BCPST

2e année

Mayeul Bacquelin

PRÉPAS SCIENCES

COLLECTION DIRIGÉE PAR **BERTRAND HAUCHECORNE**

MATHS

NOUVEAUX PROGRAMMES !

- Objectifs
- Cours résumé
- Méthodes
- Vrai/faux, erreurs classiques
- Exercices de base et d'approfondissement
- Sujets de concours (écrits, oraux)
- Corrigés détaillés et commentés

ellipses

Chapitre 1

Révisions d'analyse

UN MATHÉMATICIEN

C'est alors qu'il est écrivain public que **Michel Rolle** (1652-1719) entame des études de mathématiques en autodidacte. Il résout alors un difficile problème ouvert posé par le mathématicien Jacques Ozanam ; Colbert le récompense par une pension ce qui lui permet de se concentrer sur la recherche mathématique. Il s'est opposé violemment à l'introduction du calcul différentiel et, ironie de l'histoire, son nom est attaché à un théorème concernant ce domaine des mathématiques.

Un peu d'histoire

Dès 1635, le mathématicien italien Bonaventura Cavalieri remarque « qu'en au moins un des points d'un arc de courbe usuel, la tangente à l'arc est parallèle à la corde joignant les extrémités de l'arc ». En 1691, Michel Rolle publie un ouvrage intitulé *La méthode des Cascades Algébriques* (qui) n'est autre chose qu'une méthode générale pour extraire les racines. Il montre qu'entre deux racines d'un polynôme, le polynôme dérivé s'annule lui aussi. Il réitère le procédé d'où le nom de cascade.

Dans un livre publié en 1797 sous le titre *Théorie des fonctions analytiques*, contenant les principes du calcul différentiel Joseph Louis Lagrange se penche sur la formule de Taylor et en donne un reste dépendant « d'une quantité inconnue, mais renfermée entre les limites » de l'intervalle d'étude. En cas particulier, il démontre ainsi le théorème des accroissements finis.

Objectifs

les incontournables

- Savoir exploiter l'égalité entre deux complexes (écrit sous forme algébrique ou trigonométrique).
- Savoir résoudre des équations trigonométriques, notamment celles avec $A\cos(\theta) + B\sin(\theta)$.
- Savoir linéariser des produits de cos et sin. Savoir factoriser des sommes de cos ou sin.
- Savoir calculer des limites et lever des formes indéterminées.
- Savoir mener l'étude d'une fonction.
- Maîtriser le théorème de Rolle et le théorème des accroissements finis.
- Savoir expliciter un développement limité en 0 d'une fonction à partir des développements limités des fonctions usuelles en 0 et par somme, produit ou primitivation.
- Savoir calculer une dérivée partielle et en déduire les points critiques.

et plus si affinités

- Avoir quelques notions sur les racines n-ièmes de l'unité.
- Savoir trouver les extrema d'une fonction de plusieurs variables.

Résumé de cours

Retour sur les complexes et la trigonométrie

Théorème-Définition 1.1.— Écriture algébrique et trigonométrique —. Si x, y, a et b sont quatre réels alors :

$$a + ib = x + iy \Leftrightarrow a = x \quad \text{et} \quad b = y.$$

Si r et r' sont deux réels strictement positifs et θ et θ' deux réels, on a :

$$re^{i\theta} = r'e^{i\theta'} \Leftrightarrow r = r' \text{ et } \exists k \in \mathbb{Z} \text{ tel que } \theta = \theta' + 2k\pi.$$

Proposition 1.2.— Inégalité triangulaire —. Soit z et z' deux complexes, on a :

$$|z + z'| \leq |z| + |z'|, \quad \text{et} \quad (|z + z'| = |z| + |z'|) \Longleftrightarrow \left(z = 0 \text{ ou } \left(z \neq 0 \text{ et } \frac{z'}{z} \in \mathbb{R}_+^\star\right)\right).$$

Proposition 1.3.— Formules d'Euler —. Pour tout réel θ, on a :

$$\cos(\theta) = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2} \text{ et } \sin(\theta) = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}.$$

Proposition 1.4.— Soit a un réel non nul et b et c deux réels. On pose $\Delta = b^2 - 4ac$ puis :

$$\delta = \begin{cases} \sqrt{\Delta} & \text{si } \Delta \geq 0 \\ i\sqrt{-\Delta} & \text{si } \Delta < 0 \end{cases}$$

Pour tout complexe z, on a alors :

$$az^2 + bz + c = 0 \Longleftrightarrow z = z_1 \quad \text{ou} \quad z_2 \text{ avec : } z_1 = \frac{-b + \delta}{2a} \quad \text{et} \quad z_2 = \frac{-b - \delta}{2a}.$$

On a alors : $z_1 + z_2 = -\dfrac{b}{a}$ et $z_1 \times z_2 = \dfrac{c}{a}$ (relations coefficients-racines).

