TSI
2^{e} année

Olivier Leuck
Walter Damin
Michel Goumi
Ivan Gozard
Bertrand Hauchecorne

PRÉPAS SCIENCES

COLLECTION DIRIGÉE PAR **BERTRAND HAUCHECORNE**

MATHS

2^{e} édition

NOUVEAUX PROGRAMMES

- Objectifs
- Cours résumé
- Méthodes
- Vrai/faux, erreurs classiques
- Exercices de base et d'approfondissement
- Sujets de concours (écrits, oraux)
- Corrigés détaillés et commentés

ellipses

Chapitre 1

Compléments d'algèbre linéaire

UN MATHÉMATICIEN

Très jeune, **Giuseppe Peano** (1858-1932) a compris l'importance de la nouvelle approche des mathématiques que permettait la théorie des ensembles à peine naissante. Déchiffrant l'ouvrage plutôt obscur d'Hermann Grassmann, dans lequel sont introduits les espaces vectoriels, il bâtit une axiomatique claire encore utilisée de nos jours. Il introduit les applications linéaires et montre que cette théorie ne se limite pas à la dimension finie en donnant l'exemple des polynômes.

Un peu d'histoire

À tout nombre réel a, on peut faire correspondre une application toute simple, celle qui à un réel x fait correspondre ax soit la multiplication d'un nombre par un scalaire. Tout segment est alors transformé en un segment dont la longueur est multipliée par a. La variable x est au premier degré, elle n'est pas affectée d'une puissance.

Les applications linéaires en sont la généralisation aux dimensions supérieures ; l'expression des images est une expression de degré un des coordonnées et elles conservent l'origine.

Le maniement de ce type d'applications s'est particulièrement développé au XVIII^{e} siècle en particulier pour résoudre des systèmes linéaires, avec Gabriel Cramer, Étienne Bézout, Alexandre Vandermonde mais leur introduction formelle est l'œuvre de Peano.

Objectifs

les incontournables

- Justifier qu'une application est linéaire.
- Montrer qu'une famille est libre, géněratrice dans un espace vectoriel de dimension quelconque.
- Déterminer la matrice d'un endomorphisme dans une base.
- Justifier qu'un sous-espace vectoriel est stable par un endomorphisme.
- Exploiter les propriétés de la trace.

et plus si affinités

- Reconnaître un hyperplan.
- Exploiter les propriétés d'un endomorphisme induit.
- Déterminer la trace d'un endomorphisme.
- Justifier que deux sous-espaces vectoriels sont supplémentaires à l'aide d'un raisonnement par analyse-synthèse.

Résumé de cours

On désigne par $\mathbb{K}$ l'ensemble $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Familles génératrices, familles libres, bases

Combinaisons linéaires

Définition : *Soit $(x_i)_{i\in\mathbb{N}}$ une famille de vecteurs de E. On appelle* ***combinaison linéaire*** *de la famille $(x_i)_{i\in\mathbb{N}}$ toute somme du type $\sum_{k=1}^{n} \lambda_k x_{i_k}$, dans laquelle n est un entier non nul, $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ une famille de scalaires et $(i_1, \ldots, i_n)$ une famille d'entiers.*

Commentaire ▷ L'ensemble des combinaisons linéaires de la famille $(x_i)_{i\in\mathbb{N}}$ est un sous-espace vectoriel de E, noté $\mathrm{Vect}(x_i)_{i\in\mathbb{N}}$. On l'appelle le ***sous-espace vectoriel engendré par la famille*** $(x_i)_{i\in\mathbb{N}}$.

Familles libres, familles génératrices

Définition : *Une famille $(x_i)_{i\in\mathbb{N}}$ de vecteurs de E est* ***libre*** *si la seule combinaison linéaire nulle de cette famille est la combinaison linéaire dont tous les coefficients sont nuls.*

Commentaires ▷ La famille $(x_i)_{i\in\mathbb{N}}$ est libre si

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall (\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n, \forall (i_1, \ldots, i_n) \in \mathbb{N}^n, \quad \sum_{k=1}^{n} \lambda_k x_{i_k} = 0 \implies \forall k \in [\![1, n]\!], \quad \lambda_k = 0.$$

▷ La famille $(x_i)_{i\in\mathbb{N}}$ est dite ***liée*** lorsqu'elle n'est pas libre.

Proposition 1.1 — Soit $(x_i)_{i\in\mathbb{N}}$ une famille de E. Les propriétés suivantes sont équivalentes :
- (i) $(x_i)_{i\in\mathbb{N}}$ est une famille libre ;
- (ii) pour tout entier n, la famille $(x_0, x_1, \ldots, x_n)$ est libre.

Exemple : Toute famille de polynômes non nuls de $\mathbb{K}[X]$ échelonnée en degré est libre.

