ECG
2e année

Sylvain Rondy
Pierre Berlandi
Gianfranco Niffoi
Nicolas Pierson
Anne-Sophie Pierson-Fertel

PRÉPAS SCIENCES
COLLECTION DIRIGÉE PAR **BERTRAND HAUCHECORNE**

MATHÉMATIQUES APPLIQUÉES INFORMATIQUE

- Objectifs
- Cours résumé
- Méthodes
- Vrai/faux, erreurs classiques
- Exercices de base et d'approfondissement
- Sujets de concours (écrits, oraux)
- Corrigés détaillés et commentés
- Éléments d'informatique et d'algorithmique avec Python

4e édition

NOUVEAUX PROGRAMMES !

ellipses

Chapitre 1

Espaces vectoriels

UN MATHÉMATICIEN

Le mathématicien allemand **Hermann Grassmann** mène des études de théologie à Berlin, puis il enseigne les mathématiques dans un lycée de la ville, ensuite à Stettin. Il publie en 1844 un ouvrage qui contient en germe les notions fondamentales de l'algèbre linéaire : combinaisons linéaires, dépendance et indépendance linéaire, bases et dimension. Les théories de Grassmann, trop précoces pour l'époque, mais aussi très opaques, ne sont pas comprises.

Un peu d'histoire

Depuis que Descartes a introduit en 1637 les coordonnées pour repérer les points, de nombreux raisonnements géométriques se sont effectués par des additions de coordonnées ou par multiplication de ces coordonnées par un nombre.

Jusqu'à la fin du XVIII^{e} siècle, les calculs se faisaient sans se préoccuper de structurer les différents ensembles utilisés. Par la suite, un grand souci de rendre les raisonnements mathématiques plus rigoureux s'est fait jour. Le mathématicien anglais Arthur Cayley a considéré des opérations sur les n-uplets de nombres ; c'était certes pratique et c'est ce que nous faisons dès qu'un repère est fixé mais ce n'était pas satisfaisant pour les changements de bases. Hermann Grassmann a proposé une méthode plus subtile, ne faisant pas appel à une base particulière mais sa formalisation, bien que très intéressante, était trop confuse.

■■ Objectifs

■ Les incontournables

- ▷ Connaître les espaces vectoriels de référence et leurs dimensions.
- ▷ Savoir montrer qu’un ensemble est un sous-espace vectoriel.
- ▷ Connaître les notions de familles libres et liées.
- ▷ Connaître la notion de famille génératrice et de sous-espace vectoriel engendré.

■ Et plus si affinités

- ▷ Savoir déterminer la dimension d'un espace vectoriel "simple".
- ▷ Savoir déterminer les coordonnées d'un vecteur dans une base.

Résumé de cours

Espaces vectoriels

Nous allons développer la notion d'espace vectoriel, introduite dans le cours de 1re année. À cet effet, le lecteur est invité à relire le **chapitre 18** du **tome 1** dans lequel est donnée, entre autres, la définition d'un espace vectoriel (**théorème 18.1** et **définition 18.2**). En première année, le champ d'étude des espaces vectoriels se limite à $\mathbb{R}^n$ avec n entier de $\{1,2,3,4\}$. Le paragraphe ci-dessous présente les espaces vectoriels qui font référence en seconde année. Pour chacun d'eux, sont précisées les lois de composition interne et externe en vigueur dans ces espaces.

Définitions et vocabulaire de base

Définition 1.1. — Soit E un ensemble non vide.
On dit que la loi + est une *loi de composition interne* sur E si : $\forall (x,y)\in E^2$, $x+y\in E$.
On dit que la loi $\cdot$ est une *loi de composition externe* sur E si : $\forall x\in E, \forall\lambda\in\mathbb{R}$, $\lambda\cdot x\in E$.

Définition 1.2. — On appelle *espace vectoriel sur* $\mathbb{R}$ ou plus simplement *espace vectoriel*, tout ensemble E non vide, muni d'une loi de composition interne, notée +, et d'une loi de composition externe, notée $\cdot$, qui vérifient :

- $\forall (x,y)\in E^2$, $x+y=y+x$ (on dit que la loi + est *commutative*).
- $\forall (x,y,z)\in E^3$, $x+(y+z)=(x+y)+z$ (on dit que la loi + est *associative*).
- Il existe un élément de E noté 0_E tel que : $\forall x\in E$, $x+0_E=0_E+x=x$ (0_E est unique et est noté 0 s'il n'y a pas de risque de confusion).
- Pour tout élément x de E, il existe un élément y de E qui vérifie : $x+y=y+x=0_E$ (y est unique et est noté $-x$).
- $\forall (\lambda,\mu)\in\mathbb{R}^2$, $\forall x\in E$, $(\lambda\mu)\cdot x=\lambda\cdot(\mu\cdot x)$.
- $\forall (\lambda,\mu)\in\mathbb{R}^2$, $\forall x\in E$, $(\lambda+\mu)\cdot x=\lambda\cdot x+\mu\cdot x$
- $\forall\lambda\in\mathbb{R}$, $\forall (x,y)\in E^2$, $\lambda\cdot(x+y)=\lambda\cdot x+\lambda\cdot y$.
- $\forall x\in E$, $1\cdot x=x$.

