100% ENTRAÎNEMENT

NOUVEAUX PROGRAMMES

MATHS APPLIQUÉES

ECG-2

Maxime Bailleul
François-Xavier Manoury
Stéphane Préteseille

ellipses

1 Espaces vectoriels

Maîtriser le cours

Exercice 1 – Le vrai/faux du début

1. $\mathrm{Vect}((2,1,0),(1,2,1))$ est un espace vectoriel de dimension 2. ☐ Vrai ☐ Faux
2. La famille $(1, x-1, x(x-2))$ est libre dans $\mathbb{R}[x]$. ☐ Vrai ☐ Faux
3. $E = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3,\ x^2 + 2y - z = 0\}$ est un espace vectoriel. ☐ Vrai ☐ Faux

Exercice 2 –

Soit n un entier naturel non nul.

1. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer que l'ensemble $F = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}),\ AM = MA\}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
2. Montrer que l'ensemble $G = \{A \in \mathbb{R}_n[x],\ \forall x \in \mathbb{R},\ A(x) - xA'(x) = 0\}$ est un espace vectoriel.

Exercice 3 –

On considère l'ensemble $F = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4,\ x+y+z+t = 0,\ 2x - y + 2z - t = 0\}$.

1. Montrer que F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$ et en déterminer une base et la dimension.
2. Prouver que la famille $((2,1,-2,-1),(-1,2,1,-2))$ est une base de F.

Maîtriser les méthodes fondamentales

Exercice 4 –

Dans cet exercice, on considère l'espace vectoriel $E = \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ et on note F l'ensemble des éléments de E de la forme $M = \begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & a & b \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}$, où $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$.

1. Montrer que F est un sous-espace vectoriel de E.
2. Déterminer une base et la dimension de F.

Exercice 5 –
On considère la matrice A de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ suivante :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Pour tout réel λ, on note $E_\lambda(A)$ l'ensemble des vecteurs X de $\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ solutions de l'équation $AX = \lambda X$.

1. Justifier que, pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, l'ensemble $E_\lambda(A)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.
2. Déterminer une base et la dimension de $E_0(A)$.
3. Déterminer une base et la dimension de $E_2(A)$.

Exercice 6 –
On note $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ l'espace vectoriel des matrices carrées d'ordre 2 et on considère les matrices suivantes :

$$F = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad G = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad H = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

On note $\mathscr{S}_2$ l'ensemble des matrices carrées symétriques d'ordre 2.

1. Montrer que $\mathscr{S}_2$ est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ et que (F, G, H) est une base de $\mathscr{S}_2$. Déterminer la dimension de $\mathscr{S}_2$.
2. Le produit de deux éléments de $\mathscr{S}_2$ appartient-il encore à $\mathscr{S}_2$?

Exercice 7 –
On s'intéresse dans cet exercice à l'ensemble E suivant :

$$E = \left\{ \begin{pmatrix} a+b & c & a-b \\ c & a+b & c \\ a-b & c & a+b \end{pmatrix}, \ (a, b, c) \in \mathbb{R}^3 \right\}$$

1. Montrer que E est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$.
2. Déterminer une base et la dimension de E.

Pour aller plus loin

Exercice 8 –
Dans cet exercice, E désigne l'espace vectoriel $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ et A est un élément de E. On note :

$$E_1(A) = \{M \in E, \ AM = M\} \quad \text{et} \quad E_2(A) = \{M \in E, \ A^2M = AM\}$$

1. Montrer que $E_1(A)$ et $E_2(A)$ sont des sous-espaces vectoriels de E.
2. Prouver que $E_1(A)$ est inclus dans $E_2(A)$. Que peut-on dire de $E_1(A)$ et $E_2(A)$ si A est inversible ?

Exercice 9 –

Dans cet exercice, E désigne l'ensemble $\mathbb{R}_3[x]$ des fonctions polynômes de degré inférieur ou égal à 3 et on note (e_0, e_1, e_2, e_3) la base canonique de E.

1. On note F l'ensemble des fonctions polynômes paires appartenant à E.

- **a)** Montrer que F est un sous-espace vectoriel de E.
- **b)** Déterminer une base et la dimension de F.

