# PSI
# PSI*

**Walter Damin**
Michel Goumi
Ivan Gozard
Bertrand Hauchecorne
Olivier Leuck

PRÉPAS SCIENCES

COLLECTION DIRIGÉE PAR **BERTRAND HAUCHECORNE**

# MATHS

5e édition

NOUVEAUX PROGRAMMES

- Objectifs
- Cours résumé
- Méthodes
- Vrai/faux, erreurs classiques
- Exercices de base et d'approfondissement
- Sujets de concours (écrits, oraux)
- Corrigés détaillés et commentés

ellipses

# ■■ Résumé de cours

***Ce chapitre 1 rappelle les notions et les propriétés des espaces vectoriels et des applications linéaires vues en MPSI ou en PCSI. Nous y avons ajouté les quelques compléments en PSI. Il serait d'ailleurs intéressant pour le lecteur de revoir un peu son cours de première année avant d'entamer l'année scolaire de PSI.***

$\mathbb{K}$ désigne indifféremment l'un des corps $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ et $E$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

## ■ Familles libres, familles génératrices, bases

**Définition : Combinaison linéaire —.** *On appelle combinaison linéaire d'un nombre fini de vecteurs $\vec{u}_1$, ..., $\vec{u}_p$ de $E$ toute somme $\sum_{i=1}^{p} \lambda_i \vec{u}_i$, où $\lambda_1, ..., \lambda_p$ sont des scalaires (c'est-à-dire des éléments de $\mathbb{K}$), appelés coefficients de la combinaison linéaire.*

**Proposition 1.1.—** L'ensemble des combinaisons linéaires d'une famille finie $X = (\vec{u}_1, ..., \vec{u}_p)$ est un sous-espace vectoriel de $E$, appelé **sous-espace vectoriel engendré** par $X$ et noté $\mathrm{Vect}\,(X)$.

**Définition : Famille libre, famille liée —.** ▸ *$(\vec{u}_i)_{i \in [\![1,n]\!]}$, famille **finie** de vecteurs de $E$, est **libre** (on dit aussi que ces vecteurs sont indépendants) si pour toute famille $(\lambda_i)_{i \in [\![1,n]\!]}$ appartenant à $\mathbb{K}^n$, on a l'implication suivante :*

$$\boxed{\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \vec{u}_i = 0_E \Rightarrow \forall\, i \in [\![1, n]\!],\ \lambda_i = 0.}$$

▸ *On peut étendre à $(\vec{u}_i)_{i \in I}$, famille de vecteurs de $E$ de cardinal quelconque.*
*Elle est **libre** si toutes ses sous-familles finies sont libres.*
▸ *Si une famille n'est pas libre, on dit qu'elle est **liée**.*

**Remarques :** ▸ Toute famille contenue dans une famille libre est libre.
▸ Toute famille contenant une famille liée est liée. (Contraposition de l'implication précédente.)
En particulier, toute famille contenant le vecteur nul est liée.
▸ Une famille de deux vecteurs est liée si, et seulement si, ces deux vecteurs sont colinéaires.

**Proposition 1.2.— Famille liée et combinaison linéaire —.**On suppose $I$ fini. Une famille $(\vec{u}_i)_{i \in I}$ est liée si, et seulement si, l'un au moins des $\vec{u}_i$ est combinaison linéaire des autres.

**Définition : Famille génératrice —.** *Une famille $X$ de $E$ est une **famille génératrice de l'espace vectoriel** $E$ si tout vecteur de $E$ est une combinaison linéaire finie de vecteurs de $E$. Dans le cas où $X$ est une famille finie, on a alors :* $\mathrm{Vect}\, X = E$.

**Définition : Base —.** *Une famille de vecteurs du $\mathbb{K}$-espace vectoriel $E$ est une **base** de $E$ si elle est une famille libre et génératrice.*

**Exemples :** ▸ $(X^i)_{i \in \mathbb{N}}$ est une base de $\mathbb{K}[X]$. $(X^i)_{i \in [\![0,n]\!]}$ est la base **canonique** de $\mathbb{K}_n[X]$.
▸ $((1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1))$ est la base **canonique** de $\mathbb{R}^3$.

