PT
PT*

Olivier Leuck
Michel Goumi
Ivan Gozard
Bertrand Hauchecorne

PRÉPAS SCIENCES

COLLECTION DIRIGÉE PAR **BERTRAND HAUCHECORNE**

MATHS

4e édition

- Objectifs
- Cours résumé
- Méthodes
- Vrai/faux, erreurs classiques
- Exercices de base et d'approfondissement
- Sujets de concours (écrits, oraux)
- Corrigés détaillés et commentés

NOUVEAUX PROGRAMMES

ellipses

Résumé de cours

On désigne par $\mathbb{K}$ l'ensemble $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Produit d'espaces vectoriels

Définition : *Soit E et F deux espaces vectoriels sur $\mathbb{K}$. On appelle **produit** des espaces E et F, l'ensemble des couples (x,y) où x est un vecteur de E et y un vecteur F ; on le note $E \times F$:*

$$E \times F = \big\{(x,y) \mid x \in E,\ y \in F\big\}.$$

Proposition 1.1 — Soit E et F deux espaces vectoriels sur $\mathbb{K}$.

- Le produit $E \times F$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.
- Si E et F sont de dimension finie, alors $E \times F$ est de dimension finie et on a :

$$\boxed{\dim\big(E \times F\big) = \dim(E) + \dim(F)}$$

Commentaires ▹ L'addition et la loi externe sont induites par les lois de E et de F :

$$(x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2) \quad \text{et} \quad \lambda(x_1, y_1) = (\lambda x_1, \lambda y_1).$$

Si $(e_1, \ldots, e_n)$ est une base de E et si $(f_1, \ldots, f_p)$ est une base de F, alors la famille

$$\big((e_1, 0), \ldots, (e_n, 0), (0, f_1), \ldots, (0, f_p)\big)$$

est une base de $E \times F$.
▹ La définition précédente se généralise ; il est possible de définir le produit d'un nombre fini d'espaces vectoriels.

Définition : *Soit $n \geqslant 2$ un entier et soit $E_1, \ldots, E_n$ des espaces vectoriels sur $\mathbb{K}$. On appelle **produit** des espaces E_i, l'ensemble des n-uplets $(x_1, \ldots, x_n)$ où pour tout $i \in [\![1,n]\!]$, x_i est un vecteur de E_i ; on le note $E_1 \times \cdots \times E_n$.*

Proposition 1.2 — Soit $n \geqslant 2$ un entier et soit $E_1, \ldots, E_n$ des espaces vectoriels sur $\mathbb{K}$.

- Le produit $E_1 \times \cdots \times E_n$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.
- Si pour tout $i \in [\![1,n]\!]$, E_i est de dimension finie, alors $E_1 \times \cdots \times E_n$ est de dimension finie et on a :

$$\dim\big(E_1 \times \cdots \times E_n\big) = \sum_{i=1}^{n} \dim(E_i).$$

Commentaires ▹ L'addition et la loi externe sont, comme pour le cas d'un produit de deux espaces vectoriels, induites par les lois de $E_1, \ldots, E_n$.
▹ En dimension finie, à partir d'une base de chaque espace E_i, on construit comme précédemment, une base de $E_1 \times \cdots \times E_n$.

■ Somme d'un nombre fini de sous-espaces vectoriels

Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$.

Définition : *Soit m un entier non nul et $F_1, \dots, F_m$ des sous-espaces vectoriels de E. On appelle* ***somme*** *des sous-espaces vectoriels F_i, l'ensemble des vecteurs s'écrivant $f_1 + f_2 + \dots + f_m$ où pour tout $i \in [\![1, m]\!]$, f_i est un vecteur de F_i. On le note $F_1 + F_2 + \dots + F_m$:*

$$F_1 + \dots + F_m = \{f_1 + \dots + f_m \mid (f_1, \cdots, f_m) \in F_1 \times \dots \times F_m\}.$$

Commentaire ▹ La somme d'un nombre fini de sous-espaces vectoriels de E est un sous-espace vectoriel de E ; en effet on peut montrer qu'un tel ensemble est non vide et stable par combinaison linéaire.

