100% ENTRAÎNEMENT

NOUVEAUX PROGRAMMES

MATHS APPROFONDIES

ECG-2

Maxime Bailleul
François-Xavier Manoury
Stéphane Préteseille

ellipses

1 Sommes de sous-espaces vectoriels

Maîtriser le cours

Exercice 1 – Le vrai/faux du début

On considère un espace vectoriel E de dimension finie et F, G, H trois sous-espaces vectoriels de E.

1. $\dim(F + G) = \dim(F) + \dim(G)$. ☐ Vrai ☐ Faux
2. Si la somme $F + G + H$ est directe et si (x, y, z) et (x', y', z') appartiennent à $F \times G \times H$, alors : ☐ Vrai ☐ Faux

$$x + y + z = x' + y' + z' \Longrightarrow (x, y, z) = (x', y', z')$$

3. On note $E = \mathbb{R}_2[x]$ et P_1, P_2, P_3 les fonctions polynômes définies par : ☐ Vrai ☐ Faux

$$P_1(x) = 2,\ P_2(x) = 3 - 2x,\ P_3(x) = x\,(x - 1)$$

On a : $E = \text{Vect}(P_1) \oplus \text{Vect}(P_2) \oplus \text{Vect}(P_3)$.

Exercice 2 –

Dans cet exercice, n désigne un entier naturel supérieur ou égal à 2. On note $E = \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ et :

- $\mathscr{T}$ le sous-espace vectoriel de E formé des matrices triangulaires supérieures dont les coefficients diagonaux sont tous nuls,
- $\mathscr{S}$ le sous-espace vectoriel de E formé des matrices triangulaires inférieures dont les coefficients diagonaux sont tous nuls,
- $\mathscr{D}$ le sous-espace vectoriel de E formé des matrices diagonales.

Prouver que : $E = \mathscr{T} \oplus \mathscr{S} \oplus \mathscr{D}$.

Maîtriser les méthodes fondamentales

Exercice 3 –

On considère les ensembles E et F suivants :

$$E = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4,\ x - y + z = 0 \text{ et } t = 0\}$$
$$F = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4,\ x + 2y + z + t = 0 \text{ et } x - y - 2z + t = 0\}$$

1. Montrer que E est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$ et en déterminer une base.

2. Montrer que F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$ et en déterminer une base.
3. Démontrer que E et F sont supplémentaires dans $\mathbb{R}^4$.

Exercice 4 –

1. On note $F = \text{Vect}\,((3,0,1,2))$ et $G = \left\{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4,\ 3x+z+2t=0\right\}$.
   F et G sont-ils supplémentaires dans $\mathbb{R}^4$?
2. On note : $F = \text{Vect}((-1,1,0,-1))$, $G = \text{Vect}((2,1,0,0))$ et $H = \text{Vect}((1,2,0,-1),(1,-2,1,1))$.
   A-t-on : $\mathbb{R}^4 = F \oplus G \oplus H$?

Exercice 5 –

Soit E un espace vectoriel de dimension finie. Soit F, G et H trois sous-espaces vectoriels de E.
Montrer que la somme $F+G+H$ est directe si et seulement si :

$$F \cap G = \{0\} \quad \text{et} \quad (F+G) \cap H = \{0\}$$

Pour aller plus loin

Exercice 6 –

Dans cet exercice, n désigne un entier naturel supérieur ou égal à 2. On note :

$$\forall k \in [\![0,n]\!]\,,\ E_k = \left\{P \in \mathbb{R}_n[x],\ \forall i \in [\![0,n]\!] \setminus \{k\},\ P(i) = 0\right\}$$

1. Montrer que, pour tout $k \in [\![0,n]\!]$, E_k est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}_n[x]$.
2. Pour tout $k \in [\![0,n]\!]$, déterminer une base de E_k puis prouver que :

$$\mathbb{R}_n[x] = E_0 \oplus E_1 \oplus \cdots \oplus E_n$$

Exercice 7 –

On note $E = \mathbb{R}_3[x]$ et on considère les sous-espaces vectoriels de E suivants :

$$F = \{P \in E,\ P(0) = P(1) = P(2) = 0\}$$
$$G = \{P \in E,\ P(1) = P(2) = P(3) = 0\}$$
$$H = \{P \in E,\ \forall x \in \mathbb{R},\ P(x) = P(-x)\}$$
$$I = \{P \in E,\ P(1) = P(2) = 0\}$$

1. Montrer que F et G sont en somme directe et que : $F \oplus G = I$.
2. Montrer que : $E = F \oplus G \oplus H$.

Exercice 8 – Le vrai/faux de la fin

On considère un espace vectoriel E de dimension finie et F, G, H trois sous-espaces vectoriels de E.

