ECT
2e année

Sylvain Rondy
Pierre Berlandi
Gianfranco Niffoi
Nicolas Pierson
Anne-Sophie Pierson-Fertel

PRÉPAS SCIENCES
COLLECTION DIRIGÉE PAR **BERTRAND HAUCHECORNE**

MATHÉMATIQUES INFORMATIQUE

3e édition

NOUVEAUX PROGRAMMES !

- Objectifs
- Cours résumé
- Méthodes
- Vrai/faux, erreurs classiques
- Exercices de base et d'approfondissement
- Sujets de concours (écrits, oraux)
- Corrigés détaillés et commentés
- Éléments d'informatique et d'algorithmique avec Python

ellipses

■■ Résumé de cours

■ Matrices (rappels)

Définition 1.1. — Soit $(n, p) \in (\mathbb{N}^*)^2$. On appelle matrice à n lignes et p colonnes le tableau de réels suivant : $A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,p} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \dots & a_{2,p} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \dots & a_{n,p} \end{pmatrix}$.

L'ensemble des matrices à n lignes et p colonnes est noté $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$.

Si $p = n$, la matrice A est dite *carrée d'ordre n* et on note $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ l'ensemble de ces matrices.

Remarque 1.1. — On considère qu'un élément de $\mathcal{M}_1(\mathbb{R})$ est un nombre réel.

Notation 1.1. — La matrice A s'écrit : $A = (a_{i,j})_{1 \le i \le n, 1 \le j \le p}$ ou simplement, s'il n'y a pas d'ambiguïté sur le nombre de lignes et de colonnes, $A = (a_{i,j})$.

Définition 1.2. — Si tous les éléments de la matrice A sont nuls, on dit que A est la matrice nulle et on note $A = 0$.

On appelle *matrices lignes* les éléments de $\mathcal{M}_{1,p}(\mathbb{R})$ et *matrices colonnes* ceux de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

Définition 1.3. — Deux matrices sont égales si elles ont même nombre de lignes, même nombre de colonnes et si elles ont les mêmes coefficients.

■ Opérations matricielles (rappels)

❑ Addition de deux matrices

Définition 1.4. — Soit deux matrices $A = (a_{i,j})$ et $B = (b_{i,j})$ de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$. On appelle somme de A et de B la matrice de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$, notée $A + B$, définie par $A + B = (c_{i,j})$ où : $\forall (i, j) \in [\![1, n]\!] \times [\![1, p]\!]$, $c_{i,j} = a_{i,j} + b_{i,j}$.

❑ Produit d'une matrice par un réel

Définition 1.5. — Soit une matrice $A=(a_{i,j})$ de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ et λ un réel.

On appelle produit de A par le réel λ, la matrice de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ notée λA définie par $\lambda A=(a'_{i,j})$ où : $\forall(i,j)\in[\![1,n]\!]\times[\![1,p]\!]$, $a'_{i,j}=\lambda a_{i,j}$.

Exemple 1.1. — Si $A=\begin{pmatrix}1&0&-5\\2&-4&6\end{pmatrix}$ et $B=\begin{pmatrix}-2&-3&4\\1&-4&-5\end{pmatrix}$, on a : $2A-3B=\begin{pmatrix}8&9&-22\\1&4&27\end{pmatrix}$.

❑ Produit de deux matrices

Définition 1.6. — Soit $(n,p,q)\in(\mathbb{N}^*)^3$, $A=(a_{i,j})$ une matrice de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ et $B=(b_{i,j})$ une matrice de $\mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{R})$. On appelle produit de A par B la matrice de $\mathcal{M}_{n,q}(\mathbb{R})$ notée AB définie par $AB=(c_{i,j})_{1\le i\le n,\ 1\le j\le q}$ où : $\forall(i,j)\in[\![1,n]\!]\times[\![1,q]\!]$, $c_{i,j}=\sum_{k=1}^{p}a_{i,k}\,b_{k,j}$. Cette formule n'est pas à retenir, il faut juste savoir multiplier deux matrices sur des cas concrets.