## ■ Dimension

**Définition : Espace vectoriel de dimension finie —.** *Un espace vectoriel est **de dimension finie** s'il admet une famille génératrice finie.*

**Proposition 1.3.— Théorème d'existence d'une base et de la base incomplète —.**
- Tout $\mathbb{K}$-espace vectoriel $E$ de dimension finie admet une base finie.
- On peut extraire de toute famille génératrice finie de $E$ une base de $E$.
- Toute famille libre de $E$ peut être complétée en une base de $E$.

**Lemme 1.4.—** Dans un espace vectoriel de dimension finie, une famille libre ne peut avoir plus d'éléments qu'une famille génératrice.

**Théorème 1.5.— Théorème de la dimension —.**
Toutes les bases d'un espace vectoriel $E$ de dimension finie ont le même nombre d'éléments, appelé ***dimension de*** $E$ et noté $\dim E$.
Par convention, la dimension de $\{0_E\}$ est 0.

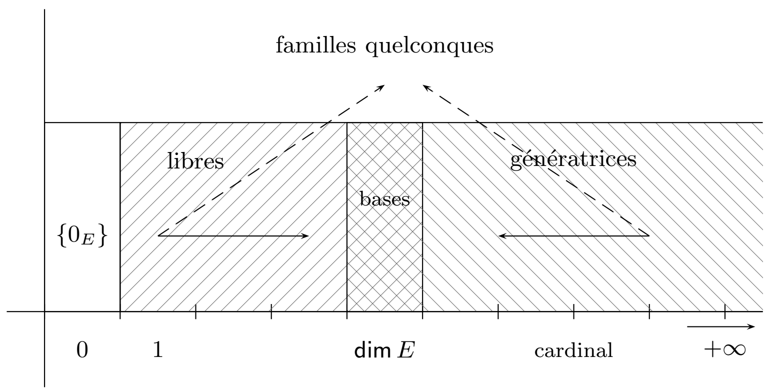


*Illustration du théorème de la dimension, et de la proposition suivante*

**Proposition 1.6.—** En ajoutant un élément $\vec{x}$ à une famille libre $L$, on obtient une famille libre si $\vec{x} \notin \mathrm{Vect}\,(L)$, et une famille liée si $\vec{x} \in \mathrm{Vect}\,(L)$.
En enlevant un élément $\vec{x}$ à une famille génératrice $G$, on obtient une famille non génératrice si $\vec{x} \notin \mathrm{Vect}\,(G \setminus \{\vec{x}\})$ et une famille génératrice si $\vec{x} \in \mathrm{Vect}\,(G \setminus \{\vec{x}\})$.

**Proposition 1.7.—** Si $\dim E = n$ et si $\mathcal{B}$ est une famille de $n$ vecteurs de $E$, alors il y a équivalence entre :
(1) $\mathcal{B}$ est une base de $E$ (2) $\mathcal{B}$ est une famille libre (3) $\mathcal{B}$ est une famille génératrice de $E$.

**Proposition 1.8.—** Tout sous-espace vectoriel $F$ d'un espace vectoriel de dimension finie $E$ est de dimension finie et $\dim F \leqslant \dim E$.
De plus, si $\dim F = \dim E$, alors $F = E$.

**Définition : Base adaptée à un sous-espace vectoriel —.** *Soit $F$ un sous-espace vectoriel de dimension $p$ du $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie $E$, une base de $E$ est* ***adaptée à*** *$F$ lorsque ses $p$ premiers vecteurs forment une base de $F$.*

**Proposition 1.9.— Coordonnées d'un vecteur dans une base —.** Soit $\mathcal{B} = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \cdots, \vec{e}_n)$ une base de $E$. Pour tout vecteur $\vec{x}$ de $E$, il existe un $n$-uplet unique $(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ de $\mathbb{K}^n$ tel que :

$$\boxed{\vec{x} = \sum_{i=1}^{n} x_i\, \vec{e}_i.}$$

$(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ est le ***$n$-uplet des coordonnées du vecteur $x$ dans la base $\mathcal{B}$.***

**Exemple :** Les coordonnées d'un polynôme de degré inférieur ou égal à $n$ dans la base canonique de $\mathbb{K}_n[X]$ sont ses coefficients.