2. On note $G = \{P \in E,\ \forall x \in \mathbb{R},\ P(x) - (x+1)\,P'(x) + \left(x^2+1\right)P''(x) = 0\}$.

- **a)** Montrer que G est un sous-espace vectoriel de E.
- **b)** Déterminer une base et la dimension de G.

Exercice 10 –

Dans cet exercice, on note $E = \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$. On considère un réel t quelconque et on note :

$$X_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ t \end{pmatrix}, \quad X_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ t \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad X_3 = \begin{pmatrix} t \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

1. Prouver que l'ensemble $F = \{aX_1 + bX_2 + cX_3,\ (a,b,c) \in \mathbb{R}^3\}$ est un sous-espace vectoriel de E.

2. Déterminer l'ensemble des réels t pour lesquels la famille (X_1, X_2, X_3) est une base de E.

3. Quelle est la dimension de F en fonction de la valeur de t ?

Exercice 11 – Le vrai/faux de la fin

1. $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3,\ x - 2y + z = 0\}$ est un espace vectoriel de dimension 2	☐ Vrai	☐ Faux
2. $E = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3,\ x - 2y + z = 1\}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$	☐ Vrai	☐ Faux
3. $\mathrm{Vect}((1,0,1),(0,1,1)) = \mathrm{Vect}((1,-1,0),(1,1,2))$	☐ Vrai	☐ Faux
4. Si E est un espace vectoriel, l'intersection de deux sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^4$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$	☐ Vrai	☐ Faux

Solution des exercices

Exercice 1 –

1. Les deux vecteurs $(2,1,0)$ et $(1,2,1)$ ne sont pas colinéaires donc la famille est libre.	⊠ Vrai	☐ Faux
2. C'est une famille de fonctions polynômes échelonnées en degrés.	⊠ Vrai	☐ Faux
3. $(1,0,1)$ appartient à E mais pas $2\,(1,0,1)$.	☐ Vrai	⊠ Faux

Exercice 2 –

Cours

Soit E un espace vectoriel. Un ensemble F est un sous-espace vectoriel de E si :

- $F \subset E$,
- $F \neq \emptyset$,
- $\forall (x, y) \in F^2,\ \forall \lambda \in \mathbb{R},\ \lambda x + y \in F$.

Si F est un sous-espace vectoriel de E, alors c'est un espace vectoriel.

1. F est inclus dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ par définition. De plus la matrice nulle de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ commute avec A, donc appartient à F, qui n'est donc pas vide.
Par ailleurs, pour tout $(M, N) \in F^2$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, $\lambda M + N$ appartient à $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et on a :

$$A\left(\lambda M + N\right) = \lambda AM + AN$$

donc, comme M et N appartiennent à F :

$$\begin{aligned} A\left(\lambda M + N\right) &= \lambda MA + NA \\ &= \left(\lambda M + N\right) A \end{aligned}$$

donc $\lambda M + N$ appartient à F, ce qui nous permet de conclure que F est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

2. G est inclus dans $\mathbb{R}_n[x]$ par définition. De plus, si P est la fonction polynôme nulle, on a :

On va montrer que G est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}_n[x]$.

$$\forall x \in \mathbb{R},\ P(x) = 0 \quad \text{et} \quad P'(x) = 0$$

donc :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ P(x) - xP'(x) = 0$$

Ainsi P appartient à G, qui n'est donc pas vide. Soit alors $\lambda \in \mathbb{R}$ et $(P, Q) \in G^2$. P et Q appartiennent à $\mathbb{R}_n[x]$, qui est un espace vectoriel, donc $\lambda P + Q$ appartient à $\mathbb{R}_n[x]$. De plus on a, par linéarité de la dérivation :

$$\begin{aligned} \forall x \in \mathbb{R},\ (\lambda P + Q)(x) - x\left(\lambda P + Q\right)'(x) &= (\lambda P + Q)(x) - x\left(\lambda P' + Q'\right)(x) \\ &= \lambda P(x) + Q(x) - \lambda x P'(x) - xQ'(x) \\ &= \lambda\left[P(x) - xP'(x)\right] + \left[Q(x) - xQ'(x)\right] \end{aligned}$$

donc, comme P et Q appartiennent à G :

$$\begin{aligned} \forall x \in \mathbb{R},\ (\lambda P + Q)(x) - x\left(\lambda P + Q\right)'(x) &= \lambda \times 0 + 0 \\ &= 0 \end{aligned}$$

donc $\lambda P + Q$ appartient à G.
G est donc un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}_n[x]$, donc c'est un espace vectoriel.