⇨ **Méthode 1.1. Comment multiplier deux matrices ?**

Remarque 1.2. — Il est exceptionnel que, si A et B sont deux matrices, on ait $AB = BA$. Lorsque cependant c'est le cas, on dit que les matrices A et B *commutent*.

Remarque 1.3. — Le produit de 2 matrices peut être nul sans qu'aucune des deux matrices ne soit nulle : par exemple, si $A=\begin{pmatrix}1&-2\\-2&4\end{pmatrix}$ et $B=\begin{pmatrix}2&-6\\1&-3\end{pmatrix}$, alors $AB=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}$.

❑ Propriétés des opérations matricielles

Propriétés 1.1. — Pour toutes matrices *A, B, C* telles que les opérations ci-dessous soient possibles, on a :

- $A(BC)=(AB)C$.
- $A(B+C)=AB+AC$ et $(A+B)C=AC+BC$.
- $\forall\lambda\in\mathbb{R}$, $A(\lambda B)=(\lambda A)B=\lambda AB$.

❑ Transposée d'une matrice

Définition 1.7. — Soit une matrice $A=(a_{i,j})$ de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$.

On appelle *transposée* de A la matrice de $\mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{R})$ noté ${}^tA$ définie par ${}^tA=(a'_{i,j})$ où :

$$\forall(i,j)\in[\![1,p]\!]\times[\![1,n]\!],\ a'_{i,j}=a_{j,i}.$$

Exemple 1.2. — Si $A=\begin{pmatrix}1&0&-5\\2&-4&6\end{pmatrix}$, alors ${}^tA=\begin{pmatrix}1&2\\0&-4\\-5&6\end{pmatrix}$.

Remarque 1.4. — Si $X=\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ et $Y=\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$, ${}^tXY$ est le réel égal à $\sum_{i=1}^{n} x_i y_i$.

Propriétés 1.2. — Pour toutes matrices A et B telles que $A+B$ existe et pour tout réel λ, on a :

- ${}^t\left({}^tA\right)=A$.
- ${}^t\left(A+B\right)={}^tA+{}^tB$.
- ${}^t\left(\lambda A\right)=\lambda\,{}^tA$.

■ Matrices carrées

❑ Définitions

Définitions 1.8. — Soit $A=\left(a_{i,j}\right)$ une matrice de $\mathcal{M}_n\left(\mathbb{R}\right)$.

- Pour tout i élément de $[\![1,n]\!]$, les réels $a_{i,i}$ sont appelés coefficients diagonaux.
- A est une matrice *triangulaire inférieure* si pour tout (i,j) de $[\![1,n]\!]^2$ tel que $i<j$, $a_{i,j}=0$.
- A est une matrice *triangulaire supérieure* si pour tout (i,j) de $[\![1,n]\!]^2$ tel que $i>j$, $a_{i,j}=0$.
- A est une matrice *diagonale* si pour tout (i,j) de $[\![1,n]\!]^2$ tel que $i\neq j$, $a_{i,j}=0$.

Définition 1.9. — La *matrice identité* (ou matrice unité) de $\mathcal{M}_n\left(\mathbb{R}\right)$ est la matrice diagonale dont tous les éléments diagonaux sont égaux à 1. Elle est notée I_n ou tout simplement I.

Remarque 1.5. — Une matrice est dite *scalaire* si elle est de la forme αI, où α est un réel.

Propriété 1.3. — $\forall A\in\mathcal{M}_n\left(\mathbb{R}\right)$, $AI=IA=A$ et $\forall X\in\mathcal{M}_{n,1}\left(\mathbb{R}\right)$, $IX=X$.

❑ Puissance d'une matrice carrée

Définition 1.10. — Soit A une matrice de $\mathcal{M}_n\left(\mathbb{R}\right)$.
Par convention, on pose $A^0=I_n$ et, pour tout entier naturel p non nul, on pose $A^p=A^{p-1}A$.
En fait, pour tout p de $\mathbb{N}^*$, A^p est le produit de p matrices toutes égales à A.