**Définition : Rang d'une famille de vecteurs —.** *Le* ***rang d'une famille finie de vecteurs*** *est la dimension du sous-espace vectoriel qu'elle engendre.*

**Notation :** *Le rang de la famille $\mathcal{F}$ est noté* $\mathrm{Rg}\,(\mathcal{F})$.

## ■ Interpolation de Lagrange

Soit $n+1$ couples $(x_0, y_0), ..., (x_n, y_n)$ de $\mathbb{R}^2$ et on suppose que pour tout $i \in [\![0, n]\!]$, les réels $x_i$ sont **tous distincts**. Il s'agit de construire un polynôme $P$ de degré au plus $n$ tel que pour tout $i \in [\![0, n]\!]$, on ait l'égalité : $P(x_i) = y_i$.

**Définition :** *On appelle* **polynômes interpolateurs de Lagrange** *associés à la famille $(x_0, x_1, ..., x_n)$ les $n+1$ polynômes définis pour tout $i \in [\![0, n]\!]$ par :*

$$l_i = \prod_{k=0, k\neq i}^{n} \frac{X - x_k}{x_i - x_k}.$$

**Proposition 1.10.— Propriétés des polynômes interpolateurs de Lagrange**

- Pour tout $i \in [\![0, n]\!]$, $l_i$ est de degré $n$.
- Pour tout $i \in [\![0, n]\!]$ et pour tout $j \in [\![0, n]\!]$, $l_i(x_j) = \delta_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad j = i \\ 0 & \text{si} \quad j \neq i \end{cases}$
- La famille $(l_0, l_1, ..., l_n)$ est une famille libre de $\mathbb{K}_n[X]$ et en est donc une base.

On l'appelle **base d'interpolation de Lagrange** associée à $(x_0, x_1, ..., x_n)$.

Comme $(l_0, ...l_n)$ est une base de $\mathbb{K}_n[X]$, tout polynôme de $\mathbb{K}_n[X]$ s'exprime dans cette base et on a en particulier le résultat suivant.

**Proposition 1.11.—** Il existe un seul polynôme de degré au plus $n$ (donc dans $\mathbb{K}_n[X]$) qui vérifie pour tout $i \in [\![0, n]\!]$, $P(x_i) = y_i$. C'est le polynôme $P = \displaystyle\sum_{j=0}^{n} y_j l_j$.

En particulier, $1 = \displaystyle\sum_{j=0}^{n} l_j$ et $X = \displaystyle\sum_{j=0}^{n} x_j l_j$.

## ■ Produit d'un nombre fini d'espaces vectoriels

Soit $n \geqslant 2$ et pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, soit $E_i$, espace vectoriel sur $\mathbb{K}$.
Alors $E_1 \times ... \times E_n = \{(\vec{u}_1, ..., \vec{u}_n), \forall\, i \in [\![1, n]\!], \vec{u}_i \in E_i\}$ est appelé le produit de ces espaces vectoriels et est lui-même un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$. On définit :

$$\text{la somme : } (\vec{u}_1, ..., \vec{u}_n) + (\vec{v}_1, ..., \vec{v}_n) = (\vec{u}_1 + \vec{v}_1, ..., \vec{u}_n + \vec{v}_n),$$

$$\text{le produit par } \lambda \in \mathbb{K} : \lambda.(\vec{u}_1, ..., \vec{u}_n) = (\lambda\vec{u}_1, ..., \lambda\vec{u}_n).$$

**Proposition 1.12.—** Dans le cas où pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, $E_i$ est de dimension finie alors :

$$\boxed{\dim\ (E_1 \times ... \times E_n) = \sum_{i=1}^{n} \dim E_i.}$$

## ■ Somme et somme directe d'une famille finie de sous-espaces vectoriels

**Définition : Somme —.** *Soit $(E_i)_{i \in [\![1,n]\!]}$ une famille finie de sous-espaces vectoriels de $E$,* ***la somme de ces sous-espaces vectoriels*** *est le sous-espace vectoriel, noté $\sum_{i=1}^{n} E_i$, engendré par la réunion des $E_i$ :*

$$\boxed{\sum_{i=1}^{n} E_i = \text{Vect}\left(\bigcup_{i=1}^{n} E_i\right).}$$

L'appellation « somme de sous-espaces vectoriels » est justifiée par la caractérisation suivante.