1. Si $F \cap G \cap H = \{0\}$, alors la somme $F+G+H$ est directe. ☐ Vrai ☐ Faux
2. Si $E = F \oplus G$ et $E = F \oplus H$, alors $G = H$. ☐ Vrai ☐ Faux

Solution des exercices

Exercice 1 –

Cours

Soit E un espace vectoriel et $F_1, F_2, \dots, F_p$ des sous-espaces vectoriels de E.

- $F_1, \dots, F_p$ sont en somme directe si et seulement si :

$$\forall (x_1, \dots, x_p) \in F_1 \times \cdots \times F_p,\ \sum_{i=1}^{p} x_i = 0 \Longrightarrow x_1 = x_2 = \cdots = x_p = 0$$

- Si E est de dimension finie, E est la somme directe de $F_1, \dots, F_p$ si et seulement si la concaténation de bases de $F_1, \dots, F_p$ est une base de E.
- F_1 et F_2 sont en somme directe si et seulement si $F_1 \cap F_2 = \{0\}$.

1. Faux car on a en fait (formule de Grassmann) : ☐ Vrai ☒ Faux
$$\dim(F+G) = \dim(F) + \dim(G) - \dim(F \cap G)$$
2. C'est une conséquence immédiate de la définition. ☒ Vrai ☐ Faux
3. La famille (P_1, P_2, P_3) est libre car formée de polynômes non nuls échelonnés en degrés ; de plus elle est formée de trois vecteurs de E et E est de dimension 3, donc c'en est une base. ☒ Vrai ☐ Faux

Exercice 2 –

Méthode

Quand on cherche à prouver que trois sous-espaces vectoriels (ou plus) E_1, E_2, E_3 de E sont en somme directe et que leur somme est égale à E et qu'on n'en connaît pas de base, le plus simple est en général de raisonner par analyse-synthèse pour prouver que tout élément de E se décompose de manière unique comme somme de trois vecteurs de E_1, E_2, E_3 respectivement.

Soit $M = (m_{i,j})_{1 \le i,j \le n}$ un élément de E.

◇ Supposons qu'il existe $(T, S, D) \in \mathscr{T} \times \mathscr{S} \times \mathscr{D}$ tel que : $M = T + S + D$ et notons :

$$T = (t_{i,j})_{1 \le i,j \le n}, \quad S = (s_{i,j})_{1 \le i,j \le n}, \quad D = (d_{i,j})_{1 \le i,j \le n}$$

On a alors :

$$\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2,\ m_{i,j} = t_{i,j} + s_{i,j} + d_{i,j} \tag{1.1}$$

De plus on a, par définition :

$$\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2,\ \begin{cases} t_{i,j} = 0 & \text{si } i \ge j \\ s_{i,j} = 0 & \text{si } i \le j \\ d_{i,j} = 0 & \text{si } i \ne j \end{cases}$$

On en déduit, avec (1.1) :

$$\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2, \; m_{i,j} = \begin{cases} t_{i,j} & \text{si } i < j \\ s_{i,j} & \text{si } i > j \\ d_{i,i} & \text{si } i = j \end{cases}$$

d'où :

$$\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2, \; t_{i,j} = \begin{cases} m_{i,j} & \text{si } i < j \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}, \quad s_{i,j} = \begin{cases} m_{i,j} & \text{si } i > j \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad \text{et} \quad d_{i,j} = \begin{cases} m_{i,j} & \text{si } i = j \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Ainsi, s'il existe, le triplet (T, S, D) est défini de manière unique.

◇ Notons maintenant T, S et D les matrices de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ dont les coefficients vérifient :

$$\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2, \; t_{i,j} = \begin{cases} m_{i,j} & \text{si } i < j \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}, \quad s_{i,j} = \begin{cases} m_{i,j} & \text{si } i > j \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad \text{et} \quad d_{i,j} = \begin{cases} m_{i,j} & \text{si } i = j \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

On a alors :

$$\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2, \; t_{i,j} + s_{i,j} + d_{i,j} = m_{i,j}$$

donc $M = T + S + D$. De plus, par construction, T, S et D appartiennent bien respectivement à $\mathscr{T}$, $\mathscr{S}$ et $\mathscr{D}$. Ainsi :

$$\forall M \in E, \; \exists!(T,S,D) \in \mathscr{T} \times \mathscr{S} \times \mathscr{D}, \; M = T + S + D$$

ce qui nous permet de conclure : $E = \mathscr{T} \oplus \mathscr{S} \oplus \mathscr{D}$.