Définition : *La famille $(x_i)_{i\in\mathbb{N}}$ de vecteurs de E est une famille* ***génératrice*** *de E si tout vecteur de E peut s'écrire comme une combinaison linéaire des vecteurs x_i.*

Commentaire ▷ Les propriétés suivantes sont équivalentes :

- (i) $(x_i)_{i\in\mathbb{N}}$ est une famille génératrice de E ;
- (ii) $\mathrm{Vect}(x_i)_{i\in\mathbb{N}} = E$.

Base

Définition : *Une famille libre et génératrice de E est appelée une* ***base*** *de E.*

Proposition 1.2 — Soit $(e_i)_{i\in\mathbb{N}}$ une famille de vecteurs de E. Les propositions suivantes sont équivalentes :

(i) $(e_i)_{i\in\mathbb{N}}$ est une base de E ;

(ii) tout vecteur de E s'écrit de manière unique comme combinaison linéaire des vecteurs e_i.

Exemples : $(X^n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une base de $\mathbb{K}[X]$ appelée ***base canonique*** de $\mathbb{K}[X]$.
▷ La famille $(e_i)_{i\in[\![1,n]\!]}$, où $e_i = (0,\dots,0,1,0,\dots,0)$ (le 1 se trouvant en $i^{\text{ième}}$ position) forme une base de $\mathbb{K}^n$ appelée base canonique de $\mathbb{K}^n$.
▷ Toute famille $(P_k)_{k\in\mathbb{N}}$ de polynômes vérifiant, pour tout k, $\deg(P_k) = k$, est une base de $\mathbb{K}[X]$.

■ Somme d'un nombre fini de sous-espaces vectoriels

Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$.

Définition : *Soit m un entier non nul et $F_1,\dots,F_m$ des sous-espaces vectoriels de E. On appelle **somme** des sous-espaces vectoriels F_i, l'ensemble des vecteurs s'écrivant $f_1+f_2+\cdots+f_m$ où pour tout $i\in[\![1,m]\!]$, f_i est un vecteur de F_i. On le note $F_1+F_2+\cdots+F_m$:*

$$F_1+\cdots+F_m = \big\{f_1+\cdots+f_m \ \mid \ (f_1,\cdots,f_m)\in F_1\times\cdots\times F_m\big\}.$$

Commentaire ▷ La somme d'un nombre fini de sous-espaces vectoriels de E est un sous-espace vectoriel de E ; en effet on peut montrer qu'un tel ensemble est non vide et stable par combinaison linéaire.

Définition : *Soit m un entier non nul et $F_1,\dots,F_m$ des sous-espaces vectoriels de E. On dit que la somme $F_1+\cdots+F_m$ est **directe** si pour tout vecteur $x\in F_1+\cdots+F_m$, il existe un unique m-uplet $(f_1,\dots,f_m)\in F_1\times\cdots\times F_m$ tel que : $x = f_1+\cdots+f_m$. On note alors :*

$$F_1+\cdots+F_n = F_1\oplus F_2\oplus\cdots\oplus F_m.$$

Proposition 1.3 — Soit m un entier non nul et $F_1,\dots,F_m$ des sous-espaces vectoriels de E. Les propositions suivantes sont équivalentes :

(i) la somme $F_1+\cdots+F_n$ est directe ;

(ii) les hypothèses $f_1\in F_1$, $f_2\in F_2,\dots,f_m\in F_m$ et $f_1+f_2+\cdots+f_m=0$ impliquent

$$f_1=f_2=\cdots=f_m=0.$$

Commentaire ▷ Puisque $F_1+\cdots+F_m$ est un sous-espace vectoriel de E, il contient le vecteur nul ; celui-ci peut donc s'écrire sous la forme $0 = f_1+\cdots+f_m$ où pour tout $i\in[\![1,m]\!]$, $f_i\in F_i$. Chaque F_i étant un sous-espace vectoriel de E, il contient également le vecteur nul ; ce qui donne une nouvelle décomposition du vecteur nul : $0 = 0+\cdots 0$. Sans autre hypothèse sur la somme $F_1+\cdots+F_m$, il se peut que le vecteur nul possède plusieurs décompositions. La proposition 1.3 affirme que la somme $F_1+\cdots+F_n$ est directe si et seulement le vecteur nul admet une unique décomposition donnée par $0 = 0+\cdots+0$.

■ Décomposition en somme directe

Définition : *Soit m un entier non nul et $F_1, \dots, F_m$ des sous-espaces vectoriels de E. On dit que E est **somme directe** de $F_1, \dots, F_m$ lorsque :*

$$E = F_1 \oplus F_2 \oplus \cdots \oplus F_m.$$

Commentaires ▷ Lorsque E est somme directe de $F_1, \dots, F_m$, la somme de $F_1, \dots, F_m$ est directe et égale à E.
▷ Dans le cas où $m = 2$, dire que E est somme directe de F_1 et F_2 est équivalent à dire que F_1 et F_2 sont ***supplémentaires*** dans E.