**Proposition 1.13.—** $\sum_{i=1}^{n} E_i$ est l'ensemble des sommes de vecteurs des $E_i$, autrement dit :

$$\boxed{\sum_{i=1}^{n} E_i = \left\{\sum_{i=1}^{n} \vec{u}_i,\ \text{ où, } \forall\, i \in [\![1, n]\!],\ \vec{u}_i \in E_i\right\}.}$$

**Définition : Somme directe —.** ***La somme des sous-espaces vectoriels de la famille $(E_i)_{i \in [\![1,n]\!]}$ est directe*** *si :*

$$\boxed{\forall\, (\vec{u}_1, \vec{u}_2, \cdots, \vec{u}_n) \in E_1 \times E_2 \times \cdots \times E_n,\ \left(\sum_{i=1}^{n} \vec{u}_i = 0_E \Rightarrow \forall\, i \in [\![1, n]\!],\ \vec{u}_i = 0_E\right).}$$

*Dans ce cas*, on note la somme de ces sous-espaces vectoriels : $\bigoplus_{i=1}^{n} E_i$.

**Proposition 1.14.— Caractérisation d'une somme directe —.** La somme des sous-espaces vectoriels de la famille $(E_i)_{i\in[\![1,n]\!]}$ est directe si, et seulement si, tout $\vec{u}$ de $\sum_{i=1}^{n} E_i$ se décompose **de manière unique** sous la forme : $\vec{u} = \sum_{i=1}^{n} \vec{u}_i,$ où $(\vec{u}_i)_{i\in[\![1,n]\!]} \in E_1 \times E_2 \times \cdots \times E_n$.

**Définition : Décomposition en somme directe de $E$ —.**
*Les sous-espaces vectoriels $(E_i)_{i\in[\![1,n]\!]}$ de $E$ constituent une* ***décomposition en somme directe de*** *$E$ si leur somme est directe et égale à $E$, autrement dit, lorsque : $E = \bigoplus_{i=1}^{n} E_i$.*

**Proposition 1.15.—** $(E_i)_{i\in[\![1,n]\!]}$ constituent une décomposition en somme directe de $E$ si, et seulement si,

$$\boxed{\forall\, \vec{u} \in E,\ \exists\,!\,(\vec{u}_i)_{i\in[\![1,n]\!]} \in E_1 \times E_2 \times \cdots \times E_n \text{ tel que } \vec{u} = \sum_{i=1}^{n} \vec{u}_i.}$$

**Définition : Sous-espaces vectoriels supplémentaires de $E$ —.**
*On dit que les deux sous-espaces vectoriels $E_1$ et $E_2$ de $E$ sont* **supplémentaires** *dans $E$ s'ils constituent une décomposition en somme directe de $E$, c'est-à-dire $E = E_1 \oplus E_2$.*

On dit alors aussi que $E_1$ (respectivement $E_2$) est un supplémentaire de $E_2$ (respectivement $E_1$) dans $E$.

**Remarque :** Attention, on notera que l'on évitera d'utiliser le terme de sous-espaces vectoriels supplémentaires dans le cas d'une somme directe d'au moins trois sous-espaces vectoriels égale à l'espace vectoriel $E$.

**Proposition 1.16.— Existence d'un supplémentaire —.** Tout sous-espace vectoriel de dimension finie d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel admet un supplémentaire (qui n'est pas unique).

**Théorème-Définition 1.17.— Base adaptée à une décomposition en somme directe —.**
Soit $E$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie et $(E_i)_{i\in[\![1,n]\!]}$ une famille de $n$ sous-espaces vectoriels de $E$, de bases respectives $\mathcal{B}_i$, $1 \leqslant i \leqslant n$.

Si la somme des $(E_i)_{i\in[\![1,n]\!]}$ est directe, alors $\mathcal{B} = (\mathcal{B}_1, ..., \mathcal{B}_n)$ est une base de $\bigoplus_{i=1}^{n} E_i$.