Définition : *Soit m un entier non nul et $F_1, \dots, F_m$ des sous-espaces vectoriels de E. On dit que la somme $F_1 + \dots + F_m$ est* ***directe*** *si pour tout vecteur $x \in F_1 + \dots + F_m$, il existe un unique m-uplet $(f_1, \dots, f_m) \in F_1 \times \dots \times F_m$ tel que : $x = f_1 + \dots + f_m$. On note alors :*

$$F_1 + \dots + F_n = F_1 \oplus F_2 \oplus \dots \oplus F_m.$$

Proposition 1.3 — Soit m un entier non nul et $F_1, \dots, F_m$ des sous-espaces vectoriels de E. Les propositions suivantes sont équivalentes :

(i) la somme $F_1 + \dots + F_n$ est directe ;

(ii) les hypothèses $f_1 \in F_1$, $f_2 \in F_2, \dots, f_m \in F_m$ et $f_1 + f_2 + \dots + f_m = 0$ impliquent

$$f_1 = f_2 = \dots = f_m = 0.$$

Commentaire ▹ Puisque $F_1 + \dots + F_m$ est un sous-espace vectoriel de E, il contient le vecteur nul ; celui-ci peut donc s'écrire sous la forme $0 = f_1 + \dots + f_m$ où pour tout $i \in [\![1, m]\!]$, $f_i \in F_i$. Chaque F_i étant un sous-espace vectoriel de E, il contient également le vecteur nul ; ce qui donne une nouvelle décomposition du vecteur nul : $0 = 0 + \cdots 0$. Sans autre hypothèse sur la somme $F_1 + \dots + F_m$, il se peut que le vecteur nul possède plusieurs décompositions. La proposition 1.3 affirme que la somme $F_1 + \dots + F_n$ est directe si et seulement le vecteur nul admet une unique décomposition donnée par $0 = 0 + \dots + 0$.

■ Décomposition en somme directe

Définition : *Soit m un entier non nul et $F_1, \dots, F_m$ des sous-espaces vectoriels de E. On dit que E est* ***somme directe*** *de $F_1, \dots, F_m$ lorsque :*

$$E = F_1 \oplus F_2 \oplus \dots \oplus F_m.$$

Commentaires ▹ Lorsque E est somme directe de $F_1, \dots, F_m$, la somme de $F_1, \dots, F_m$ est directe et égale à E.
▹ Dans le cas où $m = 2$, dire que E est somme directe de F_1 et F_2 est équivalent à dire que F_1 et F_2 sont ***supplémentaires*** dans E.

Des résultats précédents, on déduit les caractérisations suivantes.

Proposition 1.4 — Soit m un entier non nul et $F_1, \ldots, F_m$ des sous-espaces vectoriels de E. Les propriétés suivantes sont équivalentes :

(i) E est somme directe de $F_1, \ldots, F_m$;

(ii) pour tout vecteur $x \in E$, il existe un unique m-uplet $(f_1, \ldots, f_m) \in F_1 \times \cdots \times F_m$ tel que : $x = f_1 + \cdots + f_m$;

(iii) $E = F_1 + F_2 + \cdots + F_m$ et les hypothèses $f_1 \in F_1$, $f_2 \in F_2, \ldots, f_m \in F_m$, $f_1 + f_2 + \ldots + f_m = 0$ impliquent $f_1 = f_2 = \ldots = f_m = 0$.

■ Base adaptée à une décomposition en somme directe

On suppose que E est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie.

Proposition 1.5 — Soit m un entier non nul et $F_1, \ldots, F_m$ des sous-espaces vectoriels de E. Les propriétés suivantes sont équivalentes :

(i) E est somme directe de $F_1, \ldots, F_m$;

(ii) la concaténation d'une base de F_1, d'une base de F_2, ... , d'une base de F_m est une base de E.

Dans ce cas, on a :

$$\boxed{\dim(E) = \dim\big(F_1 \oplus F_2 \oplus \cdots \oplus F_m\big) = \sum_{i=1}^{m} \dim(F_i)}.$$

Remarque : Par exemple, la concaténation de la famille $(e_1, \ldots, e_r)$ et de la famille $(f_1, \ldots, f_p)$ est la famille $(e_1 \ldots, e_r, f_1, \ldots, f_p)$.

Définition : *On appelle* ***base adaptée à la décomposition en somme directe*** $E = \bigoplus_{i=1}^{m} F_i$ *toute base obtenue comme concaténation de bases de chaque sous-espace vectoriel* F_i.