Proposition 1.5.— Soit θ et ϕ des réels, on a : $\sin^2(\theta) + \cos^2(\theta) = 1$ et $1 + \tan^2(\theta) = \dfrac{1}{\cos^2(\theta)}$ ainsi que :

$$\begin{aligned} \cos(\theta + \phi) &= \cos(\theta)\cos(\phi) - \sin(\theta)\sin(\phi) \\ \sin(\theta + \phi) &= \sin(\theta)\cos(\phi) + \sin(\phi)\cos(\theta) \\ \tan(\theta + \phi) &= \frac{\tan(\theta) + \tan(\phi)}{1 - \tan(\theta)\tan(\phi)} \end{aligned}$$

Les formules avec tan étant énoncées sous réserve d'existence.

Proposition 1.6.— Pour tout réel θ, on a : $\sin(2\theta) = 2\sin(\theta)\cos(\theta)$ et :

$$\cos(2\theta) = \cos^2(\theta) - \sin^2(\theta) = 2\cos^2(\theta) - 1 = 1 - 2\sin^2(\theta).$$

Proposition 1.7.— Soit θ et ϕ des réels, on a :

$$\begin{aligned} \cos(\theta) = \cos(\phi) &\Leftrightarrow \theta \equiv \phi[2\pi] \text{ ou } \theta \equiv -\phi[2\pi] \\ \sin(\theta) = \sin(\phi) &\Leftrightarrow \theta \equiv \phi[2\pi] \text{ ou } \theta \equiv \pi - \phi[2\pi] \\ \tan(\theta) = \tan(\phi) &\Leftrightarrow \theta = \phi[\pi] \end{aligned}$$

Proposition 1.8.— Soit A et B deux réels. Il existe $(r, \phi) \in \mathbb{R}^2$ (explicité dans les méthodes) tels que pour tout réel θ, on ait :

$$A\cos(\theta) + B\sin(\theta) = r\cos(\theta - \phi).$$

■ Retour sur les fonctions

Proposition 1.9.— Soit $a \in \overline{\mathbb{R}}$ (i.e. a est un réel ou $+\infty$ ou $-\infty$) et f une fonction numérique à variable réelle définie au voisinage de a. Si f a une limite finie, notée L, en a et si L est non nul alors f ne s'annule pas et garde le signe de L sur un voisinage de a.

Proposition 1.10.— Passage à la limite dans les inégalités —. Soit $a \in \overline{\mathbb{R}}$. Soit f et g deux fonctions numériques définies sur une même partie de $\mathbb{R}$ telles que f et g soient définies au voisinage de a et telles que $f \leq g$ sur un voisinage de a alors :

- Si f et g ont des limites finies en a alors $\lim\limits_{x \longrightarrow a} (f(x)) \leq \lim\limits_{x \longrightarrow a} (g(x))$.
- Si $\lim\limits_{x \longrightarrow a} (g(x)) = -\infty$ alors $\lim\limits_{x \longrightarrow a} (f(x)) = -\infty$.
- Si $\lim\limits_{x \longrightarrow a} (f(x)) = +\infty$ alors $\lim\limits_{x \longrightarrow a} (g(x)) = +\infty$.

Proposition 1.11.— Théorème de la limite monotone —. Soit $(a, b) \in (\overline{\mathbb{R}})^2$ tel que $a < b$ et $f :]a, b[\mapsto \mathbb{R}$ une fonction croissante (cas décroissant à savoir faire). On a :

- Si f est majorée alors $\lim\limits_{x \longrightarrow b^-} (f(x))$ existe et vaut $\sup\limits_{]a,b[}(f)$. Si f n'est pas majorée alors $\lim\limits_{x \longrightarrow b^-} (f(x)) = +\infty$.
- Si f est minorée alors $\lim\limits_{x \longrightarrow a^+} (f(x))$ existe et vaut $\inf\limits_{]a,b[}(f)$. Si f n'est pas minorée alors $\lim\limits_{x \longrightarrow a^+} (f(x)) = -\infty$.