Si les $E_i$, $1 \leqslant i \leqslant n$ forment une décomposition en somme directe de $E$, alors $\mathcal{B} = (\mathcal{B}_1, ..., \mathcal{B}_n)$ est une base de $E$ dite **base adaptée à la décomposition** $E = \bigoplus_{i=1}^{n} E_i$**.**

**Commentaire : Décomposition en somme directe obtenue par partition d'une base.**

Considérons une base $(\vec{e}_1, ..., \vec{e}_n)$ de $E$, espace vectoriel de dimension $n$ et si $i_1, ..., i_p$ sont $p$ entiers compris entre 1 et $n$, posons $E_1 = \text{Vect}\,(\vec{e}_1, ..., \vec{e}_{i_1})$, $E_2 = \text{Vect}\,(\vec{e}_{i_1+1}, ..., \vec{e}_{i_2})$, etc. jusqu'à $E_p = \text{Vect}\,\left(\vec{e}_{i_p}, ..., \vec{e}_n\right)$, alors $(\vec{e}_1, ..., \vec{e}_n)$ est une base adaptée à la décomposition $E = \bigoplus_{i=1}^{p} E_i$.

On dit que l'on a décomposé $E$ en somme directe par partition de la base $(\vec{e}_1, ..., \vec{e}_n)$.

**Corollaire 1.18.— Caractérisation d'une somme directe par les dimensions —.**
Les $(E_i)_{i\in[\![1,n]\!]}$ étant des sous-espaces vectoriels de dimension finie de $E$ :

$$\boxed{\dim\left(\sum_{i=1}^{n} E_i\right) \leqslant \sum_{i=1}^{n} \dim E_i}.$$

Et l'on a l'égalité si, et seulement si, la somme est directe.

**Corollaire 1.19.— Décomposition en somme directe de $E$ en dimension finie —.**
Les propositions suivantes sont équivalentes :

**(i)** $E = \bigoplus_{i=1}^{n} E_i$ ;

**(ii)** les $(E_i)_{i\in[\![1,n]\!]}$ sont en somme directe et $\dim E = \sum_{i=1}^{n} \dim E_i$ ;

**(iii)** $E = \sum_{i=1}^{n} E_i$ et $\dim E = \sum_{i=1}^{n} \dim E_i$.

**Corollaire 1.20.— Dimension de la somme de deux sous-espaces vectoriels —.**
Soit $F$ et $G$ deux sous-espaces vectoriels d'un espace vectoriel de dimension finie $E$ :

$$\boxed{\dim(F+G) = \dim F + \dim G - \dim\,(F\cap G)\,.}$$

## ■ Applications linéaires

**Définition :** *Soit $E$ et $F$ deux espaces vectoriels sur $\mathbb{K}$. Une application $\phi : E \to F$ est dite* **linéaire** *si pour tous vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ de $E$ et pour tout scalaire $a \in \mathbb{K}$,*

$$\phi(a\vec{u}+\vec{v}) = a\phi(\vec{u}) + \phi(\vec{v}).$$

*Lorsque $E = F$, on dit que $\phi$ est un* **endomorphisme***. Une application linéaire qui est une bijection est un* **isomorphisme***. Un endomorphisme bijectif est un* **automorphisme***.*

On note $\mathcal{L}(E,F)$ l'ensemble des applications linéaires de $E$ vers $F$. C'est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. Dans le cas $E = F$, on note $\mathcal{L}(E)$ cet ensemble.

Si $f \in \mathcal{L}(E,F)$ et $g \in \mathcal{L}(F,G)$ alors $g\,o\,f \in \mathcal{L}(E,G)$.
Si $f$ est un isomorphisme de $E$ dans $F$ alors $f^{-1}$ est un isomorphisme de $F$ vers $E$.
L'ensemble des automorphismes de $E$ est appelé le **groupe linéaire**. On le note $\mathrm{GL}(E)$.