⇨ **Méthode 1.2. Comment calculer une puissance d'une matrice par conjecture ?**

❑ Formule du binôme

Théorème 1.1. — Si A et B sont deux matrices de $\mathcal{M}_n\left(\mathbb{R}\right)$ qui commutent ($AB=BA$), alors pour tout entier naturel p, on a : $(A+B)^p=\sum_{k=0}^{p}\binom{p}{k}A^kB^{p-k}=\sum_{k=0}^{p}\binom{p}{k}A^{p-k}B^k$.

⇨ **Méthode 1.3. Comment utiliser la formule du binôme ?**

❑ Matrices carrées inversibles

Définition 1.11. — On dit qu'une matrice A de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est *inversible* s'il existe une matrice B de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $AB = BA = I$. La matrice B est *l'inverse* de A et on note $B = A^{-1}$.

Théorème 1.2. — Si A et B sont deux matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telles que $AB = I$, alors A et B sont inversibles et on a : $A^{-1} = B$ et $B^{-1} = A$.

⇨ **Méthode 1.4. Comment calculer l'inverse d'une matrice carrée par produit ?**

Exemple 1.3. — Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 2 & -7 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 7 & -3 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$. $AB = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 2 & -7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 7 & -3 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Comme $AB = I$, alors A et B sont inversibles et on a : $B = A^{-1}$ (ou si l'on veut $A = B^{-1}$).

Propriétés 1.4. — Si A est inversible, alors :

- A^{-1} est inversible et $\left(A^{-1}\right)^{-1} = A$.
- Pour tout entier naturel p, A^p est inversible et $\left(A^p\right)^{-1} = \left(A^{-1}\right)^p$, matrice que l'on note A^{-p} .
- Si A et B sont inversibles alors AB est inversible et on a : $\left(AB\right)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.

❑ Inversibilité des matrices carrées d'ordre 2

Propriété 1.5. — La matrice $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ est inversible si et seulement si $ad - bc \neq 0$. Dans ce cas, on a :

$$A^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

❑ Propriétés des matrices diagonales

Propriété 1.6. — Le produit de deux matrices diagonales est la matrice diagonale obtenue en multipliant entre eux les termes diagonaux de même place.

Par exemple, si $D = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}$ et $D' = \begin{pmatrix} a' & 0 \\ 0 & b' \end{pmatrix}$, alors $DD' = \begin{pmatrix} aa' & 0 \\ 0 & bb' \end{pmatrix}$.

Propriété 1.7. — La puissance n^e d'une matrice diagonale est la matrice diagonale obtenue en élevant les termes diagonaux à la puissance n.

Par exemple, si $D = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}$, alors $D^n = \begin{pmatrix} a^n & 0 \\ 0 & b^n \end{pmatrix}$.

Propriété 1.8. — Une matrice diagonale D est inversible lorsque tous ses coefficients diagonaux sont non nuls. D^{-1} est alors obtenue en inversant les coefficients diagonaux de D.

Par exemple, si $D = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}$, avec $a \neq 0$ et $b \neq 0$, alors $D^{-1} = \begin{pmatrix} 1/a & 0 \\ 0 & 1/b \end{pmatrix}$

■ Systèmes linéaires

❑ Écriture matricielle d'un système

Définition 1.12. — Soit le système linéaire $(\mathrm{S})\ \begin{cases} a_{1,1}x_1 + \cdots + a_{1,p}x_p = y_1 \\ \vdots \\ a_{n,1}x_1 + \ldots + a_{n,p}x_p = y_n \end{cases}$.

La matrice $A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & \ldots & a_{1,p} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n,1} & \ldots & a_{n,p} \end{pmatrix}$ de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ est appelée matrice associée au système (S).

Notation 1.2 — Avec $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix}$ et $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$, $(\mathrm{S})\ \begin{cases} a_{1,1}x_1 + \cdots + a_{1,p}x_p = y_1 \\ \vdots \\ a_{n,1}x_1 + \ldots + a_{n,p}x_p = y_n \end{cases}$ s'écrit $AX = Y$.