Théorème 1.12.— Théorème des gendarmes (ou d'encadrement). —. Soit $a \in \overline{\mathbb{R}}$. Soit f, g et h trois fonctions numériques définies sur une même partie de $\mathbb{R}$ telles que f, g et h soient définies au voisinage de a. Si $f \leq g \leq h$ sur un voisinage de a et si $\lim\limits_{x \longrightarrow a} (f(x))$ et $\lim\limits_{x \longrightarrow a} (h(x))$ existent, sont finies et égales alors g admet une limite fine en a et $\lim\limits_{x \longrightarrow a} (g(x))$ vaut $\lim\limits_{x \longrightarrow a} (h(x))$.

Proposition 1.13.— Soit $(a, L) \in \overline{\mathbb{R}} \times \mathbb{R}$. Soit f et g deux fonctions numériques définies sur une même partie de $\mathbb{R}$ telles que f et g soient définies sur un voisinage de a.

- Si $\lim\limits_{x \longrightarrow a} (g(x))$ existe et vaut 0 et s'il existe un voisinage $\mathcal{V}$ de a tel que $|f(x) - L| \leq g(x)$ pour tout x de $\mathcal{V}$, alors $\lim\limits_{x \longrightarrow a} (f(x))$ existe et vaut L.
- Si $\lim\limits_{x \longrightarrow a} (g(x))$ existe et vaut 0 et si f est bornée au voisinage de a alors $\lim\limits_{x \longrightarrow a} (g(x)f(x))$ existe et vaut 0.

Définition : *Soit $f : D \to \mathbb{R}$ une fonction avec D une partie de $\mathbb{R}$, soit a un élément de D. Si $\lim\limits_{x \longrightarrow a} \left(\dfrac{f(x) - f(a)}{x - a} \right)$ existe et est finie alors f est dérivable en a et on appelle $f'(a)$ cette limite.*

Proposition 1.14.— Croissances comparées —. Soit a et b deux réels strictement positifs. On a :

1. $\lim\limits_{x \longrightarrow +\infty} \left(\dfrac{x^a}{(e^x)^b} \right) = 0$
2. $\lim\limits_{x \longrightarrow +\infty} \left(\dfrac{(\ln(x))^b}{x^a} \right) = 0$
3. $\lim\limits_{x \longrightarrow +\infty} \left(\dfrac{(e^x)^b}{x^a} \right) = +\infty$
4. $\lim\limits_{x \longrightarrow +\infty} \left(\dfrac{x^a}{(\ln(x))^b} \right) = +\infty$
5. $\lim\limits_{x \longrightarrow 0^+} \left((|\ln(x)|)^b x^a \right) = 0$

Théorème 1.15.— Théorème des valeurs intermédiaires —. Soit a et b deux réels tels que $a < b$. Soit h une fonction numérique à variable réelle continue sur $[a, b]$. Si z est un réel compris entre $h(a)$ et $h(b)$ alors il existe $c \in [a, b]$ tel que $h(c) = z$. En particulier, si $h(a) \times h(b) \leq 0$, alors il existe $c \in [a, b]$ tel que $h(c) = 0$.

Théorème 1.16.— Théorème de la bijection continue —. Soit f une fonction numérique définie sur I. Si f est strictement monotone et continue sur I alors :

- $f(I)$ est un intervalle et f réalise une bijection de I sur $f(I)$.
- f^{-1} est continue et strictement monotone et son sens de variation est celui de f.
- L'équation $f(x) = y$ d'inconnue x a une seule solution si y est dans $f(I)$ (c'est $f^{-1}(y)$), aucune sinon.

Définition : *Soit $M_0(a, f(a))$ un point du plan. Si f est dérivable en a alors on appelle tangente en M_0 à C_f la droite d'équation : $y = f'(a)(x - a) + f(a)$.*

Proposition 1.17.— Si f est dérivable en a alors f est continue en a (la réciproque est fausse !!!).