**Proposition 1.21.— Détermination d'une application linéaire en dimension finie —.**
Étant donné deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels $E$ et $F$, une base $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \cdots, \vec{e}_p)$ de $E$ et une famille $(\vec{f}_1, \vec{f}_2, \cdots, \vec{f}_p)$ de vecteurs de $F$, il existe une application linéaire $\phi$, et une seule, de $E$ dans $F$, telle que :

$$\forall\, i \in [\![1,p]\!],\ \phi(\vec{e}_i) = \vec{f}_i.$$

**Définition : Espaces vectoriels isomorphes —.** *Deux espaces vectoriels sont* ***isomorphes*** *s'il existe un isomorphisme de l'un dans l'autre.*

**Proposition 1.22.—** L'image d'une base (respectivement d'une famille libre) par un isomorphisme est une base (respectivement une famille libre).

**Proposition 1.23.— Conservation du rang par un isomorphisme —.** L'image par un isomorphisme d'une famille de vecteurs est une famille de vecteurs de même rang.

**Remarque :** Une base de $E$ étant choisie, l'application associant à un vecteur le $n$-uplet de $\mathbb{K}^n$ de ses coordonnées dans cette base est un isomorphisme ; en conséquence, le rang d'une famille de vecteurs est égal au rang de la famille des $n$-uplets de ses coordonnées dans $\mathbb{K}^n$.

**Proposition 1.24.—** Deux espaces vectoriels $E$ et $F$ (sur le même ensemble $\mathbb{K}$) de dimensions finies sont isomorphes si, et seulement si, leurs dimensions sont égales.

**Conséquence :** Tout $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension $n$ est isomorphe à $\mathbb{K}^n$.

**Théorème-Définition 1.25.— Noyau d'une application linéaire —.** $\phi$ étant une application linéaire d'un espace vectoriel $E$ dans un espace vectoriel $F$, l'ensemble $\{\vec{x} \in E,\ \phi(\vec{x}) = 0_F\}$ est un sous-espace vectoriel de $E$ appelé ***noyau de*** $\phi$ et noté $\mathsf{Ker}\,\phi$.

**Théorème-Définition 1.26.— Image d'une application linéaire —.** $\phi$ étant une application linéaire d'un espace vectoriel $E$ dans un espace vectoriel $F$, l'ensemble $\{\phi(\vec{x}),\ \vec{x} \in E\}$ est un sous-espace vectoriel de $F$ appelé ***image*** de $\phi$ et noté $\mathsf{Im}\,\phi$.

**Définition : Rang d'une application linéaire —.** *Dans le cas où* $\mathsf{Im}\,\phi$ *est de dimension finie, le* ***rang de l'application linéaire*** $\phi$ *est la dimension de son image, c'est-à-dire* $\dim \mathsf{Im}\,\phi$.

**Proposition 1.27.—** $E$ étant un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie dont $\mathcal{B} = (e_i)_{i\in[\![1,n]\!]}$ est une base et $\phi$ étant une application linéaire de $E$ dans un $\mathbb{K}$-espace vectoriel $F$ :

$$\boxed{\mathsf{Im}\,\phi = \mathsf{Vect}\ (\phi(e_i))_{i\in[\![1,n]\!]} \text{ et } \mathsf{Rg}\,\phi = \mathsf{Rg}\ (\phi(e_i))_{i\in[\![1,n]\!]}\,.}$$

**Proposition 1.28.—** Soit $\phi \in \mathcal{L}(E,F)$, si $S$ est un supplémentaire quelconque de $\mathsf{Ker}\,\phi$ dans $E$, alors $\phi$ induit un isomorphisme de $S$ sur $\mathsf{Im}\,\phi$.

**Remarque :** Ce résultat ne nécessite pas que $E$ soit de dimension finie, mais seulement que $\mathsf{Ker}\,\phi$ admette un supplémentaire.

**Proposition 1.29.— Théorème du rang —.** $\phi$ étant une application linéaire entre deux espaces vectoriels $E$ et $F$, l'espace vectoriel $E$ étant de dimension finie alors :

$$\boxed{\dim \mathsf{Im}\,\phi + \dim \mathsf{Ker}\,\phi = \dim E.}$$

**Corollaire 1.30.—** $\phi$ étant une application linéaire entre deux espaces vectoriels de dimensions finies $E$ et $F$, $\phi$ est un isomorphisme de $E$ dans $F$ si, et seulement si, $\mathsf{Rg}\,\phi = \dim E = \dim F$.