Vocabulaire 1.1. — Les éléments de E sont appelés *vecteurs* et les réels sont parfois appelés *scalaires*.

Espaces vectoriels de référence

Propriété 1.1. — Pour tout n de $\mathbb{N}^*$, l'ensemble $\mathbb{R}^n=\{(x_1,x_2,...,x_n), x_1\in\mathbb{R}, x_2\in\mathbb{R},...,x_n\in\mathbb{R}\}$ est un espace vectoriel.

Remarque 1.1. — L'espace vectoriel $\mathbb{R}^n$ a été largement étudié en première année.

Propriété 1.2. — Pour tout (n, p) de $\left(\mathbb{N}^*\right)^2$, $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ est un espace vectoriel.

Exemple 1.1. — $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ est un espace vectoriel.

Remarque 1.2. — Les lois en vigueur sur $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ sont l'addition des matrices et la multiplication d'une matrice par un réel. Elles sont présentées aux **définitions 5.3** et **5.4** du **chapitre 5** du **tome 1**.

Propriété 1.3. — L'ensemble des fonctions polynomiales à coefficients réels de degré inférieur ou égal à n (n étant un entier naturel), noté $\mathbb{R}_n[x]$, est un espace vectoriel.

Remarque 1.3. — Les lois en vigueur sur $\mathbb{R}_n[x]$ sont l'addition des fonctions et la multiplication d'une fonction par un réel. Elles sont présentées à la **définition 4.8** du **chapitre 4** du **tome 1**.

Remarque 1.4. — Plus généralement, l'ensemble $\mathbb{R}[x]$ est aussi un espace vectoriel mais le programme officiel exclut son étude.

❑ Dimension d'un espace vectoriel

Définition 1.3. — Soit n un entier naturel non nul. On dit qu'un espace vectoriel E est de dimension n s'il existe une bijection f de E sur $\mathbb{R}^n$ qui vérifie :

$$\forall (x, y) \in E^2,\ \forall \lambda \in \mathbb{R},\ f(\lambda x + y) = \lambda f(x) + f(y)$$

Remarque 1.4. — On dit que l'application f préserve les combinaisons linéaires. Ce type d'application sera étudié dans le **chapitre 2** de ce livre.

Propriété 1.4. — Pour tout n de $\mathbb{N}^*$, l'espace vectoriel $\mathbb{R}^n$ est de dimension n.

Remarque 1.5. — Il suffit de considérer l'application identité pour s'en convaincre.

Exemple 1.2. — $\mathbb{R}$ est un espace vectoriel de dimension 1.

Propriété 1.5. — Pour tout (n, p) de $\left(\mathbb{N}^*\right)^2$, l'espace vectoriel $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ est de dimension $n \times p$.

Remarque 1.6. — Il suffit de considérer l'application qui à toute matrice A de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ associe le np-uplet $(a_{1,1}, ..., a_{1,p}, a_{2,1}, ..., a_{2,p}, ..., a_{n,1}, ..., a_{n,p})$ pour s'en convaincre.

Propriété 1.6. — Pour tout n de $\mathbb{N}$, l'espace vectoriel $\mathbb{R}_n[x]$ est de dimension $n+1$.

Remarque 1.7. — Il suffit de considérer l'application qui, à toute fonction polynôme P définie par $P(x)=\sum_{k=0}^{n} a_k x^k$, associe le $(n+1)$-uplet $(a_0, a_1, ..., a_n)$ pour s'en convaincre.

Dans toute la suite de ce chapitre, la lettre E désigne un espace vectoriel.

❑ Sous-espaces vectoriels

On rappelle la définition et la caractérisation d'un sous-espace vectoriel de E, déjà énoncées dans le livre de 1re année.

Définition 1.4. — On appelle *sous-espace vectoriel* de E ou *sous-espace* de E, toute partie F non vide de E telle que :

- $\forall (x, y) \in F^2,\ \ x+y \in F$ (on dit que F est stable pour l'addition).
- $\forall (\lambda, x) \in \mathbb{R}\times F,\ \lambda x \in F$ (on dit que F est stable pour la multiplication par un réel).