Exercice 3 –

1. Pour tout $(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4$, on a :

$$\begin{aligned}
(x,y,z,t) \in E &\iff \begin{cases} x - y + z = 0 \\ t = 0 \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} z = -x + y \\ t = 0 \end{cases} \\
&\iff (x,y,z,t) = (x, y, -x+y, 0) \\
&\iff (x,y,z,t) = x\,(1,0,-1,0) + y\,(0,1,1,0)
\end{aligned}$$

Comme $(1,0,-1,0)$ et $(0,1,1,0)$ sont deux vecteurs de $\mathbb{R}^4$, E est ainsi le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$ engendré par la famille $((1,0,-1,0),(0,1,1,0))$, donc c'est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$.

De plus, la famille $((1,0,-1,0),(0,1,1,0))$ est formée de deux vecteurs non colinéaires, donc elle est libre, ce qui nous permet de conclure que c'est une base de E et E est de dimension 2.

2. Pour tout $(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4$, on a, en raisonnant par substitution :

$$\begin{aligned}(x, y, z, t) \in F &\iff \begin{cases} x + 2y + z + t = 0 \\ x - y - 2z + t = 0 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} 3y + 3z = 0 \\ t = -x + y + 2z \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} z = -y \\ t = -x - y \end{cases} \\ &\iff (x, y, z, t) = x\,(1, 0, 0, -1) + y\,(0, 1, -1, -1)\end{aligned}$$

Comme $(1, 0, 0, -1)$ et $(0, 1, -1, -1)$ sont deux vecteurs de $\mathbb{R}^4$, F est ainsi le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$ engendré par la famille $((1, 0, 0, -1), (0, 1, -1, -1))$, donc c'est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$.

De plus, la famille $((1, 0, 0, -1), (0, 1, -1, -1))$ est formée de deux vecteurs non colinéaires, donc elle est libre, ce qui nous permet de conclure que c'est une base de F et F est de dimension 2.

3. Soit $(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4$. On a :

Comme on connaît les dimensions de E et F, on va prouver que $E \cap F = \{0\}$

$$(x, y, z, t) \in E \cap F \iff \begin{cases} x - y + z = 0 \\ t = 0 \\ x + 2y + z + t = 0 \\ x - y - 2z + t = 0 \end{cases}$$

donc, d'après les calculs effectués dans la question 2 :

$$\begin{aligned}(x, y, z, t) \in E \cap F &\iff \begin{cases} z = -x + y \\ t = 0 \\ z = -y \\ t = -x - y \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} -x + 2y = 0 \\ -x - y = 0 \\ z = -y \\ t = 0 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} 3y = 0 \\ x = -y \\ z = -y \\ t = 0 \end{cases} \\ &\iff x = y = z = t = 0\end{aligned}$$

On a donc :

$$E \cap F = \{0\}$$

De plus, on a :

$$\dim(E) + \dim(F) = 4 = \dim(\mathbb{R}^4)$$

ce qui nous permet maintenant de conclure : $\mathbb{R}^4 = E \oplus F$.

Méthode

Si l'on cherche à prouver que deux sous-espaces vectoriels F et G de E sont supplémentaires dans E, on peut :

- si E est de dimension finie et si l'on connaît les dimensions respectives de F et G, montrer que $\dim(F) + \dim(G) = \dim(E)$ et $F \cap G = \{0\}$,
- si E est de dimension finie et si l'on connaît des bases de F et G, montrer que la concaténation d'une base de F et d'une base de G est une base de E,
- sinon, montrer (le plus souvent par analyse-synthèse) que :

$$\forall x \in E,\ \exists!(x_F, x_G) \in F \times G,\ x = x_F + x_G$$

Exercice 4 –

1. On peut remarquer que :

On va commencer par chercher la dimension de G.

$$\begin{aligned} G &= \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \ / \ z = -3x - 2t\} \\ &= \{(x,y,-3x-2t,t),\ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3\} \\ &= \{x\,(1,0,-3,0) + y\,(0,1,0,0) + t\,(0,0,-2,1)\,,\ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3\} \\ &= \mathrm{Vect}((1,0,-3,0),(0,1,0,0),(0,0,-2,1)) \end{aligned}$$

donc G est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$. Par ailleurs, on a, pour tout $(x,y,t) \in \mathbb{R}^3$:

$$\begin{aligned} x\,(1,0,-3,0) + y\,(0,1,0,0) + t\,(0,0,-2,1) = 0 &\iff (x,y,-3x-2t,t) = 0 \\ &\iff \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \\ -3x - 2t = 0 \\ t = 0 \end{cases} \\ &\iff x = y = t = 0 \end{aligned}$$