Proposition 1.18.— Si f et g, deux fonctions, sont dérivables en a alors $f+g$, $f\times g$ et λf (avec λ réel) sont dérivables en a et :

$$(f+g)'(a) = f'(a) + g'(a)\ ,\ (\lambda f)'(a) = \lambda f'(a) \ \text{ et } \ (f\times g)'(a) = f'(a)g(a) + g'(a)f(a).$$

Si f est dérivable en a et si h, une autre fonction, est dérivable en $f(a)$ alors $h\circ f$ est dérivable en a et :

$$(h\circ f)'(a) = h'(f(a)) \times f'(a).$$

En particulier, $\left(\dfrac{1}{f}\right)'(a) = -\dfrac{f'(a)}{f(a)^2}$ et $\left(\dfrac{g}{f}\right)'(a) = \dfrac{g'(a)f(a) - f'(a)g(a)}{f(a)^2}$ si on suppose $f(a) \neq 0$.

Proposition 1.19.— Si f est continue, strictement monotone et dérivable en a et si $f'(a) \neq 0$ alors f^{-1} est dérivable en $f(a)$ et, en posant $b = f(a)$, on a :

$$\left(f^{-1}\right)'(b) = \frac{1}{f'(f^{-1}(b))}$$

Si $f'(a) = 0$ alors f^{-1} n'est pas dérivable en $f(a)$ et son graphe en $(a, f(a))$ admet une tangente verticale.

Proposition 1.20.— Si f est dérivable, si a n'est pas une borne de I et si f possède un extremum local en a alors $f'(a) = 0$.

Théorème 1.21.— Théorème de Rolle —. On suppose que $f(a) = f(b)$ avec f une fonction continue sur $[a,b]$ et dérivable sur $]a,b[$. Il existe alors c dans $]a,b[$ tel que $f'(c) = 0$.

Théorème 1.22.— Théorème des accroissements finis —. Si f est une fonction continue sur $[a,b]$ et dérivable sur $]a,b[$ alors il existe ξ dans $]a,b[$ tel que :

$$f'(\xi) = \frac{f(b) - f(a)}{b-a}.$$

■ Retour sur les développements limités

Théorème 1.23.— Théorème de Taylor-Young —. On suppose que f est de classe $\mathcal{C}^n$ au voisinage de 0, on a alors :

$$f(x) \underset{0}{=} f(0) + f'(0)x + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \mathrm{o}\left(x^n\right).$$

Cela signifie que $\displaystyle\lim_{x\to 0} \left(\frac{f(x) - \left(f(0) + f'(0)x + \cdots + \dfrac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n\right)}{x^n} \right) = 0.$

Proposition 1.24.— On en déduit : $\exp(x) \underset{0}{=} 1 + \dfrac{x^1}{1!} + \dfrac{x^2}{2!} + \cdots + \dfrac{x^n}{n!} + \mathrm{o}\left(x^n\right)$ puis :

$\cos(x) \underset{0}{=} 1 - \dfrac{x^2}{2!} + \dfrac{x^4}{4!} \cdots + \dfrac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!} + \mathrm{o}\left(x^{2n+1}\right), \sin(x) \underset{0}{=} x - \dfrac{x^3}{3!} + \dfrac{x^5}{5!} \cdots + \dfrac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \mathrm{o}\left(x^{2n+2}\right)$

$\dfrac{1}{1+x} \underset{0}{=} 1 - x + x^2 - x^3 + \cdots + (-1)^n x^n + \mathrm{o}\left(x^n\right), \dfrac{1}{1-x} \underset{0}{=} 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots + x^n + \mathrm{o}\left(x^n\right).$

Proposition 1.25.— Intégration des développements limités —. Soit I un intervalle réel contenant zéro et $g : I \to \mathbb{R}$ une fonction. On suppose que g est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I et que :

$$g'(x) \underset{0}{=} \left(a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n\right) + \mathrm{o}\left(x^n\right).$$

avec $(a_0, a_1, \cdots, a_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$ alors g admet un développement limité au voisinage de zéro d'ordre $n+1$ et :

$$g(x) \underset{0}{=} \left(g(0) + a_0 x + a_1 \frac{x^2}{2} + a_2 \frac{x^3}{3} + \cdots + a_n \frac{x^{n+1}}{n+1}\right) + \mathrm{o}\left(x^{n+1}\right).$$

En particulier, $\ln(1+x) \underset{0}{=} x - \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^3}{3} \cdots + (-1)^{n-1} \dfrac{x^n}{n} + \mathrm{o}\left(x^n\right)$.