Exercice 3 –

1. Pour tout $(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4$, on a (en procédant par substitution) :

$$\begin{aligned}
(x, y, z, t) \in F &\iff \begin{cases} x + y + z + t = 0 \\ 2x - y + 2z - t = 0 \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} 3x + 3z = 0 \\ t = 2x - y + 2z \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} z = -x \\ t = -y \end{cases} \\
&\iff (x, y, z, t) = (x, y, -x, -y) \\
&\iff (x, y, z, t) = x\,(1, 0, -1, 0) + y\,(0, 1, 0, -1)
\end{aligned}$$

On en déduit que :

$$F = \{x\,(1, 0, -1, 0) + y\,(0, 1, 0, -1)\,,\ (x, y) \in \mathbb{R}^2\} = \mathrm{Vect}((1, 0, -1, 0), (0, 1, 0, -1))$$

Or $(1, 0, -1, 0)$ et $(0, 1, 0, -1)$ sont deux vecteurs de $\mathbb{R}^4$, donc F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$.

Cours

Se souvenir que, si E est un espace vectoriel et si $e_1, \dots, e_p$ sont des vecteurs de E, alors l'ensemble

$$F = \{x_1 e_1 + \cdots + x_p e_p,\ (x_1, \dots, x_p) \in \mathbb{R}^p\} = \mathrm{Vect}(e_1, \dots, e_p)$$

est un sous-espace vectoriel de E.

Méthode

Quand il est demandé en même temps de prouver qu'un ensemble F est un sous-espace vectoriel de E (ou un espace vectoriel) et d'en déterminer une base, il est en général plus efficace de chercher la forme des éléments de F pour écrire F comme ensemble des combinaisons linéaires d'une famille de vecteurs de E : cela permet en même temps de prouver que F est un sous-espace vectoriel de E et de trouver une famille génératrice de F. Il ne reste alors qu'à étudier la liberté de la famille.

De plus la famille $((1, 0, -1, 0), (0, 1, 0, -1))$ est génératrice de F. Or cette famille est formée de deux vecteurs non colinéaires, donc elle est libre, ce qui nous permet de conclure que c'est une base de F et que F est de dimension 2.

Cours

Si E est un espace vectoriel, on dit qu'une famille $(x_1, \dots, x_p)$ de vecteurs de E est libre si, pour tous réels $\lambda_1, \dots, \lambda_p$, on a :

$$\sum_{i=1}^{p} \lambda_i e_i = 0 \Rightarrow \forall i \in [\![1, p]\!],\ \lambda_i = 0$$

Dans le cas particulier d'une famille de deux vecteurs (x, y), la famille (x, y) est libre si et seulement si x et y ne sont pas colinéaires, c'est-à-dire si $x \neq 0$ et $y \neq \lambda x$ pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$.

2. On a :

$$\begin{cases} 2 + 1 - 2 - 1 = 0 \\ 2 \times 2 - 1 + 2 \times (-2) - (-1) = 0 \end{cases}$$

On commence par vérifier que les deux vecteurs appartiennent bien à E.

et :

$$\begin{cases} -1 + 2 + 1 - 2 = 0 \\ 2 \times (-1) - 2 + 2 \times 1 - (-2) = 0 \end{cases}$$

donc $((2, 1, -2, -1), (-1, 2, 1, -2))$ est une famille de deux vecteurs de E. De plus ses deux vecteurs ne sont pas colinéaires, donc c'est une famille libre de deux vecteurs de E et, comme E est de dimension 2, c'est une base de E.