Théorème 1.1. — F est un sous-espace vectoriel de E si et seulement si :

- F est une partie non vide de E.
- $\forall (x, y) \in F^2,\ \forall \lambda \in \mathbb{R},\ \lambda x + y \in F$.

⇨ **Méthode 1.1. Comment montrer, à l'aide de la caractérisation, qu'un ensemble est un sous-espace vectoriel ?**

Théorème 1.2. — $\{0_E\}$ et E sont des sous-espaces vectoriels de E.

Propriété 1.7. — Tout sous-espace vectoriel de E est lui-même un espace vectoriel.

■ Familles de vecteurs

❑ Combinaisons linéaires

Définition 1.5. — Soit E un espace vectoriel et p un entier naturel non nul.
On appelle famille de vecteurs de E tout p-uplet $(e_1, \ldots, e_p)$ formé de p vecteurs de E.

Définition 1.6. — Soit p un entier naturel non nul et $\mathcal{F} = (e_1, \ldots, e_p)$ une famille de p vecteurs de E. On dit qu'un vecteur x de E est *combinaison linéaire* des p vecteurs de $\mathcal{F}$ s'il existe p réels $\lambda_1, \ldots, \lambda_p$ tels que : $x = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i e_i$ (les λ_i sont les *coefficients* de la combinaison linéaire).

Remarque 1.8. — Le vecteur nul est combinaison linéaire de n'importe quels vecteurs.

❑ Familles génératrices

Définition 1.7. — Soit $\mathcal{F} = (e_1, \ldots, e_p)$ une famille de p vecteurs de E. On dit que $\mathcal{F}$ est une *famille génératrice* de E si tout vecteur de E peut s'écrire comme combinaison linéaire de vecteurs de $\mathcal{F}$.

Propriété 1.8. — Soit $\mathcal{F} = (e_1, \ldots, e_p)$ une famille de vecteurs de E. L'ensemble de toutes les combinaisons linéaires de vecteurs de $\mathcal{F}$ est un sous-espace vectoriel de E appelé *sous-espace vectoriel engendré par* $\mathcal{F}$. Il est noté Vect $(e_1, \ldots, e_p)$.

⇨ **Méthode 1.2. Comment montrer, à l'aide d'une famille génératrice, qu'un ensemble est un sous-espace vectoriel de *E* ?**

Théorème 1.3. — Si $F = \text{Vect } (e_1, \ldots, e_{p+1})$ et si e_{p+1} est combinaison linéaire des vecteurs $e_1, \ldots, e_p$, alors $F = \text{Vect}(e_1, \ldots, e_p)$. En particulier, $\text{Vect } (e_1, \ldots, e_p, 0_E) = \text{Vect } (e_1, \ldots, e_p)$.

Théorème 1.4. — Si $F = \text{Vect}(\alpha_1 e_1, \ldots, \alpha_p e_p)$ et si les réels $\alpha_1, \ldots, \alpha_p$ sont tous non nuls, alors :

$$F = \text{Vect}(e_1, \ldots, e_p)$$

❑ Familles libres

Définition 1.8. — Soit $\mathcal{F} = (e_1, \ldots, e_p)$ une famille de p vecteurs de E. On dit que $\mathcal{F}$ est une *famille libre*, ou que les vecteurs $e_1, \ldots, e_p$ sont *linéairement indépendants*, si toute combinaison linéaire nulle de $e_1, \ldots, e_p$ ne peut s'écrire qu'avec des réels tous nuls.

Autrement dit, $\mathcal{F}$ est libre si : $\sum_{i=1}^{p} \lambda_i e_i = 0 \;\Rightarrow\; \forall i \in [\![1, p]\!],\ \lambda_i = 0$.

Propriété 1.9. — Soit x un vecteur de E.
La famille (x) est libre si, et seulement si, x est différent de 0_E.

Propriété 1.10. — Soit x et y deux vecteurs de E.
La famille (x, y) est libre si, et seulement si, x et y ne sont pas proportionnels (on dit aussi pas colinéaires).

⇨ **Méthode 1.3. Comment étudier la liberté d'une famille ?**

Théorème 1.5. — Toute famille contenue dans une famille libre de E est libre (on dit qu'une *sous-famille* d'une famille libre est libre).

❑ Familles liées

Définition 1.9. — Une famille *liée* est une famille qui n'est pas libre.

Théorème 1.6. — Une famille de vecteurs de E est liée si et seulement si l'un des vecteurs de cette famille est combinaison linéaire des autres (par exemple, toute famille contenant deux fois le même vecteur est liée).

Théorème 1.7. — Toute famille contenant le vecteur nul est liée.

Théorème 1.8. — Toute famille de vecteurs de E qui contient une famille liée est liée.