Des résultats précédents, on déduit les caractérisations suivantes.

Proposition 1.4 — Soit m un entier non nul et $F_1, \dots, F_m$ des sous-espaces vectoriels de E. Les propriétés suivantes sont équivalentes :

(i) E est somme directe de $F_1, \dots, F_m$;

(ii) pour tout vecteur $x \in E$, il existe un unique m-uplet $(f_1, \dots, f_m) \in F_1 \times \cdots \times F_m$ tel que : $x = f_1 + \cdots + f_m$;

(iii) $E = F_1 + F_2 + \cdots + F_m$ et les hypothèses $f_1 \in F_1$, $f_2 \in F_2, \dots, f_m \in F_m$, $f_1 + f_2 + \ldots + f_m = 0$ impliquent $f_1 = f_2 = \ldots = f_m = 0$.

■ Base adaptée à une décomposition en somme directe

On suppose que E est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie.

Proposition 1.5 — Soit m un entier non nul et $F_1, \dots, F_m$ des sous-espaces vectoriels de E. Les propriétés suivantes sont équivalentes :

(i) E est somme directe de $F_1, \dots, F_m$;

(ii) la concaténation d'une base de F_1, d'une base de F_2, ... , d'une base de F_m est une base de E.

Dans ce cas, on a :

$$\boxed{\dim(E) = \dim\big(F_1 \oplus F_2 \oplus \cdots \oplus F_m\big) = \sum_{i=1}^{m} \dim(F_i)}.$$

Remarque : Par exemple, la concaténation de la famille $(e_1, \dots, e_r)$ et de la famille $(f_1, \dots, f_p)$ est la famille $(e_1 \dots, e_r, f_1, \dots, f_p)$.

Définition : *On appelle **base adaptée à la décomposition en somme directe** $E = \bigoplus_{i=1}^{m} F_i$ toute base obtenue comme concaténation de bases de chaque sous-espace vectoriel F_i.*

■ Caractérisation des supplémentaires en dimension finie

Théorème 1.6 — Soit F et G deux sous-espaces vectoriels d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E de dimension finie. Les propositions suivantes sont équivalentes :

(i) F et G sont supplémentaires dans E ;

(ii) $E = F + G$ et $\dim(E) = \dim(F) + \dim(G)$;

(iii) $F \cap G = \{0_E\}$ et $\dim(E) = \dim(F) + \dim(G)$;

(iv) la concaténation d'une base F et d'une base de G est une base de E.

■ Projecteurs et symétries

◆ Projecteur

Définition : *Un endomorphisme p de E est un **projecteur** s'il vérifie $p^2 = p$.*

Commentaire ▷ Pour un projecteur p de E, on a : $\mathrm{Im}(p) = \ker(p - \mathrm{id}_E)$.

Théorème 1.7 — Soit p un projecteur de E. Les sous-espaces vectoriels $\ker(p)$ et $\mathrm{Im}(p)$ sont supplémentaires dans E :

$$E = \ker(p) \oplus \mathrm{Im}(p).$$

◆ Projecteur associé à deux sous-espaces vectoriels supplémentaires

Théorème-Définition 1.8 — Étant donné deux sous-espaces vectoriels supplémentaires F_1 et F_2 de E, l'application qui à tout $x = x_1 + x_2$ de E (où $x_1 \in F_1$ et $x_2 \in F_2$) fait correspondre x_1 est un projecteur d'image F_1, de noyau F_2.
Cette application linéaire s'appelle la ***projection sur** F_1 **parallèlement à** F_2.*

◆ Symétrie

Définition : *Un endomorphisme s de E est une **symétrie** s'il vérifie $s^2 = \mathrm{id}_E$.*

Commentaire ▷ Toute symétrie de E est un endomorphisme bijectif, égal à son inverse.

Théorème 1.9 — Soit s un projecteur de E. Les sous-espaces vectoriels $\ker(s - \mathrm{id}_E)$ et $\ker(s + \mathrm{id}_E)$ sont supplémentaires dans E :

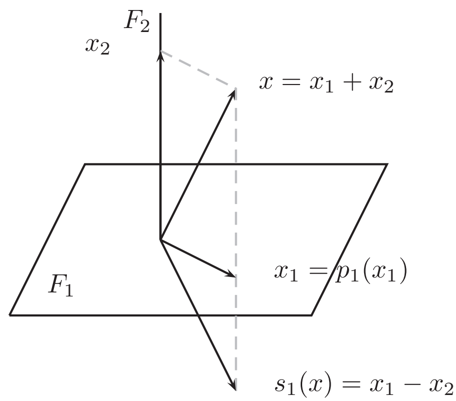
$$E = \ker(s - \mathrm{id}_E) \oplus \mathrm{Im}(s + \mathrm{id}_E).$$