❑ Interprétation matricielle des systèmes de Cramer

Propriété 1.9. — Soit A une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
La matrice A est inversible si, et seulement si, A est la matrice d'un système de Cramer, c'est-à-dire si, et seulement si, le système $AX = Y$, d'inconnue X élément de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, possède une seule solution, cette solution étant $X = A^{-1}Y$.

⇨ **Méthode 1.5. Comment calculer l'inverse d'une matrice carrée par résolution de système ?**

Propriété 1.10. — Soit A une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On a l'équivalence suivante :
A est inversible si et seulement si, pour toute matrice X de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$: $AX = 0 \Leftrightarrow X = 0$.

Théorème 1.3. — Soit A une matrice **triangulaire**.
A est inversible si et seulement si les coefficients diagonaux de A sont tous non nuls.

❑ Réduite de Gauss

Définition 1.13. — Soit A une matrice carrée de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On appelle réduite de Gauss de A, toute matrice triangulaire obtenue par des opérations élémentaires effectuées sur les lignes de A.

Remarque 1.6. — Les opérations élémentaires sur les lignes d'une matrice sont les mêmes que celles décrites sur les systèmes au **chapitre 15** du **tome 1**, à savoir :

- $L_i \leftrightarrow L_j$: échange des lignes *i* et *j*.
- $L_i \leftarrow aL_i$ (avec $a \neq 0$) : remplacement de la ligne *i* par son produit par un réel non nul.
- $L_i \leftarrow L_i + bL_j$: remplacement de la ligne *i* par sa somme avec un multiple de la ligne *j*.
- Les deux dernières opérations peuvent se regrouper en : $L_i \leftarrow aL_i + bL_j$ (avec $a \neq 0$).

Théorème 1.4. — Soit *A* une matrice carrée de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

- Si une réduite de Gauss de *A* est inversible, alors *A* est inversible.
- Si *A* est inversible, alors toutes ses réduites de Gauss sont inversibles.

⇨ **Méthode 1.6. Comment montrer qu'une matrice est (ou n'est pas) inversible ?**

❑ Méthode de Gauss-Jordan

Théorème 1.5. — Toute matrice inversible peut se transformer en la matrice identité à l'aide d'opérations élémentaires sur les lignes de cette matrice et son inverse s'obtient en effectuant, dans le même ordre, les mêmes opérations élémentaires sur les lignes de la matrice identité.

⇨ **Méthode 1.7. Comment calculer l'inverse d'une matrice carrée par la méthode de Gauss-Jordan ?**

Méthodes

Le produit matriciel

Méthode 1.1. Comment multiplier deux matrices ?

Soit $A=(a_{i,j})$ une matrice de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ et $B=(b_{i,j})$ une matrice de $\mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{R})$. On cherche à calculer AB.
On s'assure de la validité du produit en vérifiant que le nombre de colonnes de A est égal au nombre de lignes de B. On sait alors que $AB=(c_{i,j})\in \mathcal{M}_{n,q}(\mathbb{R})$ et, d'après la définition, pour tout couple (i,j) élément de $[\![1,n]\!]\times[\![1,q]\!]$, on a :
$c_{i,j}=\sum_{k=1}^{p} a_{i,k}b_{k,j}=a_{i,1}b_{1,j}+a_{i,2}b_{2,j}\ldots+a_{i,p}b_{p,j}$. Ainsi, le coefficient $c_{i,j}$ situé à la croisée de la i^{e} ligne et de la j^{e} colonne de AB s'obtient en considérant les coefficients de la i^{e} ligne de A et de la j^{e} colonne de B.

⇨ **Exercices 1.1, 1.2, 1.4, 1.5, 1.6, 1.9, 1.17**

Exemple. Soit $A=\begin{pmatrix}1 & -1 & 3\\ 0 & 5 & -2\end{pmatrix}$ et $B=\begin{pmatrix}0 & -2 & 1 & -3\\ 1 & 2 & 1 & 0\\ -1 & 3 & 2 & 1\end{pmatrix}$. Calculer AB.