❑ Bases

Définition 1.10. — Soit $n \in \mathbb{N}^*$. La famille $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ est une base de E si, et seulement si, pour tout vecteur x de E, il existe un unique n-uplet $(x_1, \dots, x_n)$ de réels tel que :

$$x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i$$

⇨ **Méthode 1.4. (1) Comment montrer qu'une famille est une base ?**

Théorème 1.9. — Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une famille de n vecteurs de E.
$\mathcal{B}$ est une *base* de E si, et seulement si, $\mathcal{B}$ est à la fois libre et génératrice de E.

Vocabulaire 1.2. — Les réels $x_1, \dots, x_n$ sont appelés les *coordonnées* de x dans la base $\mathcal{B}$.

■ Espaces vectoriels et dimension

❑ Théorème de la dimension

Théorème 1.10. — Théorème de la dimension.
Si l'espace vectoriel E possède une base formée de n vecteurs (avec n dans $\mathbb{N}^*$), alors toutes les bases de E ont exactement n vecteurs.

Définition 1.11. — Le nombre n de vecteurs, commun à toutes les bases de E, est appelé *dimension* de E. On dit que E est de dimension n et on note : $\dim E = n$.

Remarque 1.9. — On dit alors que E est de dimension finie.

Remarque 1.10. — Par convention, si l'espace E est réduit au seul vecteur 0_E, $\dim E = 0$.

Vocabulaire 1.2. — Tout espace vectoriel de dimension 1 est appelé *droite*. Tout espace vectoriel de dimension 2 est appelé *plan*.

❑ Base canonique des espaces vectoriels de référence

Propriété 1.11. — Pour tout n de $\mathbb{N}^*$, $\mathbb{R}^n$ est un espace vectoriel de dimension finie et $\dim \mathbb{R}^n = n$. Pour tout i de $[\![1,n]\!]$, en notant $e_i = (0,\dots,0,1,0,\dots,0)$ le vecteur de $\mathbb{R}^n$ formé de zéros sauf un 1 en i^{e} position, la famille $(e_1,\dots,e_n)$ est une base de $\mathbb{R}^n$, appelée base canonique de $\mathbb{R}^n$.

Propriété 1.12. — $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ est un espace vectoriel de dimension finie et $\dim \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R}) = np$. Pour tout couple (i,j) de $[\![1,n]\!]\times[\![1,p]\!]$, en notant $E_{i,j}$ la matrice de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ dont tous les coefficients sont nuls sauf celui à la croisée de la i^{e} ligne et de la j^{e} colonne qui vaut 1, la famille $(E_{i,j})_{1\le i\le n, 1\le j\le p}$ est une base de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$, appelée base canonique de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$.

Propriété 1.13. — $\mathbb{R}_n[x]$ est un espace vectoriel de dimension finie et $\dim \mathbb{R}_n[x] = n+1$. Pour tout entier i de $[\![1,n]\!]$, en notant e_i la fonction définie, pour tout réel x, par $e_i(x) = x^i$ (avec $e_0(x)=1$), la famille $(e_0,e_1,\dots,e_n)$ est une base de $\mathbb{R}_n[x]$, appelée base canonique de $\mathbb{R}_n[x]$.

❑ Familles de vecteurs et dimension

Théorème 1.11. — Soit E un espace vectoriel de dimension n.
- Toute famille libre de E possède au plus n vecteurs.
- Toute famille libre de n vecteurs de E est une base de E.

Théorème 1.12. — Soit E un espace vectoriel de dimension n.
- Toute famille génératrice de E possède au moins n vecteurs.
- Toute famille génératrice formée de n vecteurs de E est une base de E.

⇨ **Méthode 1.4. (2) Comment montrer qu'une famille est une base ?**

❑ Sous-espaces vectoriels et dimension

Théorème 1.13. — Soit E un espace vectoriel de dimension finie.
Tout sous-espace vectoriel F de E est de dimension finie et on a : $\dim F \le \dim E$.

Théorème 1.14. — Les seuls sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}$ sont $\{0\}$ et $\mathbb{R}$.

Théorème 1.15. — Soit E un espace vectoriel de dimension finie.
Si F est un sous-espace vectoriel de E tel que $\dim F = \dim E$, alors $F = E$.

Définition 1.12. — Soit E un espace vectoriel et $(e_1,\ldots,e_n)$ une famille de vecteurs de E. On appelle *rang de la famille* $(e_1,\ldots,e_n)$, et on note $\mathrm{rg}(e_1,\ldots,e_n)$, la dimension de Vect $(e_1,\ldots,e_n)$.

Remarque 1.11. — Le rang de $(e_1,\ldots,e_n)$ est égal au cardinal de la plus grande famille libre contenue dans $(e_1,\ldots,e_n)$.