**Corollaire 1.31.—** Soit $E$ et $F$ deux espaces vectoriels de dimensions finies et $\phi$ un élément de $\mathcal{L}(E,F)$, lorsque : $\dim E = \dim F$, les propriétés suivantes sont équivalentes :
(1) $\phi$ est bijective (2) $\phi$ est injective (3) $\phi$ est surjective

**Corollaire 1.32.—** Soit $E$, $F$ et $G$ trois espaces vectoriels de dimensions finies, $\phi \in \mathcal{L}(E,F)$ et $\psi \in \mathcal{L}(F,G)$ :
▶ si $\phi$ est un isomorphisme, alors $\mathsf{Rg}\,(\psi \circ \phi) = \mathsf{Rg}\,\psi$ ;
▶ si $\psi$ est un isomorphisme, alors $\mathsf{Rg}\,(\psi \circ \phi) = \mathsf{Rg}\,\phi$.
Autrement dit, on ne change pas le rang d'une application linéaire si on la compose par un isomorphisme.

## ■ Sous-espaces stables

**Définition : Sous-espaces stables par un endomorphisme —.** *Soit $E$ un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$, et $\phi \in \mathcal{L}(E)$ ; on dit qu'un sous-espace vectoriel $F$ de $E$ est* ***stable*** *par $\phi$ lorsque $\phi(F) \subset F$.*

En particulier, $E$ et $\{0_E\}$ sont stables par tout endomorphisme de $E$.

**Proposition 1.33.—** Soit $\phi$ et $\psi$ deux endomorphismes de $\mathcal{L}(E)$ qui vérifient : $\phi \circ \psi = \psi \circ \phi$.
(On dit que $\phi$ et $\psi$ *commutent.*)
Alors $\mathsf{Im}\,\phi$ et $\mathsf{Ker}\,\phi$ (respectivement $\mathsf{Im}\,\psi$ et $\mathsf{Ker}\,\psi$) sont stables par $\psi$ (respectivement par $\phi$).

**Définition :** *Soit $F$ un sous-espace de $E$ stable par $\phi \in \mathcal{L}(E)$, alors* $\hat{\phi} : \begin{array}{ccc} F & \longmapsto & F \\ \vec{u} & \longrightarrow & \phi(\vec{u}) = \hat{\phi}(\vec{u}) \end{array}$ *définit un endomorphisme de $F$, dit* ***endomorphisme de $F$ induit par*** *$\phi$.*

## ■ Polynômes d'endomorphismes

**Définition :** *Soit $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k \in \mathbb{K}[X]$ et $\phi$ un endomorphisme de l'espace vectoriel $E$.*
*On pose $\phi^0 = \mathrm{Id}_E$, puis, par récurrence, pour tout entier naturel $n$, $\phi^{n+1} = \phi^n \circ \phi$.*
*L'endomorphisme $P(\phi) = \sum_{k=0}^{n} a_k \phi^k$ est le polynôme de l'endomorphisme $\phi$ associé à $P$.*

**Proposition 1.34.—** Le noyau de $P(\phi)$ est stable par $\phi$.

**Proposition 1.35.—** ▶ $\forall \phi \in \mathcal{L}(E)$, $\forall (P,Q) \in \mathbb{K}[X]^2$, $\forall \lambda \in \mathbb{K}$, $(P + \lambda\, Q)(\phi) = P(\phi) + \lambda\, Q(\phi)$.
▶ $\forall \phi \in \mathcal{L}(E)$, $\forall (P,Q) \in \mathbb{K}[X]^2$, $(PQ)(\phi) = P(\phi)\, o\, Q(\phi)$.

**Remarques : 1.** Si pour tout endomorphisme $\phi \in \mathcal{L}(E)$ fixé, on pose :
$$f_\phi : \mathbb{K}[X] \to \mathcal{L}(E),\ P \mapsto P(\phi),$$

la **proposition 1.35** s'écrit :
$\forall (P,Q) \in \mathbb{K}[X]^2$, $\forall \lambda \in \mathbb{K}$, $f_\phi(P + \lambda Q) = f_\phi(P) + \lambda f_\phi(Q)$ ;
$\forall (P,Q) \in \mathbb{K}[X]^2$, $f_\phi(PQ) = f_\phi(P)\, o\, f_\phi(Q)$.