$A\in \mathcal{M}_{2,3}(\mathbb{R})$ et $B\in \mathcal{M}_{3,4}(\mathbb{R})$ donc le produit AB est possible et AB appartient à $\mathcal{M}_{2,4}(\mathbb{R})$.

$$AB=\begin{pmatrix}1 & -1 & 3\\ 0 & 5 & -2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & -2 & 1 & -3\\ 1 & 2 & 1 & 0\\ -1 & 3 & 2 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-4 & 5 & 6 & 0\\ 7 & 4 & 1 & -2\end{pmatrix}.$$

Par exemple, le coefficient $c_{2,3}$ du produit AB s'obtient en considérant les coefficients de la 2^{e} ligne de A et ceux de la 3^{e} colonne de B : $c_{2,3}=0\times1+5\times1-2\times2=1$.

Remarque. On peut aussi présenter le produit matriciel sous la forme suivante. Cette présentation est pratique pour visualiser les calculs mais prend de la place !

$$\begin{array}{c|c} & \begin{pmatrix}0 & -2 & 1 & -3\\ 1 & 2 & 1 & 0\\ -1 & 3 & 2 & 1\end{pmatrix}\\ \hline \begin{pmatrix}1 & -1 & 3\\ 0 & 5 & -2\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}-4 & 5 & 6 & 0\\ 7 & 4 & 1 & -2\end{pmatrix}\end{array}.$$

■ Puissances d'une matrice

❑ Méthode 1.2. Comment calculer la puissance d'une matrice par conjecture ?

A étant une matrice carrée, pour calculer A^n ($n \in \mathbb{N}$), on peut calculer les premières puissances A^2, A^3, ... Puis on propose une formule donnant A^n que l'on démontre souvent par récurrence.

⇨ **Exercices 1.4, 1.5, 1.16**

Exemple 1. Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. Calculer, pour tout entier naturel *n*, la matrice A^n.

$$A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 3 \end{pmatrix} = 3A.$$

On propose de montrer par récurrence que pour tout entier naturel *n* non nul : $A^n = 3^{n-1}A$.
La proposition est vraie pour $n = 1$: en effet, on a bien $A^1 = 3^0 A$.
Supposons, pour *n* fixé dans $\mathbb{N}^*$, que $A^n = 3^{n-1}A$. Montrons que $A^{n+1} = 3^n A$.
$A^{n+1} = A^n \times A = 3^{n-1} A \times A$ par hypothèse de récurrence. On en déduit :
$A^{n+1} = 3^{n-1} A^2 = \left(3^{n-1} \times 3\right) A$, car $A^2 = 3A$, et on a enfin : $A^{n+1} = 3^n A$.

Conclusion. Pour tout entier naturel *n* non nul, $A^n = 3^{n-1} A$ (et bien sûr $A^0 = I$).

Exemple 2. Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Déterminer, pour tout *n* entier naturel, la matrice A^n.

$A^2 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = -I$. On en déduit immédiatement que :

$\forall k \in \mathbb{N}$, $A^{2k} = \left(A^2\right)^k = \left(-I\right)^k = \left(-1\right)^k I$ et $A^{2k+1} = A^{2k} \times A = \left(-1\right)^k I \times A = \left(-1\right)^k A$.

En conclusion, pour tout entier naturel *k*, on a : $A^{2k} = \left(-1\right)^k I$ et $A^{2k+1} = \left(-1\right)^k A$.
Remarque : Dans ce cas, il est inutile de raisonner par récurrence.

❑ Méthode 1.3. Comment utiliser la formule du binôme ?

Dans certains cas, on peut écrire une matrice carrée A comme somme de deux matrices qui commutent. Souvent, l'une de ces matrices est *I*, ou une matrice scalaire (αI). On calcule alors A^n ($n \in \mathbb{N}$) à l'aide de la formule du binôme.

⇨ **Exercices 1.6, 1.7**