Méthode

Si l'on connaît la dimension d'un espace vectoriel E, pour montrer qu'une famille est une base de E, il suffit de prouver que ses vecteurs appartiennent tous à E, qu'elle est libre, et qu'elle comporte autant de vecteurs que la dimension de E.

Exercice 4 –

1. On peut remarquer que :

$$\begin{aligned} F &= \left\{ a \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},\ (a, b, c) \in \mathbb{R}^3 \right\} \\ &= \mathrm{Vect}(I, J, K) \end{aligned}$$

Comme on nous demande ensuite une base de F, on commence par écrire les vecteurs de F comme combinaison linéaire d'éléments de E.

où l'on a noté :

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},\quad J = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},\quad K = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Or I, J et K sont des vecteurs de E, donc F est un sous-espace vectoriel de E.

2. D'après le raisonnement précédent, (I, J, K) est une famille génératrice de F.

La famille comporte au moins trois vecteurs, donc dire que les vecteurs ne sont pas colinéaires ne suffit pas à justifier la liberté.

De plus on a, pour tout $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$:

$$\begin{aligned} aI + bJ + cK = 0 &\Longleftrightarrow \begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & a & b \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix} = 0 \\ &\Longleftrightarrow a = b = c = 0 \end{aligned}$$

Ainsi la famille (I, J, K) est libre. Comme elle est aussi génératrice de F, on en déduit que c'est une base de F et que F est de dimension 3.

Exercice 5 –

1. Pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, on a :

$$E_\lambda(A) = \{X \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R}),\ (A - \lambda I)X = 0\}$$

$E_\lambda(A)$ est donc l'ensemble des solutions d'un système linéaire homogène d'inconnue X dans $\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ donc c'est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.

> **Cours**
> Se souvenir que l'ensemble des solutions d'un système linéaire homogène d'inconnue X dans $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ (ou x dans $\mathbb{R}^n$) est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ (ou de $\mathbb{R}^n$).

2. Pour tout $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$, on a :

$$\begin{aligned} X \in E_0(A) &\Longleftrightarrow AX = 0 \\ &\Longleftrightarrow \begin{cases} x - z = 0 \\ -x + z = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

d'où :

$$X \in E_0(A) \Longleftrightarrow \begin{cases} x = z \\ y \in \mathbb{R} \end{cases} \tag{1.1}$$

et finalement :

$$X \in E_0(A) \Leftrightarrow X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = x \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

donc :

$$E_0(A) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right)$$

De plus les vecteurs $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ ne sont pas colinéaires, donc ils forment une base de $E_0(A)$, qui est de dimension 2.

Méthode

Pour choisir les deux vecteurs et être sûr d'obtenir une famille libre à partir de (1.1), on obtient un premier vecteur en prenant $(z, y) = (1, 0)$ (et en déduisant la valeur de x à l'aide des solutions du système) puis un deuxième vecteur en prenant $(z, y) = (0, 1)$.

3. Pour tout $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$, on a :

$$\begin{aligned} X \in E_2(A) &\iff (A - 2I)X = 0 \\ &\iff \begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 0 & -2 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix} X = 0 \\ &\iff \begin{cases} -x - z = 0 \\ -2y = 0 \\ -x - z = 0 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} z = -x \\ y = 0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow X = \begin{pmatrix} x \\ 0 \\ -x \end{pmatrix} = x \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

donc :

$$E_2(A) = \text{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}\right)$$

De plus le vecteur $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ n'est pas nul, donc il forme une base de $E_2(A)$, qui est ainsi de dimension 1.

Exercice 6 –

1. On a :

$$\begin{aligned} \mathcal{S}_2 &= \left\{ \begin{pmatrix} x & y \\ y & z \end{pmatrix},\ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \right\} \\ &= \{xF + yG + zH,\ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3\} \\ &= \text{Vect}(F, G, H) \end{aligned}$$

Comme F, G et H appartiennent à $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, $\mathcal{S}_2$ est donc un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. De plus la famille (F, G, H) est une famille génératrice de $\mathcal{S}_2$.