■ Caractérisation des supplémentaires en dimension finie, rappel de PTSI

Théorème 1.6 — Soit F et G deux sous-espaces vectoriels d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E de dimension finie. Les propositions suivantes sont équivalentes :

(i) F et G sont supplémentaires dans E ;

(ii) $E = F + G$ et $\dim(E) = \dim(F) + \dim(G)$;

(iii) $F \cap G = \{0_E\}$ et $\dim(E) = \dim(F) + \dim(G)$;

(iv) la concaténation d'une base F et d'une base de G est une base de E.

■ Hyperplan d'un espace vectoriel de dimension finie

On suppose que E est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie, $\dim(E) \geqslant 2$.

Définition : *On appelle* ***hyperplan*** *de E tout sous-espace vectoriel de E admettant une droite comme supplémentaire.*

Proposition 1.7 — Soit F un sous-espace vectoriel de E. Les propositions suivantes sont équivalentes :

(i) F est un hyperplan de E ;

(ii) $\dim(F) = \dim(E) - 1$.

■ Équation d'un hyperplan

Théorème 1.8 — Soit F un sous-espace vectoriel de E et $\mathscr{B}$ une base de E. Les propriétés suivantes sont équivalentes :

(i) F est un hyperplan de E ;

(ii) il existe des scalaires $a_1, \ldots, a_n$ non tous nuls tels que pour tout $x \in E$:

$$x \in F \qquad \Longleftrightarrow \qquad a_1 x_1 + \cdots + a_n x_n = 0 \,;$$

égalité dans laquelle $x_1, \ldots, x_n$ sont les coordonnées de x dans $\mathscr{B}$.

Commentaire ▹ Les hyperplans de $\mathbb{K}^2$ sont les droites vectorielles. Un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}^2$ est une droite vectorielle si et seulement s'il admet une équation du type $ax + by = 0$, où $(a, b) \in \mathbb{K}^2 \setminus \{(0,0)\}$.

Théorème 1.9 — Soit $\mathscr{B}$ une base de E et deux familles de scalaires non tous nuls, $(a_1, \ldots, a_n)$ et $(b_1, \ldots, b_n)$, telles que pour tout $x \in E$ de coordonnées $(x_1, \ldots, x_n)$ dans $\mathscr{B}$, on ait :

$$a_1 x_1 + \cdots + a_n x_n = 0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad b_1 x_1 + \cdots + b_n x_n = 0.$$

Il existe alors un scalaire λ tel que :

$$\forall i \in [\![1, n]\!], \qquad b_i = \lambda a_i.$$

Commentaire ▹ Fixons $\mathscr{B}$ une base de E et soit F un hyperplan de E. D'après le théorème 1.8, il existe une famille non nulle de scalaires $(a_1, \ldots, a_n)$ telle que pour tout $x \in E$ de coordonnées $(x_1, \ldots, x_n)$ dans $\mathscr{B}$:

$$x \in F \qquad \Longleftrightarrow \qquad a_1 x_1 + \cdots + a_n x_n = 0.$$

D'après le théorème 1.9, ces scalaires sont définis à une constante multiplicative près.
On dit que $a_1 x_1 + \cdots + a_n x_n = 0$ est une ***équation de l'hyperplan F dans la base $\mathscr{B}$***.

■ Équations d'un sous-espace vectoriel

Théorème 1.10 — Soit $p \in [\![1, n]\!]$.

- L'intersection de p hyperplans de E est de dimension au moins $n - p$.
- Tout sous-espace vectoriel de E de dimension $n - p$ est l'intersection de p hyperplans de E.

Commentaire ▹ Toute droite vectorielle de $\mathbb{K}^3$ est intersection de deux plans vectoriels. Elle est définie par un système d'équations du type

$$\begin{cases} ax+by+cz=0 \\ \alpha x+\beta y+\gamma z=0 \end{cases}$$

où (a,b,c) et (α,β,γ) sont des éléments de $\mathbb{K}^3$ non proportionnels.

■ Sous-espace stable

Définition : *Soit g un endomorphisme de E, et F un sous-espace vectoriel de E. On dit que F est* ***stable*** *par g si pour tout vecteur x de F, le vecteur $g(x)$ appartient à F.*

Commentaire ▷ Le sous-espace vectoriel F est stable par g si et seulement si $g(F)\subset F$.