Ainsi la famille $((1,0,-3,0),,(0,1,0,0)(0,0,-2,1))$ est libre, ; de plus elle est génératrice de G par construction, donc c'est une base de G et :

$$\dim(G) = 3$$

De plus, F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$ et le vecteur $(3,0,1,2)$ n'est pas nul, donc :

$$\dim(F) = 1$$

d'où :

$$\dim(F) + \dim(G) = 4 = \dim(\mathbb{R}^4) \tag{1.2}$$

Soit alors $x = (a, b, c, d)$ un vecteur de $\mathbb{R}^4$. On a :

> Comme on connaît les dimensions de F et G, il nous suffit maintenant de prouver que $F \cap G = \{0\}$

$$\begin{aligned} x \in F \cap G &\iff \begin{cases} x \in F \\ x \in G \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} \exists \alpha \in \mathbb{R},\ x = (a, b, c, d) = (3\alpha, 0, \alpha, 2\alpha) \\ 3a + c + 2d = 0 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} \exists \alpha \in \mathbb{R},\ x = (3\alpha, 0, \alpha, 2\alpha) \\ 14\alpha = 0 \end{cases} \\ &\iff x = 0 \end{aligned}$$

d'où :

$$F \cap G = \{0\}$$

ce qui nous permet de conclure, avec (1.2) : $F \oplus G = \mathbb{R}^4$.

2. On peut remarquer que F et G sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^4$ et que :

$$(-1, 1, 0, -1) + (2, 1, 0, 0) = (1, 2, 0, -1)$$

donc, en notant $x = (-1, 1, 0, -1)$, $y = (2, 1, 0, 0)$ et $z = -(1, 2, 0, -1)$, on a trouvé un triplet (x, y, z) appartenant à $F \times G \times H$ tel que $x + y + z = 0$ et $(x, y, z) \neq (0, 0, 0)$, ce qui prouve que la somme $F + G + H$ n'est pas directe.

> **À retenir**
>
> Se souvenir que trois sous-espaces vectoriels F, G, H de E sont en somme directe dans E si et seulement si :
>
> $$\forall (x, y, z) \in F \times G \times H,\ x + y + z = 0 \Longrightarrow x = y = z = 0$$
>
> Par conséquent, s'il existe $(a, b, c) \in F \times G \times H$ tel que $(a, b, c) \neq (0, 0, 0)$ et $a = b + c$, alors la somme $F + G + H$ n'est pas directe (prendre $(x, y, z) = (a, -b, -c)$ dans l'implication précédente).

Exercice 5 –

◇ Supposons que la somme $F + G + H$ soit directe.

> **À retenir**
>
> Si la somme de trois sous-espaces vectoriels (ou plus) E_1, E_2, E_3 de E est directe, alors :
>
> $$\forall (x, y, z), (x', y', z') \in E_1 \times E_2 \times E_3,\ x + y + z = x' + y' + z' \Longrightarrow (x, y, z) = (x', y', z')$$

- Soit $x \in F \cap G$. En notant $(a, b, c) = (x, 0, 0)$ et $(a', b', c') = (0, x, 0)$, on a alors :

$$a + b + c = a' + b' + c'$$

et donc, comme (a, b, c) et (a', b', c') appartiennent à $F \times G \times H$ et comme la somme $F + G + H$ est directe :

$$(a, b, c) = (a', b', c')$$

donc en particulier :

$$x = 0$$

Comme $F \cap G$ est un sous-espace vectoriel de E, on en déduit :

$$F \cap G = \{0\}$$

- Soit $x \in (F + G) \cap H$. Comme x appartient à $F + G$, il existe $(y, z) \in F \times G$ tel que :

$$x = y + z$$

et, en notant $(a, b, c) = (y, z, 0)$ et $(a', b', c') = (0, 0, x)$, on a alors :

$$a + b + c = a' + b' + c'$$

et donc, comme (a, b, c) et (a', b', c') appartiennent à $F \times G \times H$ et comme la somme $F + G + H$ est directe :

$$(a, b, c) = (a', b', c')$$

donc en particulier :

$$x = 0.$$

Comme $(F + G) \cap H$ est un sous-espace vectoriel de E, on en déduit :

$$(F + G) \cap H = \{0\}$$

◇ Réciproquement, supposons que :

$$F \cap G = \{0\} \quad \text{et} \quad (F + G) \cap H = \{0\}$$

Méthode

Pour montrer que la somme de trois sous-espaces vectoriels (ou plus) E_1, E_2, E_3 de E est directe, on peut montrer que :

$$\forall (x, y, z) \in E_1 \times E_2 \times E_3,\ x + y + z = 0 \Longrightarrow x = y = z = 0$$

Soit $(x, y, z) \in F \times G \times H$ tel que :

$$x + y + z = 0$$

On a alors :

$$x + y = -z$$

donc, comme $(x, y) \in F \times G$ et $z \in H$:

$$(x + y) \in (F + G) \cap H \quad \text{et} \quad z \in (F + G) \cap H$$