suivantes :

- $\ln(x)$ existe si et seulement si $x > 0$;
- $\ln(1) = 0$ et $\ln(\mathrm{e}) = 1$
- $\ln(x)$ est strictement croissante pour tout x qui appartient à l'intervalle $]0 ; +\infty[$.
- La fonction ln est dérivable sur $]0 ; +\infty[$ et sa dérivée est $\dfrac{1}{x}$.

Pour a et b strictement positifs et pour tout rationnel n, on a :

- $\ln(ab) = \ln a + \ln b$ avec $a > 0$ et $b > 0$
- $\ln\left(\dfrac{\mathrm{a}}{\mathrm{b}}\right) = \ln a - \ln b$
- $\ln(a^n) = n\ln a$

Exercice 1 Application des propriétés

Exprimer cette expression sous la forme d'un seul logarithme : $\ln(6) + \ln(4) - \ln(2)$

Corrigé

$$\ln(6) + \ln(4) - \ln(2) = \ln(6 \times 4) - \ln(2) = \ln\left(\frac{24}{2}\right) = \ln(12)$$

Exercice 2 Simplification

Simplifier l'expression suivante : $\ln\left(\frac{2}{3}\right) + \ln\left(\frac{3}{4}\right) + \ln\left(\frac{4}{5}\right) + \ln\left(\frac{5}{6}\right)$

Corrigé

$$\ln\left(\frac{2}{3}\right) + \ln\left(\frac{3}{4}\right) + \ln\left(\frac{4}{5}\right) + \ln\left(\frac{5}{6}\right) = \ln\left(\frac{2}{3} \times \frac{3}{4} \times \frac{4}{5} \times \frac{5}{6}\right) = \ln\left(\frac{2}{6}\right) = \ln\left(\frac{1}{3}\right)$$

Exercice 3 Résolution d'équation

Résoudre l'équation suivante : $4 = \ln(2x - 5)^2$

Corrigé

$4 = \ln(2x - 5)^2$

$\Leftrightarrow 4 = 2\ln(2x - 5)$

$\Leftrightarrow 2 = \ln(2x - 5)$

$\Leftrightarrow e^2 = 2x - 5$

$\Leftrightarrow x = \dfrac{\exp(2) + 5}{2}$

$\Leftrightarrow x \approx 6{,}19$

1.3. Fonction exponentielle

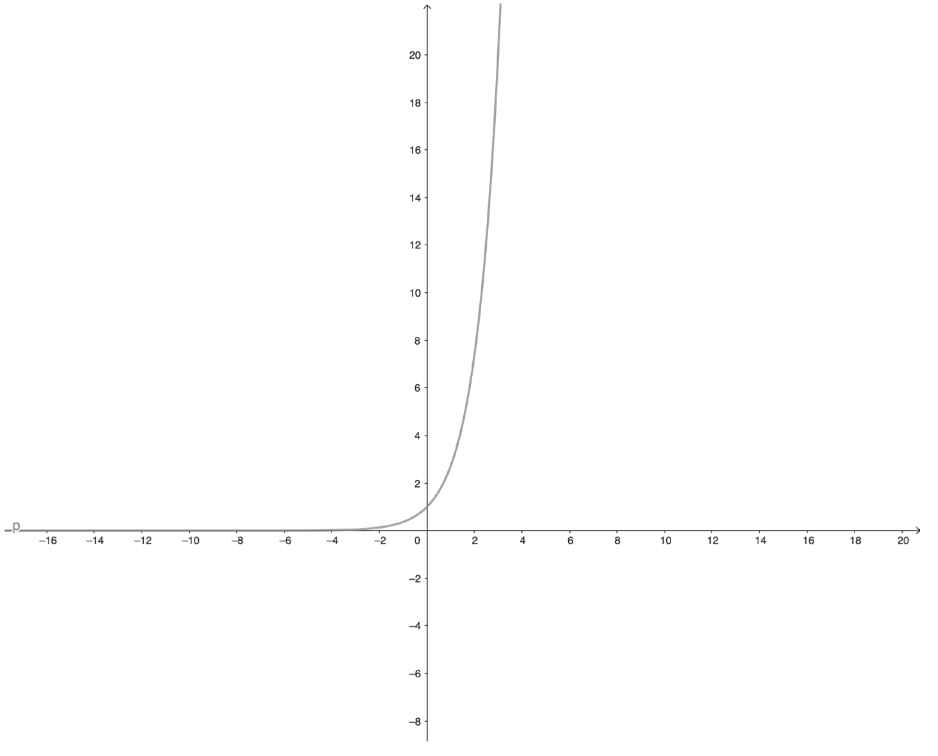
Histoire de l'exponentielle

La fonction exponentielle a été inventée vers la fin du XVII^e siècle par un mathématicien suisse qui se nomme Leonhard Euler (raison pour laquelle nous appelons parfois « e » le « nombre d'Euler »). L'idée de l'invention de la fonction exponentielle était de pouvoir combler les trous entre plusieurs puissances d'un même nombre.

Définition

On appelle fonction exponentielle de base e (ou exponentielle népérienne) la fonction réciproque de la fonction logarithme népérien. Elle est notée $f(x) = e^x$.

Voici la **courbe représentative** de la fonction exponentielle :



Propriétés

Les propriétés principales du logarithme à retenir sont les suivantes :

- La fonction e^x est définie sur R =]–∞ ; +∞[
- La fonction exponentielle est strictement positive : $e^x > 0 \ \forall \ x \in$ R
- $e^0 = 1$
- La dérivée de la fonction exponentielle est égale à elle-même
- La fonction exponentielle est la réciproque de la fonction logarithme népérien :
  - Pour $x > 0$, $y = \ln(x) \Leftrightarrow e^y = x$
  - Si $a > 0$, alors $e^{\ln(a)} = a$ et $\forall b \in$ R $\ln(e^b) = b$

Pour a et b appartenant à l'intervalle]–∞ ; +∞[on a :

- $e^{-a} = \dfrac{1}{\exp(a)}$
- $e^{(a+b)} = e^a e^b$
- $\exp\left(\dfrac{a}{b}\right) = e^a \times e^{-b} = e^{a-b}$
- $(e^a)^n = e^{na}$