Proposition 1.11 — Soit g un endomorphisme de E, F un sous-espace vectoriel de E et $(e_1,\dots,e_p)$ une base de F. Les propositions suivantes sont équivalentes :

(i) F est stable par g ;

(ii) pour tout $i\in[\![1,p]\!]$, $\quad g(e_i)\in F$.

Définition : *Soit g un endomorphisme de E, et F un sous-espace vectoriel de E stable g. L'application*

$$f: \begin{array}{ccc} F & \longrightarrow & F \\ x & \longmapsto & g(x) \end{array}$$

est ***l'endomorphisme induit par g sur*** *F.*

Commentaire ▷ Puisque F est stable par g, l'application f est bien à valeurs dans F, elle est linéaire car g l'est : c'est un endomorphisme de F et on a :

$$\ker(f)=\ker(g)\cap F \quad \text{et} \quad \mathrm{Im}(f)=g(F).$$

Théorème 1.12 (caractérisation matricielle) **—** Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n, F un sous-espace vectoriel de dimension p et g un endomorphisme de E. Les propositions suivantes sont équivalentes :

(i) F est stable par g ;

(ii) pour tout supplémentaire G de F dans E, la matrice de g dans toute base $\mathscr{B}$ adaptée à la décomposition $E=F\oplus G$ est de la forme :

$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(g)=\begin{pmatrix} A & B \\ 0 & C \end{pmatrix}$$

où $A\in\mathscr{M}_p(\mathbb{K})$, $B\in\mathscr{M}_{p,n-p}(\mathbb{K})$ et $C\in\mathscr{M}_{n-p}(\mathbb{K})$.

Commentaire ▷ Un telle base $\mathscr{B}$ s'obtient par concaténation d'une base $\mathscr{C}$ de F et d'une base de G. La matrice A est la matrice dans la base $\mathscr{C}$ de l'endomorphisme induit par g sur F.

■ Trace d'une matrice carrée, d'un endomorphisme

Définition : *On appelle* ***trace*** *d'une matrice A de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ la somme des coefficients diagonaux de cette matrice. Elle est notée $\mathrm{Tr}(A)$.*

Proposition 1.13 — L'application trace définie par

$$\begin{array}{rccc} \mathrm{Tr}: & \mathscr{M}_n(\mathbb{K}) & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ & A & \longmapsto & \mathrm{Tr}(A) \end{array}$$

est linéaire.

Proposition 1.14 — Soit n et p deux entiers non nuls et soit $A \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, $B \in \mathscr{M}_{p,n}(\mathbb{K})$. On a :

$$\boxed{\mathrm{Tr}(AB) = \mathrm{Tr}(BA)}$$

Corollaire 1.15 — Deux matrices semblables de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ ont même trace.

Définition : *Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie et soit g un endomorphisme de E. On appelle **trace** de g la trace d'une matrice représentant g dans une base de E. On la note* $\mathrm{Tr}(g)$.

Commentaire ▷ Deux matrices semblables ayant même trace, la définition précédente est bien cohérente. En effet, le choix d'une base de E n'intervient pas dans la valeur de la trace de l'endomorphisme g.

Méthodes

Comment établir qu'un ensemble F est un sous-espace vectoriel d'un espace vectoriel E (rappel PTSI)

> **Méthode 1.1** — ▸ On vérifie que F est contenu dans E ; puis qu'il est non vide et stable par combinaison linéaire.
>
> ▸ *Autre possibilité lorsque F est décrit en extension* : on détermine des vecteurs $x_1, \dots, x_n$ de E tels que $F = \mathrm{Vect}(x_1, \dots, x_n)$.

Mise en œuvre : exercice 1.7, **exercice 1.8** et **exercice 1.9**.

Exemple 1.1 – *Justifier que* $F = \left\{ \begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & a & b \\ 0 & c & d \end{pmatrix}, (\alpha, a, b, c, d) \in \mathbb{R}^5 \right\}$ *est un* $\mathbb{R}$*-espace vectoriel.*

On constate que $F \subset \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ et :

$$F = \mathrm{Vect}(E_{11}, E_{22}, E_{23}, E_{32}, E_{33}).$$

On en déduit que F est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$; c'est en particulier un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.