◆ Symétrie associée à deux sous-espaces vectoriels supplémentaires

Théorème-Définition 1.10 — Soit F_1 et F_2 deux sous-espaces vectoriels supplémentaires de E. L'application s qui à tout $x = x_1 + x_2$ de E (où $x_1 \in F_1$ et $x_2 \in F_2$) fait correspondre $x_1 - x_2$ est une symétrie vérifiant :

$$\ker(s - \mathrm{id}_E) = F_1 \qquad \text{et} \qquad \ker(s + \mathrm{id}_E) = F_2.$$

Cette application linéaire s'appelle la ***symétrie par rapport à*** F_1 ***parallèlement à*** F_2.



Commentaire ▷ Soit F_1 et F_2 deux sous-espaces vectoriels supplémentaires de E, p_1 le projecteur sur F_1 parallèlement à F_2 et s_1 la symétrie par rapport à F_1 parallèlement à F_2. On a :

$$\boxed{s_1 = 2p_1 - \mathrm{id}_E}$$

■ Sous-espace stable

Définition : *Soit g un endomorphisme de E, et F un sous-espace vectoriel de E. On dit que F est* ***stable*** *par g si pour tout vecteur x de F, le vecteur $g(x)$ appartient à F.*

Commentaire ▷ Le sous-espace vectoriel F est stable par g si et seulement si $g(F) \subset F$.

Proposition 1.11 — Soit g un endomorphisme de E, F un sous-espace vectoriel de E et $(e_1, \dots, e_p)$ une base de F. Les propositions suivantes sont équivalentes :

(i) F est stable par g ;

(ii) pour tout $i \in [\![1, p]\!]$, $\quad g(e_i) \in F$.

Théorème 1.12 (caractérisation matricielle) **—** Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n, F un sous-espace vectoriel de dimension p et g un endomorphisme de E. Les propositions suivantes sont équivalentes :

(i) F est stable par g ;

(ii) pour tout supplémentaire G de F dans E, la matrice de g dans toute base $\mathscr{B}$ adaptée à la décomposition $E = F \oplus G$ est de la forme :

$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(g) = \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & C \end{pmatrix}$$

où $A \in \mathscr{M}_p(\mathbb{K})$, $B \in \mathscr{M}_{p,n-p}(\mathbb{K})$ et $C \in \mathscr{M}_{n-p}(\mathbb{K})$.

Commentaire ▷ Une telle base $\mathscr{B}$ s'obtient par concaténation d'une base $\mathscr{C}$ de F et d'une base de G.

■ Trace d'une matrice carrée, d'un endomorphisme

Définition : *On appelle **trace** d'une matrice A de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ la somme des coefficients diagonaux de cette matrice. Elle est notée* $\mathrm{Tr}(A)$.

Proposition 1.13 — L'application trace définie par

$$\begin{array}{rccc} \mathrm{Tr} : & \mathscr{M}_n(\mathbb{K}) & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ & A & \longmapsto & \mathrm{Tr}(A) \end{array}$$

est linéaire.

Proposition 1.14 — Soit n et p deux entiers non nuls et soit $A \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, $B \in \mathscr{M}_{p,n}(\mathbb{K})$. On a :

$$\boxed{\mathrm{Tr}(AB) = \mathrm{Tr}(BA)}$$

Corollaire 1.15 — Deux matrices semblables de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ ont même trace.

Définition : *Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie et soit g un endomorphisme de E. On appelle **trace** de g la trace d'une matrice représentant g dans une base de E. On la note* $\mathrm{Tr}(g)$.

Commentaire ▷ Deux matrices semblables ayant même trace, la définition précédente est bien cohérente. En effet, le choix d'une base de E n'intervient pas dans la valeur de la trace de l'endomorphisme g.

■ Matrice symétrique, antisymétrique

◆ Transposée d'une matrice

Définition : *Soit p et n deux entiers naturels non nuls et soit $A = (a_{ij}) \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ une matrice. On appelle **transposée** de la matrice A, la matrice de $\mathscr{M}_{p,n}(\mathbb{K})$, notée A^{T}, définie par :*

$$\forall (i,j) \in [\![1,p]\!] \times [\![1,n]\!], \qquad \left(A^{\mathsf{T}}\right)_{ij} = a_{ji}.$$

Exemple : Si $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}$, alors $A^{\mathsf{T}} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 4 & 6 \end{pmatrix}$.

Commentaire ▷ L'application

$$\begin{array}{ccc} \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K}) & \longrightarrow & \mathscr{M}_{p,n}(\mathbb{K}) \\ A & \longmapsto & A^{\mathsf{T}} \end{array}$$

est appelée ***transposition***. On détaille ses propriétés dans la proposition suivante.