Proposition 1.26.— Obtention d'équivalent —. Si $f(x) \underset{a}{=} a_k (x-a)^k + \mathrm{o}\left((x-a)^k\right)$ avec k un entier naturel et $a_k \neq 0$ alors $f(x) \underset{a}{\sim} a_k (x-a)^k$.

Proposition 1.27.— Tangente —. Soit b un réel et f une fonction numérique définie sur un voisinage de b contenant b. Si f admet un développement limité au voisinage de b de la forme :

$$f(x) \underset{b}{=} a_0 + a_1 (x-b) + \mathrm{o}((x-b))$$

alors la tangente en $(b, f(b))$ à C_f, courbe représentative de f, existe et a pour équation :

$$y = a_0 + a_1(x-b).$$

Si de plus $f(x) \underset{b}{=} a_0 + a_1 (x-b) + a_k (x-b)^k + \mathrm{o}\left((x-b)^k\right)$ avec k un entier égal ou supérieur à 2 et $a_k \neq 0$, alors on peut donner la position locale de la courbe C_f par rapport à sa tangente. Les détails seront fournis dans les méthodes.

Proposition 1.28.— Asymptote —. Soit f une fonction définie sur un voisinage de l'infini. L'éventuel développement limité au voisinage de 0 (resp. 0^+, 0^-) de $x \mapsto x f\left(\dfrac{1}{x}\right)$ permet de déterminer si la courbe C_f possède des asymptotes en l'infini (resp. en $+\infty$, en $-\infty$) et la position de C_f par rapport à celle-ci. Les détails seront fournis dans les méthodes.

■ Retour sur les fonctions de plusieurs variables

Définition : *On appelle applications partielles de f en (a,b) les deux fonctions suivantes :*

$$f_1 : \begin{cases} \{x \in \mathbb{R} \text{ tels que } (x,b) \in \mathcal{D}\} & \to \mathbb{R} \\ x & \mapsto f(x,b) \end{cases} \quad \text{et} \quad f_2 : \begin{cases} \{y \in \mathbb{R} \text{ tels que } (a,y) \in \mathcal{D}\} & \to \mathbb{R} \\ y & \mapsto f(a,y) \end{cases}.$$

Soit $f_1 : x \mapsto f(x,b)$. Si f_1 est dérivable en a alors on dit que f admet une dérivée partielle par rapport à la première variable (définition de par rapport à la seconde variable évidente) en (a,b) et on note : $\dfrac{\partial f}{\partial x}(a,b) = f_1'(a)$.

Théorème 1.29.— Théorème de Schwarz —. Si f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathcal{D}$ alors : $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$.

Proposition 1.30.— Soit $(a,b,c,d) \in \mathbb{R}^4$ avec $a < b$ et $c < d$. Soit f une fonction numérique de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]\,a,b\,[\times]\,c,d\,[$. Si f admet en (x_0,y_0) un extremum alors :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0) = \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0) = 0.$$

Le gradient de f en (x_0,y_0), qui est $\left(\dfrac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0), \dfrac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)\right)$, est alors le vecteur nul.

Définition : *On suppose f de classe $\mathcal{C}^1$. Le plan tangent à $\mathcal{S}_f$ en (a,b) est le plan d'équation cartésienne :*

$$z = f(a,b) + \frac{\partial f}{\partial x}(a,b)(x-a) + \frac{\partial f}{\partial y}(a,b)(y-b).$$

Le plan tangent à $\mathcal{S}_f$ en (a,b) est donc le plan normal à $\left(\dfrac{\partial f}{\partial x}(a,b), \dfrac{\partial f}{\partial y}(a,b), -1\right)$ et passant par $(a,b,f(a,b))$.

Proposition 1.31.— On suppose f de classe $\mathcal{C}^1$. Soit h et k deux réels. La quantité suivante est négligeable devant $\sqrt{h^2+k^2}$:

$$f(a+h,b+k) - f(a,b) - \left(h\frac{\partial f}{\partial x}(a,b) + k\frac{\partial f}{\partial y}(a,b)\right)$$

En notant $\overrightarrow{u}$ le vecteur (h,k) et $\cdot$ le produit scalaire, on a donc :

$$f(a+h,b+k) - f(a,b) \approx \overrightarrow{\mathrm{grad}}_{(a,b)}(f) \cdot \overrightarrow{u}$$