Comment reconnaître un hyperplan H d'un espace vectoriel E

> **Méthode 1.2** — ▸ On vérifie que relativement à une base, l'ensemble H est défini par une seule équation du type $a_1x_1 + \cdots a_nx_n = 0$, avec $(a_1, \dots, a_n) \neq 0$.
>
> ▸ On calcule la dimension de H et on montre que $\dim(H) = \dim(E) - 1$.

Mise en œuvre : exercice 1.8 et **exercice 1.11**.

Exemple 1.2 – *On pose* $u = (1, 2, 3)$, $v = (4, 5, 6)$ *et* $w = (5, 7, 9)$. *Justifier que* $F = \mathrm{Vect}(u, v, w)$ *est un hyperplan de* $\mathbb{R}^3$.

On constate que $u + v = w$ et par conséquent $F = \mathrm{Vect}(u, v)$. D'autre part, les vecteurs u et v ne sont pas proportionnels, donc la famille (u, v) est libre. Puisqu'elle engendre F, c'est une base de F et $\dim(F) = 2$. L'ensemble F est un hyperplan de $\mathbb{R}^3$.

■ Comment montrer qu'une famille $\mathscr{B}$ est une base du $\mathbb{K}$-espace vectoriel E

❑ **Méthode 1.3 —** ▶ On utilise la définition : on montre que $\mathscr{B}$ est libre et génératrice dans E.

▶ Si $\dim(E) = n$ et si $\mathscr{B}$ est de cardinal n, il suffit de montrer que $\mathscr{B}$ est libre (respectivement génératrice).

▶ On peut montrer que $\mathscr{B}$ est une base adaptée à une décomposition en somme directe de E.

▶ On peut aussi montrer que $\mathscr{B}$ est l'image d'une base d'un espace vectoriel F par un isomorphisme de F dans E.

Mise en œuvre : exercice 1.3, **exercice 1.5**, **exercice 1.10** et **exercice 1.17**.

Exemple 1.3 – *Soit E le sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ constitué des matrices diagonales.*

1. *Déterminer la dimension de E.*

2. *Soit $A = \operatorname{diag}(1, 2, \ldots, n)$. Montrer que la famille $(I_n, A, A^2, \ldots, A^{n-1})$ est une base de E.*

1. On a $E = \left\{ \operatorname{diag}(a_1, \ldots, a_n) \mid (a_1, \ldots a_n) \in \mathbb{R}^n \right\} = \operatorname{Vect}(E_{11}, \ldots, E_{nn})$.
La famille $(E_{ii})_{i \in [\![1,n]\!]}$ est une famille génératrice de E, elle est libre car c'est une sous-famille de la base canonique de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. Ainsi cette famille est une base de E, elle est de cardinal n donc $\dim(E) = n$.
2. Soit $i \in [\![1, n]\!]$, on a :

$$A^i = \operatorname{diag}(1, 2^i, \ldots, n^i) \in E.$$

Puisque la famille $(I_n, A, A^2, \ldots, A^{n-1})$ est de cardinal n, il suffit de justifier qu'elle est libre pour établir qu'elle forme une base de E. Soit $\lambda_0, \ldots, \lambda_{n-1}$ des réels tels que :

$$\lambda_0 I_n + \lambda_1 A + \cdots + \lambda_{n-1} A^{n-1} = 0. \qquad (*)$$

On en déduit alors que pour tout $k \in [\![1, n]\!]$:

$$\lambda_0 + \lambda_1 k + \cdots + \lambda_{n-1} k^{n-1} = 0.$$

On pose $P = \lambda_0 + \lambda_1 X + \cdots + \lambda_{n-1} X^{n-1}$, P est un polynôme de $\mathbb{R}_{n-1}[X]$ vérifiant d'après la relation précédente :

$$\forall k \in [\![1, n]\!], \qquad P(k) = 0.$$

Le polynôme P possède alors n racines distinctes ; étant de degré inférieur ou égal à $n - 1$, il est nul. Tous les λ_i sont donc nuls et la famille $(I_n, A, \cdots, A^{n-1})$ est libre.
▷ Finalement la famille $(I_n, A, \cdots, A^{n-1})$ est une base de E.